L1, MP1, Université Denis Diderot PARIS 7, année 2008-2009

EXERCICES. Feuille n^0 4, Formule de Taylor, développements limités

A – Dérivées et formule de Taylor

Exercice A.1.

a) Soit f une fonction paire (respectivement impaire), montrer que f' est une fonction impaire (respectivement paire).
Que pouvez-vous dire de la dérivée n-ième $f^{(n)}(x)$?

b) On suppose maintenant que f admet une période T (c'est-à-dire que $f(x+T) = f(x)$); montrer que les dérivées successives de f sont également périodiques. Que pouvez-vous conclure sur $f(x)$ en sachant que $f'(x+T) = f(x)$?

Exercice A.2. Soit $f(x) = P(x)e^x$.

a) Montrer par récurrence sur n la formule :

$$f^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} \right) e^x$$

b) Déterminer la dérivée n-ième de $f(x) = \cos(x)e^x$; même question avec la fonction $g(x) = x^3 e^x$.

Exercice A.3. (*Une fonction très particulière*). On étudie la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ et prolongée par $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbf{R}^*$.

c) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbf{R}^*$, il existe un polynôme P_n de degré $2(n-1)$ tel que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}.$$

d) Montrer que pour tout n on a :

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

e) (question plus délicate) En déduire que f est indéfiniment dérivable en 0 et que pour tout n on a$f^{(n)}(0) = 0$.

B – Développements limités

Exercice B.1. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}$, $\quad \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$, $\quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^3}{1-x^7}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-6}-x\right)$, $\quad \lim_{x\to 0} \sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$, $\quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}$

(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{4\cos^2 x - 3}$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$, $\quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^3}{1-x^7}$

Exercice B.2. Trouver un développement limité (D. L.) au voisinage de 0 à l'ordre précisé pour chaque fonction :

(a) $\operatorname{tg} x$ à l'ordre 8; tg^2 à l'ordre 7.

(b) $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 7; $\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$ à l'ordre 7.

(c) $\frac{\log(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4; $\log\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ à l'ordre 7; $\log\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)$ à l'ordre 4.

Exercice B.3. Déterminer le paramètre a de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt[3]{x^3+ax^2+1}\right)=0.$$

Exercice B.3. À l'aide d'un D. L. (à un ordre approprié que l'on déterminera) calculer les limites suivantes

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos x}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{1-\sqrt{1-x^2}-\sin^2 x/2}$.

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2x}{x(1-\cos 3x)}$.

C – Extrema de fonctions dérivables

Exercice C.1. Calculer les extrema des fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$, $\quad f(x)=\frac{x^4+Ax^2+1}{(x^2+1)^2}$ (selon la valeur du paramètre $A\in\mathbf{R}$.)

Exercice C.2.

Soit $f(x)=(3x^2-4x+2)e^{-x^2}$.

(a) Montrer que la dérivée de $f(x)$ s'annule en $x=1$ et $x=-2/3$.

(b) Déterminer au voisinage de ces deux points la position du graphe $y=f(x)$ par rapport à la tangente et en particulier si $f(x)$ admet un extremum local.

(c) Montrer que $f(x)$ est bornée et déterminer ses extrema.