L1, Université Denis Diderot PARIS 7, année 2008-2009

Cours de mathématiques MP1

EXERCICES. Feuille n^0 2, ALGÈBRE LINÉAIRE : systèmes linéaires, matrices, espaces vectoriels, dimension, applications linéaires

A) *RÉVISION DES DÉFINITIONS.*

A.1) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A + C$, CB, BC, AB et BA. Que pensez-vous de l'écriture " CA"?

B) *SYSTÈMES LINÉAIRES ET MATRICES.*

B.1) (formules de Cramer en dimension 2) On étudie le système d'inconnues x, y et de paramètres a, b, c, d, u, v

$$\begin{cases} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{cases}$$

Posons $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$. Montrer que, si ce dernier est non nul, il y a une unique solution :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Que se passe-t-il si $ad - bc = 0$?

B.2) Décrire les solutions des systèmes linéaires

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \end{cases} \quad (**) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \end{cases}$$

B.3) Discuter, selon la valeur du paramètre m, les solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + 5x_5 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= m \end{cases}$$

B.4) Discuter, selon la valeur du paramètre t, les solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccc} tx_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + (3+t)x_2 + 6x_3 + 6x_4 & = & 1+t \\ 3x_1 + 6x_2 + (8+t)x_3 + 9x_4 & = & 2+t \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + (8+t)x_4 & = & 2+t \end{array}\right.$$

B.5) Soit $m \in \mathbf{R}$ on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^4 = mI_4$ et en déduire que, si $m \neq 0$, la matrice A est inversible. Calculer A^{-1} dans ce cas, ainsi que A^n pour $n \in \mathbf{Z}$.

B.6) Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer, le cas échéant, leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

B.7) Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, vérifier que $A^2 = A$. Pour quels vecteurs (colonnes) X a-t-on $AX = 0$?

B. 8) Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'ils sont orthogonaux. Trouver un troisième vecteur e_3 non nul et orthogonal à e_1 et e_2. Soit A la matrice 3×3 dont les colonnes sont les trois vecteurs e_1, e_2, e_3. Calculer $A\,{}^tA$ et ${}^tAA$. Qu'observez-vous ?

B.9) Déterminer l'ensemble des matrices A de taille 2×2 à coefficients réels telles que $A\,{}^tA = I_2$.

B.10) (Quaternions) On note dans cet exercice $\mathbf{1}$ la matrice identité de taille 2×2. On pose également

$$I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier les formules $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$ et $KI = -IK = J$. Montrer également que, si $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, on a

$$(a\mathbf{1} + bI + cJ + dK)(a\mathbf{1} - bI - cJ - dK) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}$$

En déduire que si la matrice $M = a\mathbf{1} + bI + cJ + dK$ n'est pas nulle, elle est inversible.

C) ESPACES VECTORIELS : dimension, base.

C.1) Soit E le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ défini par les équations:

$$x + 2\,y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2z + \lambda\, t = \mu\ ,$$

où λ et μ sont des paramètres réels. Répondre en fonction de ces paramètres aux demandes qui suivent.

(a) S'agit-il d'un sous-espace vectoriel?

(b) Lorsqu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel, donner une base de ce sous-espace.

(c) Compléter cette base en une base de $\mathbf{R}^4$.

(d) Les réponses aux questions (b) et (c) sont-elles uniques?

C.2) Trouver la dimension, des bases et des équations pour les espaces vectoriels $E \cap F$ et $E + F$.

(a) Pour $E := \langle (1,2,1), (1,1,-1), (1,3,3) \rangle$ et $F := \langle (1,2,2), (2,3,-1), (1,3,-3) \rangle$, dans $\mathbf{R}^3$.

(b) Dans $\mathbf{R}^5$, avec $E := \langle (-1,6,4,7,-2), (2,3,0,5,-2), (-3,6,5,6,-5) \rangle$ et $F := \langle (1,1,2,1,-1), (0,-2,0,-1,-5), (2,0,2,1,-3) \rangle$.

C.3) Soit E l'espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,0,2,3)$ et $(1,1,3,2)$.

(a) Donner un système minimal d'équations linéaires qui définissent E.

(b) Quelle est la dimension de l'espace défini par l'une de ces équations?

(c) La réponse à la question (a) est-elle unique?

(d) Donner un exemple d'application linéaire f dont E est le noyau.

(e) Donner un exemple d'application linéaire g dont E est l'image.

C.4) Dans $\mathbf{R}^4$ on considère la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et

$$\mathcal{B} := \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^4$. Ecrire les matrices de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ et inversement.

(b) Calculer les coordonnées de $v = (1, -1, 3, -2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Calculer le vecteur w dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $-2, 0, 4, 1$.

C.5) Soient U, V deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $\dim U + \dim V > \dim E$ alors $U \cap V \neq \{0\}$.

D) APPLICATIONS LINÉAIRES

D.1) On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y, z) \end{array}$$

On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}_2$ celle de $\mathbf{R}^2$; on définit les ensembles $\mathcal{B}_3 := \{(1, 2), (-1, 1)\}$ et $\mathcal{B}_4 := \{(1, 0, -1), (4, 0, 3), (1, 1, 0)\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_4$ sont des bases de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ respectivement.

(b) Déterminer la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_3$, de $\mathcal{B}_3$ vers $\mathcal{B}_1$, de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_4$ et de $\mathcal{B}_4$ vers $\mathcal{B}_2$.

(c) Déterminer la matrice de f dans les bases de $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.

(d) Déterminer la matrice de f dans les bases de $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_3$.

D.2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de f

(b) Montrer que $\mathbf{R}^3$ est somme directe du noyau et de l'image.

(c) Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathrm{im}(f)$, comment s'écrit la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$?

D.3) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$.
En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.