Calcul Différentiel et Intégral
Cours de MC2 — 2006
Chapitres 1 à 9.

René Guitart

v. 25/04/06

Programme de MC1 et MC2

MC1

Nombres complexes.

Rappels et compléments de géométrie affine euclidienne en dimension 2 et 3.

Élément d'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: équations linéaires, calcul matriciel.

Fonctions réelles d'une variable réelle : dérivées, fonctions usuelles, développements limités.

Courbes paramétrées.

MC2

Fonction de plusieurs variables à valeurs réelles, gradient, tangente à une courbe, plan tangent à une surface. Calcul d'extrema à deux variables.

Calcul intégral (on admet l'existence et les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux). Exemples de calculs approchés d'intégrale.

Équation différentielles: équations du premier ordre linéaires réelles ou complexes, équations réelles à variables séparées; équations linéaires à coefficients constants d'ordre 2.

COURS 1 (25/01/06) — **Étude des courbes planes d'équation explicite $y = f(x)$: continuité, dérivation et formes indéterminées, formules de Taylor et développement limité et asymptotique, contacts, jets, courbure, asymptote.**

1.1. Continuité et dérivation, tangente, et levées de formes indéterminées.

Rappel sur les limites et fonctions continues — Rappelons sans preuves les propriétés fondamentales suivantes.

Concernant les limites de fonctions, on utilisera les règles $\lim_{x\to a}(f(x)) + \lim_{x\to a}(g(x)) = \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$, $\lim_{x\to a}(f(x)).\lim_{x\to a}(g(x)) = \lim_{x\to a}(f(x).g(x))$ etc., avec les restrictions connues pour les valeurs 0 et ∞.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *continue* en $u \in [a, b]$ si $\lim_{[a,b]\ni x\to u} f(x)$ existe et vaut $f(u)$, ce que l'on écrit :

$$\lim_{[a,b]\ni x\to u} f(x) = f(u),$$

ou encore

$$\lim_{[a,b]\ni u+h, h\to 0} \big(f(u + h) - f(u)\big) = 0.$$

On dit que f est *continue sur* $[a, b]$ si et seulement si elle est continue en tous les points de $[a, b]$, y compris donc aux extrémités a et b. On rappelle qu'alors la fonction est *bornée*, c'est-à-dire qu'il existe $b, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [a, b]$ on ait $b \leq f(x) \leq B$. En fait il existe une plus grande valeur possible m pour b, et une plus petite M pour B, lesquelles sont nommées *borne inférieure borne supérieure* de f sur $[a, b]$. De plus *ces bornes m et M sont atteintes*, c'est-à-dire qu'il existe au moins un point $p \in [a, b]$ tel que $f(p) = m$ et au moins un point $q \in [a, b]$ tel que $f(q) = M$. Enfin, *toute valeur intermédiaire $m < y < M$ est atteinte*, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

On utilisera aussi la propriété suivante : si $f : [a, b] \to [c, d]$ est une bijection continue monotone, alors la bijection inverse $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ est aussi une bijection continue monotone.

Définition de la dérivée et du développement limité d'ordre 1 — Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *dérivable* en $u \in [a, b]$ si $\lim_{[a,b]\ni u+h,h\to 0} \left(\frac{f(u+h)-f(u)}{h}\right)$ existe dans $\mathbb{R}$, et cette limite est notée

$$\lim_{[a,b]\ni u+h,h\to 0} \left(\frac{f(u + h) - f(u)}{h}\right) = f'(u),$$

et nommée la *dérivée* de f en u dans $[a, b]$. Donc $f'(u) \in \mathbb{R}$ est la *dérivée* de f en $u \in [a, b]$ si et seulement si $\lim_{[a,b]\ni u+h,h\to 0} \left(\frac{f(u+h)-f(u)}{h} - f'(u)\right) = 0$, soit $\lim_{[a,b]\ni u+h,h\to 0} \left(\frac{f(u+h)-f(u)-hf'(u)}{h}\right) = 0$. En posant $\varepsilon(h) = \frac{f(u+h)-f(u)-hf'(u)}{h}$, on a le *développement limité de f en $u \in [a, b]$ à l'ordre* 1, soit :

$$f(u + h) = f(u) + hf'(u) + h\varepsilon(h), \qquad \lim_{[a,b]\ni u+h,h\to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

ce qui caractérise le fait que f soit dérivable en u et de dérivée le nombre $f'(u)$. De là résulte évidemment :

Continuité des fonctions dérivables —*Si f est dérivable en u alors f est continue en u.*

Dérivation des sommes, produits, et composés — *1 — Si f et g sont dérivables en $u \in [a, b]$, alors $f + g$ et $f \times g$ aussi, et l'on a*

$$(f + g)'(u) = f'(u) + g'(u), \qquad (f \times g)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u).$$

2 — Si $g : [c, d] \to [a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont dérivables, g en $v \in [c, d]$, et f en $u = g(v)$, alors la fonction composée $h = f \circ g$ est dérivable en v, et l'on a :

$$h'(v) = (f \circ g)'(v) = f'(g(v))g'(v).$$

En effet si elle existe la dérivée $(f + g)'(u)$ vaut $\lim_{h\to 0} \left(\frac{(f+g)(u+h)-(f+g)(u)}{h}\right)$, soit $\lim_{h\to 0} \left(\frac{(f(u+h)+g(u+h))-(f(u)+g(u))}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{(f(u+h)-f(u)}{h} + \frac{g(u+h)-g(u)}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(u+h)-f(u)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(u+h)-g(u)}{h} = f'(u) + g'(u)$.

Puis on a $\lim_{h\to 0} \left(\frac{(f\times g)(u+h)-(f\times g)(u)}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(u+h)g(u+h)-f(u)g(u)}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(u+h)g(u+h)-f(u)g(u+h)+f(u)g(u+h)-f(u)g(u)}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\left(\frac{f(u+h)-f(u)}{h}\right)g(u + h)\right) + f(u) \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(u+h)-g(u)}{h}\right) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$.

Enfin on a $\lim_{k\to 0} \left(\frac{(f\circ g)(v+k)-(f\circ g)(v)}{k}\right) = \lim_{k\to 0} \left(\frac{f(g(v+k))-f(g(v))}{k}\right) = \lim_{k\to 0} \left(\frac{f(g(v+k))-f(g(v))}{g(v+k)-g(v)} \frac{g(v+k))-g(v)}{k}\right)$, autrement dit $\lim_{k\to 0} \left(\frac{f(g(v+k))-f(g(v))}{g(v+k)-g(v)}\right) \lim_{k\to 0} \left(\frac{g(v+k))-g(v)}{k}\right)$. Le second terme du second membre vaut $g'(v)$, quant au premier il s'écrit encore $\lim_{k\to 0} \frac{f\left(g(v)+(g(v+k)-g(v))\right)-f\left(g(v)\right)}{g(v+k)-g(v)}$, et en posant $l = g(v+k) - g(v)$ on a $\lim_{k\to} l = 0$, si bien que $\lim_{k\to 0} \frac{f\left(g(v)+(g(v+k)-g(v))\right)-f\left(g(v)\right)}{g(v+k)-g(v)} = \lim_{l\to 0} \frac{f(g(v)+l)-f(g(v))}{l} = f'(g(v))$.

Dérivée des inverses et quotients — *La fonction $i(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $u \neq 0$, et sa dérivée y est $i'(u) = -\frac{1}{u^2}$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est non nulle en u est dérivable en u, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en u et on a :*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(u) = -\frac{f'(u)}{f(u)^2}.$$

Si de plus $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est non nulle en u, continue et dérivable en u,alors $\frac{g}{f}$ est dérivable en u, et l'on a

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(u) = \frac{g'(u)f(u) - g(u)f'(u)}{f(u)^2}.$$

Le troisième point résulte du second et de la dérivation d'un produit. Le deuxième point résulte du premier et de la dérivation de la fonction composée $i \circ f$. Et enfin $\lim_{h\to 0} \left(\frac{\frac{1}{u+h} - \frac{1}{u}}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\frac{1}{u+h} - \frac{1}{u}}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(u+h)u} = \frac{-1}{u^2}$.

Dérivée des fonctions réciproques — *Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ une bijection monotone continue, de fonction réciproque $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$, vérifiant donc $f^{-1}(x) = y$ si et seulement si $x = f(y)$, et qui est donc aussi monotone continue. Alors si la fonction f est dérivable de dérivée non nulle $f'(u)$ en u, alors f^{-1} est dérivable au point $v = f(u)$, de dérivée*

$$\left(f^{-1}\right)'(v) = \frac{1}{f'(u)}.$$

En effet par le fait que f^{-1} est continue on a, si x_1 et y_1 sont liés par $y_1 = f(x_1)$, $x_1 \to u$ si et seulement si $y_1 \to v$. On peut alors écrire $\lim_{y_1\to v} \frac{x_1-u}{y_1-v} = \lim_{x_1\to u} \frac{x_1-u}{y_1-v} = \lim_{x_1\to u} \left(\frac{y_1-v}{x_1-u}\right)^{-1}$.

