L1, Université Denis Diderot PARIS 7, année 2008-2009

Cours de mathématiques MP1

EXERCICES. Feuille n^0 1, nombres complexes.

On note $\Re(z)$ et $\Im(z)$ la partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe z. On rappelle la formule dite de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

1) Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$, vérifier les formules

$$\Re\left(z^{-1}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \Im\left(z^{-1}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Plus généralement si $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, montrer que :

$$\Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2}.$$

2) Soit $a + ib$ donné dans $\mathbf{C}$.
Résoudre l'équation : $(x+iy)^2 = a + ib$ dans $\mathbf{C}$. [Indications ci-dessous]

(i) Solution algébrique : montrer que $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$; en déduire la valeur de x^2 et y^2 puis une expression de x et y.

(ii) Solution trigonométrique : chercher $z = x + iy$ sous la forme $re^{i\theta}$.

(iii) Solution graphique : donner et justifier une construction graphique des solutions.

3) Soit $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $|a| = |b| = |a+b| = 1$. Montrer que a/b est une racine troisième de l'unité, c'est-à dire $(a/b)^3 = 1$.

4) Résoudre l'équation : $z^3 = -4 + 4i\sqrt{3}$ dans $\mathbf{C}$.

5) Résoudre l'équation : $z^4 = i$ dans $\mathbf{C}$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.

Montrer que $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$.

6) Résoudre l'équation : $z^8 + z^4 + 1 = 0$ dans $\mathbf{C}$.

(i) En résolvant le système : $z^4 = u$, $u^2 + u + 1 = 0$.

(ii) En décomposant le polynôme $X^8 + X^4 + 1$ en produit de polynômes de degré 2 dans $\mathbf{R}[X]$.

(iii) En calculant $(X^8 + X^4 + 1)(X^4 - 1)$.

7) Calculer $\cos(5a)$ et $\sin(5a)$ en fonction respectivement de $\cos a$ et de $\sin a$.

Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

8) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{C}$:
(i) $(z+1)^n = (z-1)^n$.
(ii) $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
(iii) $1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

9) On pose $C_n := \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta)$ et $S_n := \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta)$.
Calculer $C_n + iS_n$. En déduire C_n et S_n en fonction de n et de θ.

On pose maintenant $A_n := \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos(k\theta)$ et $B_n := \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin(k\theta)$.
Calculer A_n et B_n en fonction de n et de θ.
En déduire les formules $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k = 0$.

10) Soit $j := \exp(2i\pi/3)$.

(i) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

(ii) Montrer que $X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX = (X + jY + j^2 Z)(X + j^2 Y + jZ)$ dans $\mathbf{C}[X, Y, Z]$.

(iii) Soient les trois points A, B, C d'affixe a, b, c, montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.
(iv) Montrer que la condition précédente équivaut à :
$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0.$$

11) Soit la fonction de variable complexe définie par $f(z) := \dfrac{z-i}{z+i}$.
(i) Montrer que $|f(z)| = 1$ si et seulement si $z \in \mathbf{R}$.
(ii) Montrer également que $|f(z)| < 1$ si et seulement si $\Im z > 0$. En déduire que f induit une bijection entre le demi-plan $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im z > 0\}$ et le disque $\mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.
(iii) Montrer que f envoie une droite D soit dans une autre droite, soit dans un cercle (on distinguera suivant que $-i \in D$ ou $-i \notin D$).

12)
Soit $\omega := \exp(2i\pi/5)$.

(i) Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

(ii) Calculer $\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5)$ et $\cos(2\pi/5)\cos(4\pi/5)$.

(iii) Montrer que $\cos(2\pi/5) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

(iv) Donner une construction du pentagone régulier avec une règle et un compas.