L1, MP1, Université Denis Diderot PARIS 7, année 2008-2009

EXERCICES. Feuille n^0 3, FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE, suites, continuité, dérivabilité, formule de Taylor et accroissements finis

A – Suites et nombres réels

Exercice A.1. On définit les deux suites

$$u_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

a) Vérifier soigneusement que u_n est croissante et majorée, que v_n est décroissante et minorée et que $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.
b) En déduire que u_n et v_n convergent vers une même limite qu'on notera e (Nota : il s'agit en fait de la base du logarithme néperien).
c) Démontrer l'inégalité (pour tout $n \geq 1$) :

$$u_n < e < u_n + \frac{1}{n\,n!}$$

On se propose de démontrer par l'absurde que e n'est pas un nombre rationnel.
d) Vérifier qu'il existe un entier a_n tel que $u_n = a_n/n!$ et qu'on a l'inégalité $a_n < n!e < a_n + 1$.
e) Supposons que $e = m/n$; en observant qu'alors $n!e$ serait entier, déduire une contradiction.

Exercice A.2. On définit la suite (pour $n \geq 1$)

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

On admet l'inégalité $\frac{x}{x+1} \leq \log(1+x)$ pour $x \geq 0$ (voir exercice C.2). Montrer que la suite u_n est décroissante et minorée et par conséquent convergente. [Nota : la limite s'appelle la constante d'Euler.]

B – Fonctions continues

Exercice B.1. On définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ par $f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$.
a) Montrer que $f_n(x)$ est une fonction continue et strictement croissante (c'est-à-dire que $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$; en déduire qu'il existe un unique nombre réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. [Indication : pour l'existence, on utilisera le théorème des valeurs intermédiaires.]
b) Montrer que pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $f_n(x)$ est décroissante, c'est-à-dire $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que x_n est croissante et convergente (on appellera ℓ la limite).
c) Vérifier que $f_n(3/4) > 0$ donc $x_n < 3/4$ et donc $\lim_{n\to\infty} x_n^n = 0$. Conclure que $\ell^2 + \ell - 1 = 0$ et ainsi que ℓ est égal à : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice B.2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue.
Posons $g(x) = f(x) - x$. Montrer que g est continue, que $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$ et conclure qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$ ou encore $f(x_0) = x_0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice B.3. a) Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ des réels deux à deux distincts; combien de zéros possède la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}?$$

Indication: on étudiera le sens de variation, la continuité sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

C – Fonctions dérivables

Exercice C.1.
a) Montrer que $\forall x > -1$, on a $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
b) Montrer que pour $x \in [0, \pi/2[$ on a $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$.
c) Montrer que pour $x \in [0,1]$, on a $\sqrt{1-x} \leq 1 - \dfrac{x}{2}$.

Problèmes de minima/maxima.

Exercice C.2. Soient encore $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts; pour quelle valeur de x la fonction suivante atteint-elle un minimum ?

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2.$$

Exercice C.3. Dans un cinéma, le projectionniste place le projecteur à une distance x en direction du centre d'un écran de largeur E; quelle distance maximisera l'intensité de l'éclairage au bord de l'écran sachant que l'intensité est proportionnelle au cosinus de l'angle d'incidence et inversement proportionnel au carré de la distance entre la source et le point illuminé.

Exercice C.4. Parmi les rectangles d'aire A, quel est celui de périmètre minimal ? Existe-t-il un rectangle d'aire A et de périmètre maximal ?

Exercice C.5. *La fonction* $\operatorname{Arctg}(x)$. On rappelle que la fonction $\operatorname{Arctg}(x)$ est dérivable en tout point $x \in \mathbf{R}$ et

$$(\operatorname{Arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

a) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par:

$$f(x) = \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$$

est constante sur chaque intervalle ouvert de $\mathbf{R}^*$; calculer la constante pour $x \in]0, +\infty[$ puis pour $x \in]-\infty, 0[$.
b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $x, y \in \mathbf{R}$ on a

$$|\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y| \leq |x - y| .$$

c) Démontrer la formule

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} y = \operatorname{Arctg} \frac{x+y}{1-xy} + k\pi$$

où $k \in \mathbf{Z}$ est un entier que l'on déterminera. [Indication: On pourra dériver par rapport à x les fonctions $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} y$ et $\operatorname{Arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ et prendre des valeurs pour déterminer les constantes]
d) Montrer (en faisant attention aux signes) que

$$\sin(\operatorname{Arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\operatorname{Arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

D – Formule de Taylor

Exercice D.1. a) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 3 pour la fonction $\sin(x)$ en 0 et en déduire

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}.$$

b) Par un calcul analogue montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Exercice D.2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on ait $|f(x)| \leq A$ et $|f''(x)| \leq B$.
a) Ecrire la formule de Taylor en 0 à l'ordre 2 pour x puis pour $-x$. En déduire une égalité de la forme

$$2xf'(0) = f(x) - f(-x) - \frac{x^2}{2}(f''(c_1) - f''(c_2)).$$

b) En déduire l'inégalité

$$|f'(0) \leq \frac{A}{x} + \frac{xB}{2}$$

En optimisant le choix de x, conclure que

$$|f'(0)| \leq \sqrt{2AB}.$$

Exercice D.3. soit $a > 0$ un réel, $f :] - a, a[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$.
a) En utilisant la définition de la dérivée, montrer l'existence d'une fonction ε : $h \mapsto \varepsilon(h)$, définie dans $] - a, +a[\setminus\{0\}$, telle que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, et vérifiant

$$f(h) = hf'(0) + h\,\varepsilon(h)$$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

c) En appliquant cela à la fonction $\log(1 + x)$, en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

E – Compléments : fonctions convexes

Exercice E.1. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ est dite *convexe* si pour tout $a, b \in I^2$, avec $a < b$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f(ta + (1 - tb) \leq tfa) + (1 - t)f(b)$$

a) Représenter graphiquement la propriété de convexité d'une fonction.
b) Montrer que la somme de deux fonctions convexes et le produit d'une fonction convexe par un scalaire positif sont des fonctions convexes; si f est convexe sur I et g est convexe croissante sur un intervalle ouvert $J \supset f(I)$, alors $g \circ f$ est convexe sur I.
c) Montrer que si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction deux fois dérivable dans I et si la dérivée seconde est positive, alors f est convexe.
Indication : On pourra introduire la fonction $g(t) = f(ta + (1 - t)b) - tfa) - (1 - t)f(b)$ et dresser, à l'aide du théorème des accroissements finis, son tableau de variations et conclure que $g(t) \leq 0$ pour $t \in [0, 1]$.
d) Soit f une fonction convexe et dérivable sur I, soit $x_0 \in I$; soit $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ l'équation de la tangente, montrer que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
e) *(formule de Jensen)* Montrer que si f est convexe sur I, pour toute famille finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de points de I et de réels positifs $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ on a:

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

Exercice E.2. Montrer que la fonction $-\log x$ est convexe et en déduire, pour toute famille finie $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{R}^{+*}$ de réels strictement positifs, l'inégalité :

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

[Indication : en remplaçant "x_i" par "$1/x_i$", on se ramène a démontrer l'une seule des inégalités.]