Tangente et variation locale — Soit $\Gamma_f = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in [a,b]\}$ le *graphe* de f, et sur ce graphe, le point $M(u) = (u, f(u))$, le point $M(u+h) = (u+h, f(u+h))$, et la corde passant par ces deux points, d'équation $y = Ax + B$, avec donc $f(u) = Au + B$ et $f(u+h) = A(u+h) + B$, d'où l'on tire $A = \frac{f(u+h)-f(u)}{h}$ puis $B = f(u) - Au$. Lorsque h tend vers 0, alors A tend vers $f'(u)$ et donc B tend vers $f(u) - f'(u)u$, et alors la corde tend vers une position limite $T_{M(u)}\Gamma$ que l'on nomme la *tangente* à Γ_f en $M(u) = (u, f(u))$: cette tangente à donc pour équation $y = f'(u)x + (f(u) - f'(u)u)$, ou encore : $y = f(u) + f'(u)(x-u)$. Le point sur $T_{M(u)}\Gamma$ d'abscisse $u+h$ est donc le point $\bar{M}(u+h) = (u+h, f(u)+f'(u)h)$, et l'écart vertical en $u+h$ entre la courbe Γ et sa tangente en u, soit le segment $M(u+h)\bar{M}(u+h)$, vaut $f(u+h) - (f(u) + f'(u)h) = h\varepsilon(h)$: voilà le sens géométrique du reste $h\varepsilon(h)$. Si $f'(u) > 0$, alors quand x augmente de u à $u+h$ ($h \geq 0$) le point correspondant sur $T_{M(u)}\Gamma$ monte de $f'(u)h$, tandis que le point correspondant sur Γ_f varie de $f(u+h) - f(u) = f'(u)h + h\varepsilon(h)$: si h est suffisamment petit, $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 avec h sera plus petit en valeur absolue que $\frac{1}{2}f'(u) > 0$, et alors $f(u+h) - f(u)$ sera supérieur à $\frac{1}{2}f'(u)h$, et donc positif : on conclut que si $f'(u) > 0$ alors pour $h > 0$ assez petit on a $f(u+h) > f(u)$. De même, si $f'(u) > 0$ alors pour $h < 0$ assez petit en valeur absolue, on a $f(u+h) < f(u)$. Pour $h > 0$ assez petit on a donc $f(u-h) < f(u) < f(u+h)$ si $f'(u) > 0$, et on a $f(u-h) > f(u) > f(u+h)$ si $f'(u) < 0$. On dira ainsi : *si la dérivée est positive il y a croissance locale, si la dérivée est négative, il y a décroissante locale*. Ou encore : *si la tangente est inclinée, localement la fonction varie dans le même sens que ladite tangente*. On observe que $f'(u) = 0$ si et seulement si $T_{M(u)}\Gamma$ est horizontale. Cela aura lieu obligatoirement si au point u la fonction atteint un maximum ou un minimum local. Par exemple si en u on a un maximum local, c'est-à-dire si $f(u \pm h) \leq f(u)$ pour h assez petit, on ne peut avoir ni $f'(u) > 0$ (car alors $f(u+h) > f(u)$), ni $f'(u) < 0$ (car alors $f(u-h) > f(u)$. Ainsi *en un extremum local u où l'on suppose que $f'(u)$ existe, alors cette dérivée est nulle, la tangente est horizontale*.

Ces premières indications sur le *sens géométrique de la dérivée* sont indispensables pour pouvoir comprendre les théorèmes d'acroissements finis qui suivent.

Fonction dérivable sur un intervalle — On dit que f est *dérivable sur* $]a,b[$ (resp. *sur* $[a,b]$) si et seulement si elle est dérivable en tous les points de $]a,b[$ (resp. $[a,b]$).

théorème de Rolle — *Si f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.*

Géométriquement le théorème est conforme à l'intuition naïve puisqu'il dit que si deux points du graphe Γ_f sont à la même hauteur, alors en un point entre eux au moins la tangente est horizontale, ce que l'on peut voir sur un dessin. Mais il faut le prouver. Et en effet, ou bien f est constante, et alors en tout point $x \in [a,b]$ on a $f'(c) = 0$, ou bien f n'est pas constante, par la continuité sur $[a,b]$ il existe un point p où f atteint son minimum m sur $[a,b]$ et un point q

où f atteint son maximum M. Comme $m < M$ et $f(a) = f(b)$ l'un des deux point p ou q est strictement entre a et b, et convient comme point c, puisqu'en ce point on a un extremum, donc a fortiori un extremum local.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $k(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$, on constate le

Théorème des accroissements finis, de Lagrange — *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),$$

et en posant $b - a = h$ et $c = a + \theta(b-a)$, on a donc un θ, $0 < \theta < 1$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta h)h.$$

Autrement dit, il existe un point $(c, f(c)) \in \Gamma_f$ où la tangente est parallèle à la corde passant par les extrémités $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Dérivée comme limite de dérivées, ou tangente comme position limite des tangentes voisines. — *1 — Soit une fonction continue sur $[a, a+k]$, $f : [a, a+k] \to \mathbb{R}$, avec f dérivable sur $]a, a+k[$ et telle que $\lim_{x\to a, x\geq a} f'(x)$ existe. Alors f admet une dérivée* à droite $f'^{+}(a) = \lim_{x\to a, x\geq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *au point a, et cette dérivée est la limite quand $x \to a^{+}$ de $f'(x)$:*

$$f'^{+}(a) = \lim_{x\to a, x\geq a} f'(x).$$

2-1 — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue dans $[a,b]$, et dérivable dans $]a,b[$ sauf peut-être en un certain point $u \in]a,b[$. Alors f est dérivable en u si $\lim_{x\to u} f'(x)$ existe, et alors $f'(u) = \lim_{x\to u} f'(x)$. Ainsi la tangente en u se trouve, dans ces hypothèses, comme position limite des tangentes aux points voisins.

2-2 — Mais la dérivée (ou la tangente) en u peut exister sans être la limite des dérivées (ou tangentes) voisines, lorsque ces limites $\lim_{x\to a, x\geq a} f'(x)$ ou $\lim_{x\to a, x\leq a} f'(x)$ n'existent pas.

Le premier point résulte de la formule des accroissements finis : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi), \quad a < \xi < x$. Le deuxième point résulte du premier, et de ce que $f'(u)$ existe si et seulement si les dérivées à gauche et à droite $f'^{-}(u)$ et $f'^{+}(u)$ existent et sont égales. Le dernier point se vérifie avec l'exemple $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, continue et dérivable partout, de dérivée $f'(0) = 0$ en 0, et de dérivée $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ aux point $x \neq 0$: quand $x \to 0$, $f'(x)$ n'a pas de limite parce que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'en a pas.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $k(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)g(x)$, on a :

Théorème des accroissements finis généralisé, de Cauchy — *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et si g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors il existe un $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ce théorème est utile pour lever des indéterminations de limites de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, car il permet de retrouver la règle dite "de l'Hospital" (de Guillaume de l'Hospital, et en fait due à jean Bernouilli, en 1694). À vrai dire, de l'Hospital — ou Bernoulli — démontrait simplement la règle qu'en un point u où f et g sont dérivables et nulles, mais de dérivée non nulle alors on a $\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{\lim_{h\to 0}\frac{f(u+h)-f(u)}{h}}{\lim_{h\to 0}\frac{g(u+h)-g(u)}{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(u+h)-f(u)}{h}}{\frac{g(u+h)-g(u)}{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u+h)-f(u)}{g(u+h)-g(u)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u+h)}{g(u+h)}$. Notamment étaient utilisées les dérivées au point u (en fait plutôt que les dérivées, de l'Hospital, leibnizien, écrit ses calculs avec les "différences" infimes ou différentielles). Ce qu'on appelle donc aujourd'hui "règle de l'Hospital", différent et plus puissant, est pour trouver $\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ si f et g sont comme dans le théorème des accroissements finis généralisés. Notamment, on n'y utilise pas la dérivation en u mais en des points c voisins de u et distincts de u. On a :

Règle de l'Hospital $\frac{0}{0}$ en un point fini a — *Soient $f, g :]a, a+k] \to \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a, a+k[$, g' ne s'annulant pas, et telles que $\lim_{a<x, x\to a} f(x) = \lim_{a<x, x\to a} g(x) = 0$. Si $\lim_{a<x, x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{a<x, x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.*

En effet, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout x, si $a < x < a + \eta$ on ait $l - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \epsilon$. Alors la formule des accroissements finis généralisée appliquée entre les valeurs x_1 et x, avec $a < x < x_1 < a + \eta$ donne $p = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, pour un $\xi \in]x, x_1[$, avec donc $l - \epsilon < p < l + \epsilon$. En laissant x_1 fixé, on a, puisque $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0, $\lim_{x\to a} p = \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$, et par suite, pour $x_1 < a + \eta$ on a $l - \epsilon \leq \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \leq l + \epsilon$, ce qui signifie que $\lim_{x_1\to +\infty} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = l$.

Règle de l'Hospital $\frac{\infty}{\infty}$ en un point fini a — *Soient $f, g :]a, a+k] \to \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a, a+k[$, g' ne s'annulant pas, et telles que $\lim_{a<x, x\to a} f(x) = \lim_{a<x, x\to a} g(x) = +\infty$. Si $\lim_{a<x, x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{a<x, x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.*

En effet, considérant $a < x < x_1 < a+k$, la formule de Cauchy entre x et x_1 donne $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left[\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}\right]$, avec $a < x < c < x_1$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\eta(\epsilon)$ tel que pour tout x_1, $a < x_1 < a+\eta(\epsilon)$ et tout x et c tels que $a < x < c < x_1$, on ait $l-\epsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < l+\epsilon$. Et, x_1 étant alors fixé ainsi avec $a < x_1 < a+\eta(\epsilon)$, il existe pour tout ν avec $1 > \nu > 0$ un $\lambda(x_1,\nu)$ tel que pour tout x avec $x < x_1$ et $a < x < a+\lambda(x_1,\nu)$ on ait $0 < 1-\nu < \frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}} < 1+\nu$. On a alors, si donc $a < x_1 < a+\eta(\epsilon)$ et $x < x_1$ et $a < x < a+\lambda(x_1,\nu)$, soit donc si $a < x < a+\delta(\epsilon,\nu)$, avec $\delta(\epsilon,\nu) = \inf(x_1-a, \lambda(x_1,\nu))$, l'encadrement $(l-\epsilon)(1-\nu) < \frac{f(x)}{g(x)} < (l+\epsilon)(1+\nu)$, soit $l-(\epsilon+l\nu-\epsilon\nu) < \frac{f(x)}{g(x)} < l+(\epsilon+l\nu+\epsilon\nu)$. Pour montrer que $l-\theta < \frac{f(x)}{g(x)} < l+\theta$ dès que $a < xa+\rho$, pour un $\rho = \rho(\theta) > 0$, il suffit donc de prendre $\rho \leq \delta(\epsilon,\nu)$, en ayant pris ϵ et ν tels que $0 < \epsilon+l\nu-\epsilon\nu < \theta$ et $0 < \epsilon+l\nu+\epsilon\nu < \theta$. En prenant $\epsilon = \frac{1}{2}\theta$ et $\nu = (\frac{1}{2}\theta)^2$ on doit avoir $0 < \theta(\frac{1}{2}+\frac{l}{2}\theta-\frac{1}{8}\theta^2) < \theta$ et $0 < \theta(\frac{1}{2}+\frac{l}{2}\theta+\frac{1}{8}\theta^2) < \theta$, ce qui est vrai pour θ suffisamment petit.

