L1, Université Denis Diderot PARIS 7, année 2008-2009

Cours de mathématiques MP1

EXERCICES. Feuille de révision.

Cette première feuille est destinée au travail personnel des étudiant(e)s. Son but est d'effectuer un certain nombre de révisions et de travailler calcul, raisonnement et rédaction mathématiques.

A. Langage, raisonnement et quantificateurs.

A.1) Le capitaine a deux fois l'âge que son épouse avait lorsqu'il avait l'âge qu'elle a. A eux deux ils totalisent 84 ans. Quel est l'âge du capitaine ?

A.2) Il y a 18 chaussettes noires et 12 chaussettes rouges. Si on les choisit au hasard, combien faut-il en prendre pour être sûr d'obtenir une paire assortie ? On les range au hasard dans n tiroirs, peut-on être sûr qu'un tiroir contiendra une paire assortie ?

A.3) A l'aide de tables de vérité montrer les assertions suivantes (oú A et B désignent des propositions) dites *lois de Morgan* :

$$\text{non}(A \text{ et } B) \Leftrightarrow \text{non}(A) \text{ ou non}(B)\ ; \qquad \text{non}(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow \text{non}(A) \text{ et non}(B)$$

Qu'en est-il de l'assertion : $\quad \text{non}(A) \Rightarrow\ (A \Rightarrow B)$?

A.4) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel [Comprendre l'énoncé comme "l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle" ou encore "l'équation $a^2 = 2b^2$ avec $a, b \in \mathbf{N}^*$ n'a pas de solution".]

A.5) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $a \in \mathbf{R}$. Ecrire la négation de l'énoncé :

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n > N,\ |u_n - a| < \epsilon.$$

Traduire en "langage usuel" l'énoncé et son contraire. L'énoncé est-il vrai pour la suite $u_n = (-1)^n$ et $a = 1$?

B. Ensembles et fonctions.

B.1) On rappelle que $A\Delta B := (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ (différence symétrique). Comparer les ensembles (inclusion ? égalité ?) :

$$A\,\Delta\,(B\cap C) \text{ et } (A\Delta B)\cap(A\Delta C)\,, \quad \text{puis} \quad A\,\Delta\,(B\cup C) \text{ et } (A\Delta B)\cup(A\Delta C)\,.$$

Montrer l'égalité :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B)) \cup (B \setminus C)) \cup (C \setminus A)) \cup (A \cap B \cap C)).$$

B.2) Soit une fonction $f : E \to F$; soit $A, B \subset F$, montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Si maintenant $C, D \subset E$ est-il toujours vrai que $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ et $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$?

B.3) L'application $f(x) := \exp(x)$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ est-elle injective, surjective, bijective? Même question avec f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}_+^*$?

B.4*) (Fonction caractéristique) Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E, on définit l'application χ_A par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Montrer que l'application $A \mapsto \chi_A$ de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ est une bijection.
Calculer $\chi_{A \cap B}$, $\chi_{A \cup B}$, $\chi_{A \Delta B}$ et $\chi_{E \setminus A}$ en termes de χ_A et χ_B.

B.5*) (théorème de Cantor) Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$. En introduisant l'ensemble $A := \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut pas être surjective. En déduire que pour tout entier naturel n on a $n < 2^n$ (on peut aussi donner une démonstration par récurrence de cette inégalité).

B.6*) On pose $f(n, m) = \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)+m$. Montrer que $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une bijection. [Indication : on pourra vérifier et utiliser que $x \mapsto \frac{1}{2}x(x+1)$ est strictement croissante de 0 á $+\infty$.]

C. Quelques formules.

C.1) On note le nombre de parties avec k éléments choisis parmi n éléments ainsi :

$$C_n^k \qquad \text{ou} \qquad \binom{n}{k}$$

Ce nombre vaut $n!/k!(n-k)!$. On rappelle la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n 2^{n-1}$.

C.2) Soit λ, a_i, b_j des nombres réels ou complexes. Vérifier

$$\sum_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} a_i b_j = \left(\sum_{1 \le i \le m} a_i \right) \left(\sum_{1 \le j \le n} b_j \right)$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda a_i) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right), \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{m}(\lambda a_i) = \lambda^m\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right).$$

C.3) Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tels que $c(ad - bc) \neq 0$, vérifier que

$$\frac{ax+b}{cx+d} = u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du-b}{-cu+a} = x, \qquad \text{pour } x \in \mathbf{R} \setminus \{-d/c\} \text{ et } u \in \mathbf{R} \setminus \{a/c\}.$$

Conclure que l'application $f(x) := \frac{ax+b}{cx+d}$ est une bijection de $\mathbf{R} \setminus \{-d/c\}$ vers $\mathbf{R} \setminus \{a/c\}$. Quelle est la bijection réciproque? Que se passe-t-il lorsque $c = 0$ ou bien lorsque $ad - bc = 0$?

C.4) Résoudre les systèmes linéaires

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 4z = 5 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x + y + 3z + 2t = 1 \\ x + 2y + 4z + 3t = 5 \end{cases}$$

C.5) Résoudre les systèmes d'équations (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) :

$$(1) \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + x + m = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (2) \begin{cases} x^2 + yx + y^2 + x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

D. Inégalités.

D.1) Montrer que si $a, c \geq 0$ et $b^2 \leq 4ac$ alors on a

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad ax^2 + bxy + cy^2 \geq 0.$$

Formuler et démontrer un énoncé réciproque.

D.2) Est-il vrai que, pour tout x, y, z réels on a

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx\,?$$

D.3) Soit un entier $n \geq 1$ pour quelles valeurs de k a-t-on $\binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k}$?

D.4) Est-il vrai que

$$\sup_{x \in [0,1/2]} \frac{1}{1-x} \leq \inf_{x \in [2,3]} \frac{2x+1}{x-1}?$$

D.5) Soient a, b, c des réels positifs, montrer que :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

D.6) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$ et en déduire que $S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ n'est pas bornée.

E. Principe de récurrence.

E.1) On définit $f(n,m) = \mathrm{card}\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{N}^n \mid x_1+\dots+x_n = m\}$ et $g(n,m) = \mathrm{card}\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{N}^n \mid x_1+\dots+x_n \leq m\}$. Montrer que $g(n,m) = g(n,m-1) + f(n,m)$ (pour $m,n \geq 1$), que $f(n,m) = g(n-1,m)$ (pour $n \geq 2$, $m \geq 0$) et enfin que $g(n,0) = f(1,m) = 1$ (pour $n \geq 1$ et $m \geq 0$). En déduire les formules

$$f(n,m) = C^m_{n+m-1} = \binom{n+m-1}{m} \qquad \text{et} \qquad g(n,m) = C^m_{n+m} = \binom{n+m}{m}.$$

E.2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, pour n entier positif, on a :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

E.3) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $n+1 \leq 2^n$ (Cf exercice B.4). Pour quelles valeurs de n a-t-on $n^2 \leq 2^n$?

E.4) Vérifier que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ et en déduire le calcul de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

E.5) Montrer que $\sum_{j=1}^n j = n(n+1)/2$ et $\sum_{j=1}^n j^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. En déduire le calcul de :

$$S_n := \sum_{j=n}^{2n} j^2, \qquad \text{et} \qquad T_n := \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impair}}}^{2n+1} j^2.$$