Règle de l'Hospital $\frac{0}{0}$ au point $+\infty$ —*Soient* f, g :$]A,+\infty[$ *deux fonctions continues et dérivables,* g' *ne s'annulant pas, et telles que* $\lim_{,x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. *Si* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*, alors* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$*.*

Une première preuve est semblable à celle du cas d'une limite $\frac{0}{0}$ en un point fini a. En effet, par hypothèse, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un B tel que si $x > B$ alors $l-\epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l+\epsilon$. Alors la formule des accroissements finis généralisée appliquée entre les valeurs x_1 et x, $B < x_1 < x$, donne $p = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, pour un $\xi \in]x_1, x[$, avec donc $l-\epsilon < p < l+\epsilon$. En laissant x_1 fixé, on a, puisque $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0, $\lim_{x\to+\infty} p = \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$, et par suite, pour $x_1 > B$ on a $l-\epsilon \leq \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \leq l+\epsilon$, ce qui signifie que $\lim_{x_1\to+\infty}\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = l$.

Une autre preuve consiste à se ramener au cas d'un a fini en posant $F(x) = f(\frac{1}{x})$ et $G(x) = g(\frac{1}{x})$, et en appliquant le résultat en $a = 0$ pour $\frac{F(x)}{G(x)}$. Alors on a, en utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée, $\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}}{g'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}} = \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})}$, qui tend donc vers l lorsque x tend vers 0.

Et cette dernière preuve montre de même l'énoncé suivant à partir du cas fini $a = 0$.

Règle de l'Hospital $\frac{\infty}{\infty}$ au point $+\infty$ — *Soient* f, g :$]A,+\infty[$ *deux fonctions continues et dérivables,* g' *ne s'annulant pas, et telles que* $\lim_{,x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. *Si* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*, alors* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$*.*

Règle de l'Hospital : cas où la limite l vaut $+\infty$ ou $-\infty$ — *Si* f' *ne s'annule pas sur le domaine considéré, les règles ci-dessus, valides pour l fini, sont aussi valides pour* $l = +\infty$ *et pour* $l = -\infty$*,*

En effet si $l = \infty$, alors on échange les rôles de f et de g, et on est ramené au cas d'une limite $l = 0$.

On peut donc regrouper ces règles en une seule :

Règle de l'Hospital — *1 —- Supposons que f et g soient deux fonctions définies dans un voisinage V de u, où u est un point de* $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$*, mais pas nécessairement en ce point.*

2 — Supposons ensuite que l'on soit dans l'un des cas d'indétermination de la limite suivant :

- *Si* $x \to u$ *dans V, alors* $f(x) \to 0$ *et* $g(x) \to 0$*,*
- *Si* $x \to u$ *dans V, alors* $f(x) \to +\infty$ *ou* $f(x) \to -\infty$ *, et* $g(x) \to +\infty$ *ou* $g(x) \to -\infty$*.*

3 — Supposons encore que, dans V, sauf en u éventuellement, f et g soient dérivables, de dérivées non nulles.

4 — Supposons enfin que quand $x \to u$ *dans V, alors* $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l$*, avec* $l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$*.*

Alors, quand $x \to u$ *dans V,* $\frac{f(x)}{g(x)} \to l$*.*

5 — Pour savoir si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l$ *dans la règle (1 à 4) ci-dessus, on pourra éventuellement, en cas de forme indéterminée, appliquer à nouveau cette règle (1 à 4) aux fonctions* f' *et* g'*, si les conditions sont remplies pour, à la place de f et g,* f' *et* g'*, etc. Puis de même avec* f'' *et* g''*, etc.*

On a observer déjà que la "règle de l'Hospital" ci-avant utilise les dérivées (et dérivées successives éventuellement) non pas au point u, mais aux points voisins. On doit donc considérer comme une méthode distincte l'étude par les dérivées au point u même, soit l'usage des développements limités en u, notamment via la formule de Taylor que voici.

1.2. Dérivations successives, développements limités à l'ordre n, contacts, jets : formules de Taylor.

théorème de Rolle itéré — *Supposons que la fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *soit continue et soit n* fois dérivable dans $]a,b[$*, c'est-à-dire que f soit dérivable sur* $]a,b[$*, que* f' :$]a,b[\to\mathbb{R}$ *soit dérivable sur* $]a,b[$*, et de même pour* f''*, etc. jusqu'à* $f^{(n-1)}$:$]a,b[\to\mathbb{R}$*, dérivable sur* $]a,b[$*, de dérivée* $f^{(n)}$*. Si dans* $[a,b]$ *il existe* $n+1$ *points distincts* $a < x_1 < x_2 < \dots x_n < x_{n+1} < b$ *tels que* $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = f(x_{n+1}) = 0$*, alors il existe un point*

$c \in]x_1, x_{n+1}[$ *tel que* $f^{(n)}(c) = 0$.

En effet, en appliquant le théorème de Rolle pour f entre successivement x_1 et x_2, x_2 et x_3, etc. x_n et x_{n+1}, on obtient des points c_1, etc. c_n distincts tels que $a < x_1 < c_1 < x_2 < \dots x_n < c_n < x_{n+1}$ en lesquels on a $f'(c_1) = f'(c_2) = \dots f'(c_n) = 0$. On recommence alors, appliquant le théorème de Rolle pour f' entre successivement c_1 et c_2, c_2 et c_3, etc., ce qui fournit $n-1$ points d_1, etc. d_{n-1} distincts tels que $a < c_1 < d_1 < c_2 < \dots c_{n-1} < d_{n-1} < c_n$ en lesquels on a $f''(d_1) = f''(d_2) = \dots f''(d_{n-1}) = 0$. Et en recommençant ce procédé encore $n-2$ fois on conclut.

Interpolation de Lagrange — *Soit $n+1$ points distincts $a < x_1 < x_2 < \dots x_n < x_{n+1}$, et $n+1$ valeurs distincts ou non $y_1, y_2 \dots y_n, y_{n+1}$. Il existe un unique polynôme L_n de degré au plus n tel que, pour tout i, $1 \le i \le n+1$, on ait $L_n(x_i) = y_i$, à savoir $L_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n+1} \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)$.*

En effet on a évidemment $L_n(x_i) = y_i$ pour tout i, et L_n est de degré au plus n, chaque monôme constituant l'étant. Si M est un polynôme tel que $M(x_i) = y_i$ pour tout i, alors $S = M - L_n$ vérifie $S(x_i) = 0$ pour tout i, et donc S est divisible par $P = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)$, soit $M - L_n = PQ$, soit $M = L_n + PQ$. Si donc M est de degré au plus n, il faut que Q soit nul, puisque P est déjà de degré $n+1$, et finalement $M = L_n$.

L'écart de l'interpolation de Lagrange — *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et $n+1$ fois dérivable dans $]a,b[$, si l'on considère $n+1$ points distincts $a < x_1 < x_2 < \dots x_n < x_{n+1}$ et les valeurs $y_i = f(x_i)$ de f en ces points, et L_n l'interpolation de* Lagrange *associée L_n, alors pour tout $x \in]a,b[$ on a $f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)$, pour un $c \in]a,b[$ dépendant de x.*

Par suite, si $u \in]a,b[$ et si h est tel que $]u-h, u+h[\subset]a,b[$, alors, avec $L_n(u+h) = a_0(u) + a_1(u)h + \dots a_n(u)h^n$, il vient qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f(u+h) = a_0(u) + a_1(u)h + \dots a_n(u)h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1}(u + h - x_i)$.

Si donc les x_i sont écrit $x_i = u + v_i h$, avec des $v_i \neq 1$, on a

$$f(u+h) = a_0(u) + a_1(u)h + \dots a_n(u)h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Big(\prod_{i=1}^{n+1}(1 - v_i)\Big)h^{n+1}.$$

Le résultat est clair pour $x = x_i$. Si pour tout i on a $x \neq x_i$, on considère la fonction $F(x) = \frac{f(x)-L_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$, et l'on pose, pour x fixé, $G(t) = (F(t) - F(x)) \prod_{i=1}^{n+1}(t - x_i) = f(t) - L_n(t) - \prod_{i=1}^{n+1}(t - x_i)F(x)$. Alors $G(t)$ est $n+1$ fois dérivable et s'annule aux $n+2$ points $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ et x, et le théorème de Rolle itéré donne un $c \in]a,b[$ tel que $G^{(n+1)}(c) = 0$. Or $G^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!F(x)$, et l'on conclut. Le reste va de soi.

La formule de Taylor a été publiée en 1715, sans précisons sur la forme du reste ; la première écriture précise du reste est due à Lagrange, puis une autre est due à Cauchy.

Théorème de Taylor-Cauchy — *Supposons que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$, que $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$, et de même pour f'', etc. jusqu'à $f^{(n+1)} : [a,b] \to \mathbb{R}$. On définit $R_n(a)$ par l'identité*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n(a).$$

Alors le "reste " $R_n(a)$ est tel que sa dérivée par rapport à a vaut

$$R_n'(a) = -\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(a),$$

et il existe un $c \in]a,b[$ tel que $R_n(a) = \frac{(b-a)(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$, de sorte que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{(b-a)(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c).$$

En effet, pour le premier point il suffit de dériver l'identité définissant R_n par rapport à a, en considérant donc que b est une constante. Ensuite on écrit la formule des accroissements finis pour la fonction $R_n(z)$ entre a et b : il existe un $c \in]a,b[$ tel que $-R_n(a) = R_n(b) - R_n(a) = (b-a)R_n'(c)$.

Théorème de Taylor-Lagrange — *Supposons que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$, que $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$, et de même pour f'', etc. jusqu'à $f^{(n-1)} : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est suppose continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$, et $f^{(n)} : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

En effet, posons $P(x) = P_{f,a,n}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, $h(x) = f(x) - P(x)$, et $g(x) = h(x) - \frac{h(b)}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1}$. On constate que $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a), \ldots, P^n(a) = f^{(n)}(a)$, que $h(a) = h'(a) = \ldots h^{(n)}(a) = 0$, et que $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = g(b) = 0$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à g sur $[a,b]$, on obtient un c_1 tel que $a < c_1 < b$ et $g'(c_1) = 0$; on peut alors appliquer le théorème de Rolle à g' sur $[a, c_1]$, d'où un c_2 tel que $a < c_2 < c_1 < b$ et $g''(c_2) = 0$, etc. Finalement on trouve un $c_{n+1} = c$ tel que $a < c < b$ et que $g^{n+1}(c) = 0$. Mais $g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \frac{h(b)}{(b-a)^{n+1}}(n+1)!$, d'où l'on tire $h(b)$ que l'on reporte dans $f(b) = P(b) + h(b)$.

Théorème de Taylor-Lagrange [suite], approximation polynomiale — *Sous les mêmes hypothèses, pour $u, x \in]a,b[$ on a un $c_{u,x}$ strictement entre u et x tel que*

$$f(x) = f(u) + f'(u)(x-u) + \frac{f''(u)}{2}(x-u)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_{u,x})}{(n+1)!}(x-u)^{n+1},$$

soit

$$f(x) = P_{f,u,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_{u,x})}{(n+1)!}(x-u)^{n+1}.$$

Si de plus il existe $k \geq 0$ tel que, pour tous $v \in [a,b]$ on ait $|f^{(n+1)}(v)| \leq k$ (ce qui a lieu notamment si $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$), alors $|f(x) - P_{f,u,n}(x)| \leq \frac{k}{(n+1)!}(x-u)^{n+1}$, et donc $|f(x) - P_{f,u,n}(x)| \leq \epsilon$ dès que $|x-u| \leq \left(\frac{(n+1)!}{k}\epsilon\right)^{\frac{1}{n+1}}$: on considère alors $P_{f,u,n}$ comme une approximation polynomiale *de f au voisinage de u.*

Théorème de Taylor-Young : développement limité — *Sous les mêmes hypothèses que dans Taylor-Lagrange, si $x - u = h$ et avec*

$$\varepsilon_{f,u,n}(h) = \frac{f(u+h) - P_{f,u,n}(u+h)}{h^n} = \frac{f^{n+1}(c_{u,u+h})}{n!}h,$$

on a alors un développement limité à l'ordre n en u*, c'est-à-dire, avec $P_{f,u,n}(u+h)$ un polynôme de degré au plus n en h, et $\lim_{h\to 0} \varepsilon_{f,u,n}(h) = 0$:*

$$f(u+h) = P_{f,u,n}(u+h) + \varepsilon_{f,u,n}(h)h^n.$$

Ce résultat, où l'on ne retient de $\varepsilon_{f,u,n}(h)$ que le fait que $\lim_{h\to 0} \varepsilon_{f,u,n}(h) = 0$, permet l'étude locale en u, mais ne permet de donner aucune valeur exacte de f ailleurs qu'au point u.

Développement asymptotique versus développement en série : définitions — Considérons un intervalle $[a,b]$, un élément $u \in]a,b[$, une fonction $f(x)$ sur $[a,b]$, une "écriture formelle" $E(x) = a_0 + a_1(x-u) + \ldots a - n(x-u)^n + \ldots$, et, pour tout n une fonction $R_n(u, (x-u))$ telle que, pour tout $x \in [a,b]$ on ait

$$f(x) = a_0 + a_1(x-u) + \ldots a - n(x-u)^n + R_n(u, x-u).$$

D'une part, on dit que $E(x) = a_0 + a_1(x-u) + \ldots a - n(x-u)^n + \ldots$ est un *développement asymptotique* de f en u si, pour tout n, $f(x) = a_0 + a_1(x-u) + \ldots a - n(x-u)^n + R_n(u, x-u)$ est un développement limité de f en u, c'est-à-dire si $\lim_{x\to u} \frac{1}{(x-u)^n} R_n(u, x-u) = 0$.

D'autre part, on dit que $E(x) = a_0 + a_1(x-u) + \ldots a - n(x-u)^n + \ldots$ est un *développement en série* de f en u pour $|x-u| < R$ si, pour tout $x \in]u-R, u+R[$ on a $\lim_{n\to+\infty} R_n(u, x-u) = 0$.

Développement asymptotique et développement en série, via la formule de Taylor — *1 — Supposons que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit continue sur $[a,b]$ et indéfiniment dérivable sur $[a,b]$, et soit $u \in]a,b[$. Alors*

$$S(x) = f(u) + f'(u)(x-u) + \frac{f''(u)}{2}(x-u)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n + \ldots$$

est un développement asymptotique de f en u, fournissant, pour tout n, un développement limité d'ordre n en u.

2 — Si dans la formule de Taylor pour $f(x)$ en u le reste $R_n(u, x-u) = \frac{f^{(n+1)}(c_{u,x})}{(n+1)!}(x-u)^{n+1}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, alors $S(x)$ est un développement en série de f en u convergent*, c'est-à-dire permettant, en sommant suffisamment de termes, d'approcher $f(x)$ d'aussi près que l'on voudra.*

En particulier on a, avec la formule de Taylor-Lagrange :

Convergence de la série de Taylor — *La série de Taylor $S(x) = f(u) + f'(u)(x-u) + \frac{f''(u)}{2}(x-u)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n + \ldots$ converge si $|x-u| < 1$ et s'il existe une constante M telle que, pour tout n et tout $x \in [a,b]$, $|f^{(n)}(x)| < M$.*

En particulier il vient, la dérivée $n+1$-ième d'un polynôme de degré n étant nulle :

Représentation exacte d'un polynôme par une série finie de Taylor — *Si $P(x)$ est un polynôme de degré n, et $u \in \mathbb{R}$ alors on a l'identité*

$$P(x) = P(u) + P'(u)(x-u) + \frac{P''(u)}{2}(x-u)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n.$$

Si nous appliquons ce dernier point au polynôme $P(x) = (A+x)^n$ en $u = 0$, on a $P(0) = A^n$,$P'(x) = n(A+x)^{n-1}$, $P'(0) = nA^{n-1}$, etc., $P^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-p+1)(A+x)^{n-p}$, $P^{(k)}(0) = n(n-1)\dots(n-p+1)A^{n-p}$, et l'on obtient :

Formule de binôme — *Avec les* coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1.2...k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, *on a, comme cas particulier de la formule de Taylor la formule du binôme de Newton :*

$$(A+B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \cdots + \binom{n}{k}A^{n-k}B^k + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + B^n.$$

La série géométrique — *1 — Pour tout* $x \neq 1$ *on a l'identité algébrique*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\frac{x}{1-x}.$$

2 — Si on limite x *par* $a \le x \le b < 1$, *avec* $a \le 0$, *la fonction* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *est continue et dérivable sur* $[a,b]$, *et la série* $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dots$ *est la série de Taylor de la fonction* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *au point* $u = 0 \in [a,b]$, *car* $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, *et l'on écrit la formule de Taylor-Lagrange* $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ *avec* $c = 1 - (1-x)^{\frac{1}{n+1}}$.

3— $1 + x + x^2 + \dots$ *est un développement asymptotique de* $\frac{1}{1-x}$ *au point* $u = 0$, *car* $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x} = 0$.

4 — Si $|1-x| < 1$, *alors* $1 + x + x^2 + \dots$ *est un développement en série convergent de* $\frac{1}{1-x}$ *au point* $u = 0$, *car alors* $\lim_{n\to\infty} x^n\frac{x}{1-x} = 0$.

Le Théorème de Taylor-Lagrange et le théorème des accroissements finis généralisé de Cauchy, et aussi le théorème de Taylor-Cauchy, peuvent être unifiés en un théorème due à Édouard Roche qui, en jouant sur g, fournit des écritures variées du reste $R_{f,u,n} = \varepsilon_{f,u,n}(h)h^n$ dans la formule de Taylor :

Théorème de Roche (1864) — *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisfaisant aux hypothèses ci-dessus du théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre* n, *et soit* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisfaisant aux hypothèses de Taylor-Lagrange à l'ordre* q, *et telle que sa dérivée d'ordre* $q+1$, $g^{(q+1)}(x)$, *ne s'annule pas sur* $[a,b]$. *Alors il existe un* $0 < \theta < 1$ *tel que*

$$\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f''a) - \cdots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}{g(b) - g(a) - (b-a)g''a) - \cdots - \frac{(b-a)^q}{q!}g^{(q)}(a)} = \frac{q!}{n!}(b-a)^{n-q}(1-\theta)^{n-q}\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(b-a)\big)}{g^{(q+1)}\big(a+\theta(b-a)\big)}.$$

Donc si $P_{f,u,n}(u+h) = f(u) + f'(u)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!}h^n$, *et* $f(u+h) = P_{f,u,n}(u+h) + R_{f,u,n}(u+h)$, *pour tout choix d'une fonction* $g : [u, u+h] \to \mathbb{R}$ *satisfaisant aux hypothèses de Taylor-Lagrange à l'ordre* q, *et telle que sa dérivée d'ordre* $q+1$, $g^{(q+1)}(x)$, *ne s'annule pas entre* u *et* $u+h$, *il existe un* $0 < \theta < 1$ *tel que, avec* $P_{g,u,q}(u+h) = g(u) + g'(u)h + \cdots + \frac{g^{(q)}(u)}{q!}h^q$, *et* $g(u+h) = P_{g,u,q}(u+h) + R_{g,u,q}(u+h)$, *on ait :*

$$R_{f,u,n}(u+h) = \frac{q!}{n!}h^{n-q}(1-\theta)^{n-q}\frac{f^{(n+1)}(u+\theta h)}{g^{(q+1)}(u+\theta h)}R_{g,u,q}(u+h).$$

En effet , si l'on désigne par S le premier membre de la formule à démontrer, on introduit la fonction auxiliaire de x,

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - S\left[g(b) - g(x) - (b-x)g'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^q}{q!}g^{(q)}(x)\right].$$

On vérifie aussitôt que $F'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + S\,\frac{(b-x)^q}{q!}g^{(q+1)}(x)$, et comme $F(b) = F(a) = 0$, $F'(x)$ doit s'annuler au moins une fois entre a et b, en un point $a < c < b$ que l'on peut encore écrire $c = a + \theta(b-a)$, pour un $0 < \theta < 1$.

La formule de Roche s'obtient aussi en appliquant la formule des accroissements finis généralisée de Cauchy aux deux fonctions $f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$ et $g(b) - g(x) - (b-x)g'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^q}{q!}g^{(q)}(x)$.

Formes de Schlömilch, de Lagrange et de Cauchy pour le reste dans la formule de Taylor — *1 — La forme générale de Roche du reste* $R_{f,u,n}(u+h)$ *dans la formule de Taylor donne, lorsque* $q = 0$ *la forme de Schlömilch*

$$R_{f,u,n}(u+h) = \frac{g(u+h) - g(u)}{g'(u+\theta h)}\frac{h^n(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(u+\theta h).$$

2 — Si dans la forme de reste de Schlömilch on prend $g(x) = (u+h-x)^{p+1}$ *il vient*

$$R_{f,u,n}(u+h) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{n!(p+1)}f^{(n+1)}(u+\theta h).$$

Cette expression redonne pour $p = n$ et $p = 0$ les restes de Lagrange et de Cauchy.

Contacts et jets : définition — Considérons deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ définies sur $[a, b]$ ayant même valeur au point $u \in]a, b[$, $f(u) = g(u)$. Si de plus f et g sont dérivables en u et si $f'(u) = g'(u)$, alors on dit que f et g ont un *contact du premier ordre* en u. Si f et g sont dérivables à l'ordre n sur $[a, b]$ au voisinage de u et et ont toutes leurs dérivées de l'ordre 1 à l'ordre n égales en u, c'est-à-dire si

$$f(u) = g(u), \quad f'(u) = g'(u), \quad \dots, f^{(n)}(u) = g^{(n)}(u),$$

on dit que f et g ont un *contact d'ordre n* au point u. On dit aussi que f et g ont ême *jet d'ordre n* en u. Autrement dit, on appelle *jet d'ordre n* au point u de f et on note $j^n_u f$ l'ensemble des fonction h ayant en u un contact d'ordre n avec f, et f et g ont un contact d'ordre n en u s'exprime donc par l'égalité des jets : $j^n_u f = j^n_u g$.

Jet et partie régulière du développement de Taylor — *Avec les hypothèses et notations ci-avant on a $j^n_u f = j^n_u g$ si et seulement si $P_{f,u,n}(x) \equiv P_{g,u,n}(x)$. Ainsi $P_{f,u,n}(x)$ est le polynôme P de degré au plus n tel que $j^n_u f = j^n_u P$, soit le polynôme P de degré au plus n ayant le contact d'ordre le plus élevé possible avec f en u.*

1.3. Étude de $y = f(x)$: tangente, croissance, concavité, convexité, extrema, inflexion, asymptote, osculation.

Nous approfondissons les indications données plus haut sur tangente et variation locale.

Tangente — *Si $f(x)$ est dérivable en x_0, alors la corde joignant $M_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$ à $M = \big(x_1, f(x_1)\big)$, d'équation $y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}x + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}x_0 - f(x_0)$ tend, lorsque $x_1 \to x_0$, vers une position limite dite* tangente *à la courbe $y = f(x)$ au point M_0, laquelle tangente est la droite d'équation $y = f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0)$.*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et $u, v \in [a, b]$, $u < v$, tels que $f'(x)$ existe pour $x \in [a, b]$. Alors $f(u) \le f(v)$ si et seulement si $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \ge 0$; donc en passant à la limite, si f est croissante au sens large on en déduit que $f'(u) \ge 0$. Réciproquement, si $f' > 0$ entre a et b, la formule des accroissements finis $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u)$ assure que $f(u) < f(v)$. Ainsi :

croissance *versus* positivité de la dérivée — *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable dans $[a, b]$. Si f est croissante au sens large dans $[a, b]$, alors f'est ≥ 0 dans $[a, b]$, et si $f' > 0$ dans $[a, b]$, alors f est croissante au sens strict dans $[a, b]$.*

Concavité, convexité — Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et $u, v \in [a, b]$, $u < v$, alors, avec $\gamma_{f,u,v}(x) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x - u) + f(u)$, $y = \gamma_{f,u,v}(x)$ est l'équation de la corde à Γ_f passant par $M(u) = \big(u, f(u)\big)$ et $M(v) = \big(v, f(v)\big)$. La fonction f est dite *concave entre a et b* si, pour tout $u, v \in [a, b]$, $u < v$, et pour tout $x \in [u, v]$ on a : $\gamma_{f,u,v}(x) \ge f(x)$, autrement dit $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \ge \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$; et elle est dite *convexe entre a et b* si, pour tout $u, v \in [a, b]$, $u < v$, et pour tout $x \in [u, v]$ on a : $\gamma_{f,u,v}(x) \le f(x)$, autrement dit $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$. Ainsi f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

Concavité *versus* croissance de la dérivée. — *Supposons $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a, b]$. Alors f est* concave *entre a et b, c'est-à-dire Γ_f est* sous ses cordes, *si et seulement si f' est croissante sur $[a, b]$, c'est-à-dire Γ_f est* sur ses tangentes.

Si f' est dérivable sur $[a, b]$, alors f est concave sur $[a, b]$ si et seulement si $f'' \ge 0$ sur $[a, b]$.

En effet, si f est concave on a $\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le \frac{f(v)-f(x)}{v-x}$, d'où en passant à la limite pour $x \to u$ ou pour $x \to u$, les inégalités $f'(u) \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le f'(v)$, et donc $f'u) \le f'(v)$: f' est croissante. Pour la réciproque, supposons f' croissante et appliquons le théorème de Rolle à la fonction $\delta(x) = f(x) - \gamma_{f,u,v}(x) = f(x) - (Ax + B)$. On a $\delta(u) = \delta(v) = 0$, donc il existe un c, $u < c < v$ tel que $\delta'(c) = 0$. Mais $\delta'(x) = f'(x) - A$ est croissante puisque $f'(x)$ l'est, et donc est ≤ 0 avant c et est ≥ 0 après c. Donc $\delta(x)$ décroit de u à c, puis remonte de c à v. Comme $\delta(u) = \delta(v) = 0$, on conclut que $\delta(x) \le 0$ sur $[u, v]$. Pour la question de la tangente en x_0, d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, on regarde donc si la fonction $h(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$ est positive. Or $h'(x) = f'(x) - f'(x_0) \le 0$, et donc $h'x)$ est ≤ 0 avant x_0 et ≥ 0 après x_0, de sorte que $h(x)$ décroit avant x_0 et croit après. Mais comme cette fonction est nulle en x_0 on en déduit qu'elle est partout ≥ 0.

Examen en un point aux ordres supérieurs : position locale par rapport à la tangente — *Soit $y = f(x)$ définie sur $[a, b]$ et $u \in]a, b[$. La tangente en u à la courbe d'équation $y = f(x)$ est de pente $f'(u)$.*

On suppose qu'il existe un entier m tel que $1 < m \le n$ et $f^{(m)}(u) \ne 0$, et on note q le premier de ces m. Alors

1– Si q est pair et $f^{(q)}(u) < 0$, alors Γ est au voisinage de u sous sa tangente.

2– Si q est pair et $f^{(q)}(u) > 0$, alors Γ est au voisinage de u sur sa tangente.

3 – Si q est impair et $f^{(q)}(u) < 0$, alors Γ est au voisinage de u sur sa tangente pour $h < 0$ et sous sa tangente pour $h > 0$ (inflexion).

4 – Si q est impair et $f^{(q)}(u) > 0$, alors Γ est au voisinage de u sous sa tangente pour $h < 0$ et sur sa tangente pour $h > 0$ (inflexion).

En effet $\varepsilon_{f,u,1}(h)h = f(u+h) - \left[f(u) + f'(u)h\right] = \frac{f^{(q)}(u)}{q!}\left[1 + \left(\frac{f^{(q+1)}(u)q!}{f^{(q)}(u)(q+1)!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(u)q!}{f^{(q)}(u)n!}h^{n-q} + \varepsilon_{f,u,n}(h)h^{n-q}\right)\right]$. Quand $h \to 0$, le terme entre parenthèse à droite tend vers 0, et donc le terme entre crochet est positif pour h suffisamment petit en valeur absolue ; alors le membre de droite est du signe de $f^{(q)}(u)h^q$, et donc le membre de gauche aussi, lequel est l'écart vertical en $u+h$ entre Γ_f et sa tangente $T_{M(u)}\Gamma$ en $M(u)$.

Notons, d'usage fréquent, les cas particuliers suivants :

Condition suffisante de maximum local — *Pour que f dérivable présente un maximum local en u il est nécessaire que $f'(u) = 0$, c'est-à-dire que la tangente en u soit horizontale. Si $f'(u) = 0$ et si $f''(u) < 0$, alors la fonction présente effectivement en u un maximum local.*

Condition suffisante d'inflexion — *La courbe $y = f(x)$ présente une* inflexion *au point x_0 si, en ce point la tangente existe et traverse en ce point la courbe, de sorte que juste avant la courbe soit concave et juste après convexe, ou le contraire. Pour cela il faut que $f''(x_0) = 0$, et il suffit que $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$.*

Examen à l'infini, direction asymptotique, asymptote — Si un point A étant fixé et un point M mobile sur une courbe, il arrive que la droite AM tende vers une position limite AM_∞ lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur une branche de la courbe, cette direction, indépendante du point A, est appelée *direction asymptotique* de la branche.

Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $x \geq a$. On dit que f et g sont *asymptotes l'une à l'autre* en $+\infty$ si l'on a $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

Une droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ est dite *asymptote* à la courbe $y = f(x)$ si la parallèle $M\delta$ menée par un point M de la courbe admet Δ comme position limite lorsque M s'éloigne à l'infini sur une branche de la courbe. Si la droite a une équation $y = ux + v$, cela signifie que les deux fonctions $y = f(x)$ et $y = ux + v$ sont asymptotes l'une à l'autre. Si Δ est asymptote à la courbe, la direction Δ est une direction asymptotique de la courbe. Mais il peut y avoir une direction asymptotique sans qu'il existe une asymptote, par exemple dans le cas d'une parabole $y = x^2$.

Asymptote comme limite à l'infini d'une tangente — *Si la tangente en un point M_0 d'une courbe tend vers une position limite Δ lorsque M_0 s'éloigne à l'infini sur une branche de la courbe, alors la droite Δ est asymptote à la courbe. Mais il peut y avoir une asymptote sans qu'il existe une limite à l'infini de la tangente en un point fini.*

En effet, si la tangente, dont l'équation est $y = f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0)$, admet une position limite Δ non verticale quand $(x_0, f(x_0))$ tend $+\infty$, c'est que si $x_0 \to +\infty$ alors $f(x_0) \to +\infty$, et que Δ a pour équation $y = cx + d$ avec, lorsque $x_0 \to +\infty$, $f'(x_0) \to c$ et $(f'(x_0)x_0 - f(x_0)) \to d$. On a donc $x_0(f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{x_0}) \to d$, et donc, puisque le premier facteur tend vers ∞, il vient que $f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{x_0} \to 0$, et donc, puisque $f'(x_0) \to c$, il vient que $\frac{f(x_0)}{x_0} \to c$: la courbe admet donc la direction de coefficient directeur c comme direction asymptotique. Pour prouver que Δ est asymptote, il reste à montrer que $f(x_0) - cx_0 \to d$ quand $x_0 \to +\infty$. Pour cela on considère $f(x_0) - cx_0 = \frac{\frac{f(x_0)}{x_0} - c}{\frac{1}{x_0}}$, de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et l'on applique la règle de De l'Hospital dans le cas où la variable x_0 devient infinie : le rapport des dérivées des numérateur et dénominateur est $\frac{\frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}}{-\frac{1}{x_0^2}} = f(x_0) - x_0 f'(x_0) \to d$. On montre aussi le résultat quand la position limite Δ est verticale. Et pour contre exemple à la réciproque on peut prendre $y = \frac{\sin x}{x}$ qui a l'axe Ox comme asymptote, quoique la tangente $y = \frac{x_0 \cos x_0 - \sin x_0}{x_0^2}x + 2\frac{\sin x_0}{x_0} - \cos x_0$ n'admette pas de limite, puisque son ordonnée à l'origine n'a pas de limite.

Détermination pratique des asymptotes — *La courbe $y = f(x)$ définie sur $]a, b]$ admet la droite $x = a$ comme* asymptote verticale à gauche en a vers le haut *si $\lim_{a>x, x\to a} f(x) = +\infty$. On détermine de même les droites asymptotes à gauche en a vers le bas, à droite en b vers le haut ou vers le bas.*

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie pour $x \geq a$. La courbe f admet la droite $y = c$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ *si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$. On détermine de même une droite asymptote horizontale en $-\infty$.*

Soit $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto px + q$ une droite, avec $p \neq 0$. La courbe f admet g pour *asymptote oblique en $+\infty$* si $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (px + q)\big) = 0$. Cela équivaut à ce que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = p$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - px) = q$.

Cercle osculateur, centre et rayon de courbure : définition — Étant donnée une fonction $y = f(x)$, son étude en un point fini $x = u$, une fois déterminée la tangente et la position de la courbe par rapport à la tangente, se poursuivra au second ordre, en prenant en compte aussi la dérivée seconde, soit le jet d'ordre 2 de f en u. Géométriquement parlant, on cherche à déterminer le *cercle osculateur* soit la fonction

$$y = \sigma\sqrt{R^2 - (x-\alpha)^2} + \beta, \quad \sigma = \pm 1,$$

ayant le meilleur contact d'ordre 2 avec $y = f(x)$ en u, c'est-à-dire ayant au point u même dérivée première et même dérivée seconde que f. Le rayon R de ce cercle est appelé *rayon de courbure* de f en u, et son centre $C = (\alpha, \beta)$ est le centre de courbure. Tout d'abord, pour $x = u$ il faut $y(u) = f(u)$, d'où $\beta = f(u) - \sigma\sqrt{R^2 - (u-\alpha)^2}$. Ensuite on calcule $y' = \frac{\sigma(\alpha - x)}{\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}}$, et donc $1 + y'^2 = \frac{R^2}{R^2-(x-\alpha)^2}$, puis $y'' = \frac{-\sigma R^2}{(R^2-(x-\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}$, et donc $R^2 y''^2 = (1 + y'^2)^3$. Alors σ est l'opposé du signe de $f''(u)$, et R, α et β sont déterminés par les conditions $R^2 f''(u)^2 = (1 + f'(u)^2)^3$, $f'(u) = \frac{\sigma(\alpha-u)}{\sqrt{R^2-(u-\alpha)^2}}$, et $\beta = f(u) - \sigma\sqrt{R^2 - (u-\alpha)^2}$.

Rayon de courbure et centre de courbure : formules — *Le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure au point* $(u, f(u))$ *de la courbe* $y = f(x)$ *valent*

$$R = \frac{(1 + f'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(u)|}, \quad \alpha = u - \frac{f'(u)(1 + f'(u)^2)}{f''(u)}, \quad \beta = f(u) + \frac{1 + f'(u)^2}{f''(u)}.$$

♣ Exercices

1— Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction $(\tan(x))^2$.

2 — Étudier la forme à l'origine de la courbe $y = 2x - x\sin x$.

3 — Étudier la forme à l'origine de la courbe $y = x^3 - 6\sin x$.

4 — On pose $f(x) = (x^4(x-1))^{\frac{1}{5}}$. Étudier sa forme au point $x = 0$, et au point $x = \frac{4}{5}$. Comparer à l'infini à la droite $y = x - \frac{1}{5}$. Dessiner le graphe de f.

5 — La fonction $y = \arctan x$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier par : $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}]$ et $x = \tan y$. Sans calculs représenter la courbe avec ses asymptotes horizontales. Montrer que $y' = \frac{1}{1+x^2}$, et retrouver par le calcul la forme de cette courbe en 0.

6 — Étudier ensuite la fonction $f(x) = x \arctan\frac{x}{x-1}$, notamment en 1 (limites à droite et à gauche), en 0 (tangente et position locale par rapport à la tangente) et à l'infini (asymptote oblique et position par rapport à cette symptote).

7 — Montrer que la courbe $y = \sqrt{x^4 - x^3}$ est asymptotique à la parabole $y = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$, et qu'elle est sous cette parabole.

8 — Dessiner la parabole $y = x^2 - x$ et la courbe $y = x^2 - x + \frac{\sin x}{x}$. Constater qu'elles sont asymptotes l'une à l'autre.

9 — Si $f^{(n+1)}(x)$ ne s'annule pas entre u et $u + h$, montrer en choisissant q et g dans le théorème de Roche, que le reste dans la formule de Taylor pour f entre u et $u + h$ s'écrit $R_{f,u,n}(u+h) = \frac{h^n(1-\theta)^n}{n!}\left[f^{(n)}(u+h) - f^{(n)}(u)\right]$. Ce reste est donc alors majoré en valeur absolue par $\frac{h^n}{n!}\left|f^{(n)}(u+h) - f^{(n)}(u)\right|$. Cela vaut pour la fonction e^x entre 0 et h. ♣

COURS 2 (01/02/06) — **Forme locale des courbes planes paramétrées** $(x = x(t), y = y(t))$ **: régularité, singularité, courbure.**

2.1. Produit scalaire et produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Pour $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$, on définit le *produit scalaire* par

$$U.V = XX' + YY' + ZZ'.$$

On a $U.U' = U'.U$, $(aU+bV).U' = a(U.U')+b(V.U')$. On a $U.U' = |U||U'|\cos(U, U')$. Donc $U.U' = 0$ si et seulement si U est nul, ou U' est nul, ou U et U' sont orthogonaux.

On définit le *produit vectoriel* par

$$U \wedge U' = \begin{pmatrix} YZ' - ZY' \\ ZX' - XZ' \\ XY' - YX' \end{pmatrix}.$$

On a $|U \wedge U'| = |U||U'||\sin(U, U')|$. On a $U \wedge U' = -(U' \wedge U)$, $(aU + bV) \wedge U' = a(U \wedge U') + b(V \wedge U')$.

Le vecteur $U \wedge U'$ est non nul si et seulement si U et U' sont non nul et non collinéaire ; et alors il a pour direction la direction orthogonale à U et à U', et son sens est tel que $(U, U', U \wedge U')$ soit direct (c'est-à-dire comme pouce, indexe et majeur de la main droite). En particulier si U et U' sont de longueur 1 et orthogonaux, alors $U \wedge U'$ est de longueur 1, et $(U, U', U \wedge U')$ constitue une base orthonormée directe.

2.2. Allure locale d'une courbe plane paramétrée $(x = x(t), y = y(t))$**.**

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions $x, y \ : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors on appelle *courbe paramétrée plane* $\Gamma_{x=x(t),y=y(t)}$ d'équations $x = x(t), y = y(t)$ l'ensemble des points $M(t) = (x(t), y(t))$, où $t \in [a, b]$.

Une courbe $y = f(x)$ peut être considéré comme paramétrée par $t = x$, c'est-à-dire qu'en écrivant un point mobile sur son graphe sous la forme sous la forme : $M(t) = (t, f(t))$ on est bien dans un cas particulier de courbe paramétrée plane.

Invariances — Dans l'étude d'une courbe paramétrée, le premier point est la prise en compte de propriétés *globales* telles que les périodes, symétries et invariances éventuelles, ce qui permet de réduire les valeurs de t à examiner pour faire l'étude complète.

La courbe est *périodique* de période T si, pour tout t on a : $M(t + T) = M(t)$.

Elle est dite *invariante par une translation* de vecteur (a, b) si et seulement si, pour tout t il existe t' tel que le point $M(t')$ s'obtienne par translation de vecteur (a, b) à partir du point $M(t)$, ce qui s'exprime analytiquement par : $\Big(x(t'), y(t')\Big) = \Big(x(t) + a, y(t) + b\Big)$.

Elle est dite *invariante par rotation* de centre (a, b) et d'angle θ si pour tout t il existe un t' tel que le point $M(t')$ s'obtienne par rotation de centre (a, b) et d'angle θ à partir du point $M(t)$, ce qui s'exprime analytiquement par : $x(t') - a = \cos\theta\Big(x(t) - a\Big) - \sin\theta\Big(y(t) - b\Big)$ et $y(t') - b = \sin\theta\Big(x(t) - a\Big) + \cos\theta\Big(y(t) - b\Big)$.

La courbe est dite admettre le point (p, q) comme *centre de symétrie* si et seulement si pour tout t il existe un t'' tel que $x(t'') = 2p - x(t)$, $y(t'') = 2q - y(t)$.

Point simple, point multiple — On dit que M est un *point simple* de la courbe paramétrée $\Gamma_{x=x(t),y=y(t)}$ s'il existe une unique valeur de t, t_1, elle que $M = M(t_1)$. On dit que M est un *point multiple* de la courbe paramétrée $\Gamma_{x=x(t),y=y(t)}$ s'il existe au moins deux valeurs distinctes de t, t_1 et t_2, telles que $M = M(t_1) = M(t_2)$. On dit qu'un point multiple M est un *point multiple géométrique* s'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que $\{M\} = M\Big(]t_1 - \alpha_1, t_1 + \alpha_1[\Big) \cap M\Big(]t_2 - \alpha_2, t_2 + \alpha_2[\Big)$.

Point stationnaire, point régulier — On dit qu'un point simple $M = M(t_1)$ est un *point stationnaire* ou *singulier* si $M'(t_1)$ existe et vaut $M'(t_1) = 0$. Sinon le point est dit *régulier*.

Considérons un point $u \in]a, b[$, et supposons que $x(t)$ et $y(t)$ sont dans les conditions du théorème de Taylor, soit continues et n fois dérivables sur $[a, b)$, et à dérivées n-ièmes $x^{(n)}$ et $y^{(n)}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On a donc $x(u+h) = P_{x,u,n}(u+h)+\varepsilon_{x,u,n}(h)h^n$, avec $P_{x,u,n}(u+h)$ un polynôme de degré au plus n en h, et $\lim_{h\to 0} \varepsilon_{x,u,n}(h) = 0$, $y(u + h) = P_{y,u,n}(u + h) + \varepsilon_{y,u,n}(h)h^n$, avec $P_{y,u,n}(u + h)$ un polynôme de degré au plus n en h, et $\lim_{h\to 0} \varepsilon_{y,u,n}(h) = 0$, développements limités que l'on regroupe en un seul "vectoriel" formé avec et un "polynôme" de degré au plus n en h $P_{M,u,n}(u + h)$(à coefficients des vecteurs) et un "vecteur" $\varepsilon_{M,u,n}(h)$ tel que $\lim_{h\to 0} \varepsilon_{M,u,n}(h) = 0$, soit

$$M(u + h) = P_{M,u,n}(u + h) + \varepsilon_{M,u,n}(h)h^n,$$

en posant $\varepsilon_{M,u,n} = (\varepsilon_{x,u,n}, \varepsilon_{y,u,n})$, $M^{(q)}(u) = (x^{(q)}(u), y^{(q)}(u))$, et

$$P_{M,u,n}(u+h) = M(u) + M'(u)h + \frac{M''(u)}{2}h^2 + \cdots + \frac{M^{(n)}(u)}{n!}h^n.$$

Considérons (on suppose qu'ils existent) p le premier entier ≥ 1 tel que $M^{(p)}(u) \neq 0$ et q le premier entier tel que $n \geq q > p$ et que $M^{(p)}(u) \wedge M^{(q)}(u) \neq 0$. Alors $M^{(q)}(u) \neq 0$ et $M^{(q)}(u)$ n'est pas collinéaire à $M^{(p)}(u)$, si bien que le système formé de ces deux vecteurs constitue une base de $\mathbb{R}^2$; on va alors considérer le développement limité à l'ordre q, et l'écrire dans cette base. Chaque vecteur $M^{(k)}(u)$, pour $p < k < q$ est proportionnel à $M^{(p)}(u)$, soit de la forme $\lambda_k M^{(p)}(u)$, et l'on a donc :

$$M(u+h) - M(u) = \left[\frac{1}{p!} + \lambda_{p+1}\frac{h}{(p+1)!} + \dots \lambda_{q-1}\frac{h^{q-p-1}}{(q-1)!}\right]h^p M^{(p)}(u) + \frac{h^q}{q!}M^{(q)}(u) + \varepsilon_{M,u,q}(h)h^q.$$

En écrivant $\varepsilon_{M,u,q}(h) = \theta(h)M^{(p)}(u) + \eta(h)M^{(q)}(u)$ il vient donc

$$M(u+h) - M(u) = \left[1 + \lambda_{p+1}p!\frac{h}{(p+1)!} + \dots \lambda_{q-1}p!\frac{h^{q-p-1}}{(q-1)!} + \theta(h)h^{q-p}\right]\frac{h^p}{p!}M^{(p)}(u) + [1+\eta(h)]\frac{h^q}{q!}M^{(q)}(u),$$

soit

$$M(u+h) - M(u) = [1+\mu(h)]\frac{h^p}{p!}M^{(p)}(u) + [1+\eta(h)]\frac{h^q}{q!}M^{(q)}(u),$$

avec $\mu(h)$ et $\eta(h)$ tendant vers 0 avec h. Alors au voisinage du point $M(u)$, soit pour h assez petit, $|\mu(h)| < 1$ et $|\eta(h)| < 1$, et donc *le point $M(u+h)$ est dans le même quadran du repère $(M(u); M^{(p)}(u), M^{(q)}(u))$ que le point $N(h) = \frac{h^p}{p!}M^{(p)}(u) + \frac{h^q}{q!}M^{(q)}(u)$*. De plus $\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$ est de même direction que $\frac{M(u+h)-M(u)}{h^q}$, si bien que sa direction limite est donnée par $M^{(q)}(u)$: *le vecteur $M^{(q)}(u)$ est tangent en $M(u)$ à la courbe*. On a donc montré que :

forme locale d'une courbe paramétrée —*Dans les hypothèses ci-dessus, la tangente en $M(u)$ est donnée en direction par le vecteur $M^{(p)}$, et la position de la courbe par rapport à la tangente est pour h assez petit dans le repère $(M(u); M^{(p)}(u), M^{(q)}(u))$ ainsi :*

1- Si p est impair et q pair, le point est ordinaire*, la courbe est située dans les deuxième et premier quadran.*

2 - Si p est impair et q impair, on a une inflexion*, la courbe est dans les troisième et premier quadran.*

3 - Si p est pair et q impair, on a un rebroussement de première espèce*, la courbe est dans les quatrième et premier quadran.*

4 - Si p est pair et q pair, on a un rebroussement de seconde espèce*, la courbe est dans le premier quadran.*

2.3. Asymptote d'une courbe plane paramétrée $(x = x(t), y = y(t))$.

Forme locale d'une courbe paramétrée [suite : Asymptote] — *Soit $x = x(t)$ et $y = y(t)$ les équations d'une courbe paramétrée Γ.*

Les asymptotes verticales de Γ correspondent aux valeurs t_0 telles que $\lim_{t\to t_0} x(t) = \alpha$*, pour un α fini, et que* $\lim_{t\to t_0} y(t) = +\infty$ *ou bien que* $\lim_{t\to t_0} y(t) = -\infty$.

Les asymptotes horizontales de Γ correspondent aux valeurs t_0 telles que $\lim_{t\to t_0} y(t) = \beta$*, pour un β fini, et que* $\lim_{t\to t_0} x(t) = +\infty$ *ou bien que* $\lim_{t\to t_0} x(t) = -\infty$.

Les asymptotes obliques ne peuvent exister que pour les valeurs t_0 pour lesquelles on a ou bien simultanément $\lim_{t\to t_0} x(t) = +\infty$ *et* $\lim_{t\to t_0} y(t) = +\infty$*, ou bien simultanément* $\lim_{t\to t_0} x(t) = +\infty$ *et* $\lim_{t\to t_0} y(t) = -\infty$*, ou bien simultanément* $\lim_{t\to t_0} x(t) = -\infty$ *et* $\lim_{t\to t_0} y(t) = +\infty$*, ou bien simultanément* $\lim_{t\to t_0} x(t) = -\infty$ *et* $\lim_{t\to t_0} y(t) = -\infty$. *Pour une telle valeur t_0, si l'équation de l'asymptote est $y = ax + b$, alors $a =$* $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$, $b = \lim_{t\to t_0}[y(t) - ax(t)]$.

2.4. Courbure d'une courbe plane paramétrée $(x = x(t), y = y(t))$, développée et développante, parallèles.

Forme locale d'une courbe paramétrée [suite : courbure] —*Supposons maintenant que $p = 1$ et $q = 2$, et posons $M' = M'(u)$, $M'' = M''(u)$. Alors le cercle Ω_h centré en C_h sur la normale en $M = M(u)$ et passant par $M = M(u)$ et $M_h = M(u+h)$ admet une position limite Ω, soit un cercle nommé* cercle osculateur*, de centre $C = C(u)$ nommé* centre de courbure *et caractérisé par $\vec{MC}.M' = 0$ et $\vec{MC}.M'' = \vec{M'}^2$, et de rayon $R = \frac{|M'|^3}{|M' \wedge M''|}$ appelé* rayon de courbure.

En fonction des fonctions x et y, le rayon R et le centre C de courbure valent donc :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|}, \quad C = \left(x_C = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad y_C = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \right).$$

En effet, en appelant H_h la projection orthogonale de M_h sur MC_h on a, dans le cercle Ω_h, la relation $\overline{MH_h}.2\overline{MC_h} = MM_h{}^2$, soit $2\vec{MM_h}.\vec{MC_h} = MM_h{}^2$. Et on a aussi $\vec{MC_h}.M' = 0$. On introduit dans ces deux relations caractérisant C_h le développement limité de $\vec{MM_h} = M(u+h) - M(u)$ et il vient $2\big[[1+\mu(h)]hM' + [1+\eta(h)]\frac{h^2}{2}M''\big].\vec{MC_h} = \big[[1+\mu(h)]hM' + [1+\eta(h)]\frac{h^2}{2}M''\big]^2$, et aussi $\vec{MC_h}.M' = 0$. En passant à la limite pour $h \to 0$ il vient les formules annoncées, soit le système aux deux inconnues x_C et y_C : $(x_C - x)x' + (y_C - y)y' = 0$ et $(x_C - x)x'' + (y_C - y)y'' = x'^2 + y'^2$. D'où l'on tire x_C et y_C, puis $R = \sqrt{(x_C - x)^2 + (y_C - y)^2}$. On trouve le rayon R sous la forme indiquée avec le produit vectoriel en tenant compte de $|M' \wedge M''| = |M'||M''||\sin(M', M'')|$, de $|\cos(MC, M'')| = |\sin(M', M'')|$ (puisque MC et M' sont orthogonaux), et en écrivant la seconde condition trouvée pour MC sous la forme $R|M''||\cos(MC, M'')| = |M'|^2$. Puis on revient à la forme en fonction de x et y en tenant compte de ce que $|M' \wedge M''| = |x'y'' - x''y'|$. Le vecteur tangent est (x', y'), donc le *vecteur normale unitaire* est $N = \left(\frac{-y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{x'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$, on en déduit les coordonnées de $C = M \pm RN$.

On obtient alors comme cas particulier :

Courbure en équation cartésienne explicite $y = f(x)$ — *Au point (x, y) de la courbe d'équation cartésienne explicite $y = f(x)$ le rayon de courbure vaut*

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

et le centre de courbure C a pour coordonnées

$$x_C = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, y_C = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

En effet on applique le résultat précédent avec $x(t) = t, y(t) = f(t)$.

Développée et développante — *Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ le point courant sur une courbe Γ, et soit $C(t) = (x_C(t), y_C(t))$ le centre de courbure de Γ en M, soit $C(t) = \left(x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}, y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}\right)$. Alors quand t varie, la courbe Δ lieu des points $C(t)$ est appelée la* développée *de Γ, et Γ est appelée la* développante *de Δ. Alors le segment $M(t)C(t)$ est normal à Γ en $M(t)$ et tangent à Δ en $C(t)$. Réciproquement si $M(t)$ et $C(t)$ sont tels que $M(t)C(t)$ soit normal à Γ en $M(t)$ et tangent à Δ en $C(t)$, alors $C(t)$ est le centre de courbure de Γ en $M(t)$. Si $D(t)$ est la droite normale en $M(t)$ à Γ quand t varie cette droite reste en permanence tangente à une courbe qu'elle* enveloppe*, et le point où $D(t)$ touche cette enveloppe est le centre de courbure, et cette enveloppe n'est autre que la développée Δ.*

Nous avons déjà vu que $M(t)C(t)$ est normal à Γ en $M(t)$. Ensuite, en posant $T = \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}$, on a $x'_C = x' - y''T - y'T'$, $y'_C = y' + x''T + x'T'$, d'où $x'_C(y_C - y) - y'_C(x_c - x) = (x'^2 + y'^2)T - (x'y'' - x''y')T^2 = 0$, ce qui signifie que $C'(t) \wedge \vec{MC} = 0$, c'est-à-dire que la tangente $C'(t)$. à Δ en $C(t)$ est collinéaire à $M(t)C(t)$. Réciproquement la normalité donne $x_C = x - y'F, y_C = y + x'F$, pour une fonction F indéterminée, puis la tangence donne $F = T$.

Courbes parallèles — *Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ le point courant sur une courbe Γ, et soit $P_\delta(t)$ le point sur la normale à Γ en $M(t)$ à la distance δ, soit $P_\delta(t) = (x_{P_\delta}(t), y_{P_\delta}(t)) = \left(x - \delta\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, y + \delta\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)$. La courbe Γ_δ lieu des points $P_\delta(t)$ est dite* parallèle *à Γ à la distance δ, et le segment $M(t)P_\delta(t)$ est normal à Γ_δ au point $P_\delta(t)$, et les rayons de courbures R de Γ en $M(t)$ et R_δ de Γ_δ en $P_\delta(t)$ vérifient $R \pm \delta = R_\delta$.*

Avec $K = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$, on vérifie la normalité indiquée, soit $\delta y'K(x' - \delta y''K - \delta y'K') - \delta x'K(y' + \delta x''K + \delta x'K') = 0$, ce qui revient à $K' = -\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}K$. La suite résulte de ce que le lieu de $C(t)$ est aussi bien l'enveloppe des normales à Γ qu'à Γ_δ, et donc chaque $C(t)$ est centre de courbure de l'une en $M(t)$ et de l'autre en $P_\delta(t)$.

2.5. Paramétrisation par un angle polaire.

Dans le plan cartésien l'origine $O = (0, 0)$ est prise comme pôle, et l'axe Ox comme axe, et si $M = (x, y)$ est un point du plan on pose $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = (Ox, OM)$. Une courbe paramétrée dont le paramètre est nommé θ et dont les équations sont de la forme $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$, c'est-à-dire le point courant de la forme $M(\theta) = \big(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta\big)$ est dite définie par l'*équation polaire* $\rho = \rho(\theta)$ de pôle O, et l'on note $M = [\rho, \theta]$.

Lorsque ρ s'annule pour $\theta = \theta_0$, la courbe passe au pôle O, et — la droite OM ayant pour limite la tangente OT lorsque M tend vers O, soit lorsque θ tend vers θ_0 — la tangente en O a pour équation $\theta = \theta_0$.

Plaçons-nous maintenant en un point tel que $\rho(\theta_0) \neq 0$. On pose alors $I(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $J(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. On a $J = I'$, $J' = -I$, $I.J = 0$, et I et J sont de longueur 1. On a donc $OM = \rho I$, puis $M' = \rho' I + \rho J$. On introduit alors l'angle entre OM et M', que l'on note $V = (OM, M')$ et, puisque $M' = \rho' I + \rho J$, on a : $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$. Ainsi donc est déterminée la tangente au point $M(\theta_0)$. Pour $\theta = \theta_0$, on considère le repère $(O; I(\theta_0), J(\theta_0))$ et les coordonnées (X, Y) dans ce repère. On a donc entre les coordonnées (x, y) et (X, Y) d'un même point les relations : $X = \rho\cos(\theta - \theta_0)$, $Y = \rho\sin(\theta - \theta_0)$. La tangente au point $M = [\rho(\theta_0), \theta_0]$ à la courbe $\rho = \rho(\theta)$ admet, dans le repère $(O; I, J)$ l'équation $Y = (X - \rho(\theta_0))\tan V$, soit $\rho(\theta_0)X - \rho'(\theta_0)Y = \rho^2(\theta_0)$, et son équation polaire est donc $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho(\theta_0)}\cos(\theta - \theta_0) - \frac{\rho'(\theta_0)}{\rho^2(\theta_0)}\sin(\theta - \theta_0)$. Les coefficients de cette équation s'interprètent géométriquement si TON est la parallèle à J passant par O, avec T sur la tangente TM en M et N sur la normale NM en M, car en faisant $X = 0$ dans l'équation de la tangente dans le repère $(O; I, J)$ il vient $OT = -\frac{\rho'(\theta_0)}{\rho^2(\theta_0)}$. En faisant aussi $X = 0$ dans l'équation $Y = -(X - \rho(\theta_0))\cot V$ de la normale, il vient $ON = \rho'(\theta_0)$.

Équation polaire de la tangente — *Si $\rho(\theta_0) = 0$ la tangente à $\rho = \rho(\theta)$ en O admet pour équation polaire $\theta = \theta_0$. Si $\rho(\theta_0) \neq 0$ la tangente à $\rho = \rho(\theta)$ en $[\rho(\theta_0), \theta_0]$ admet pour équation polaire* $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho(\theta_0)}\cos(\theta - \theta_0) - \frac{\rho'(\theta_0)}{\rho^2(\theta_0)}\sin(\theta - \theta_0)$.

Pour déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente, quand il ne s'agit pas d'un point d'inflexion ou de rebroussement, on détermine comme suit si la concavité ou la convexité de la courbe est tournée vers le pôle. Avec $\vec{i} = (1, 0)$ le vecteur unitaire suivant l'axe des x, on a $\theta = (\vec{i}, M)$, on pose $\varphi = (\vec{i}, M')$. Donc on a $\varphi = \theta + V$. On calcule φ'. La dérivée de $\tan V$ est $(1 + \tan^2 V)V'$ et vaut aussi $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)' = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}$, d'où l'on tire $V' = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}.\frac{\rho^2}{\rho'^2 + \rho'^2}$, $V' = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$, puis $\varphi' = 1 + V' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$. Or la concavité de la courbe est tournée vers le pôle si φ augmente. On a donc :

Face concave vers le pôle en équation polaire — *En coordonnées polaires la face concave est tournée vers le pôle si $\varphi' > 0$, c'est-à-dire si $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' > 0$.*

On obtient aussi ce fait en utilisant l'équation de la tangente $\rho(\theta_0)X - \rho'(\theta_0)Y - \rho^2(\theta_0) = 0$. En effet le signe de $\rho(\theta_0)X - \rho'(\theta_0)Y - \rho^2(\theta_0)$ nous dit de quel côté de la tangente est le point (X, Y). Pour $O = (0, 0)$ l'expression vaut $-\rho^2(\theta_0) < 0$, donc (X, Y) est du même côté de la tangente que O si $\rho(\theta_0)X - \rho'(\theta_0)Y - \rho^2(\theta_0) < 0$. Et la concavité est tournée vers O si les points voisins de M sur la courbe sont du même côté de la tangente que O. Or on a $OM = \rho I$, $OM' = \rho' I + \rho J$, $OM'' = (\rho'' - \rho)I + 2\rho' J$ — en entendant ρ, ρ' et ρ'' en θ_0 — et un point Q voisin de M s'écrira, avec θ assez petit, à d'ordre 2, par $OQ = OM + OM'(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}OM''(\theta - \theta_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2\epsilon(\theta - \theta_0)$, soit donc $OQ = \rho I + (\rho' I + \rho J)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}((\rho'' - \rho)I + 2\rho' J)(\theta - \theta_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2\epsilon(\theta - \theta_0)$, ce qui s'écrit encore $OQ = \left(\rho + \rho'(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}(\rho'' - \rho)(\theta - \theta_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2\epsilon_1(\theta - \theta_0)\right)I + \left(\rho(\theta - \theta_0) + \rho'(\theta - \theta_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2\epsilon_2(\theta - \theta_0)\right)J$. Alors si l'on calcule pour $OQ = (X, Y)$ il vient $\rho X - \rho' Y - \rho^2 = \frac{1}{2}(\rho\rho'' - 2\rho'^2 - \rho^2)(\theta - \theta_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2\eta(\theta - \theta_0)$.

En fait si l'on calcule avec $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$ les dérivées par rapport à θ on obtient les formules $x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2$ et $x'y'' - x''y' = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$, d'où l'on tire la courbure :

Courbure en équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ — *Au point $[\rho, \theta]$ de la courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ le rayon de courbure vaut*

$$R = \frac{(\rho + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}.$$

2.6. Courbes planes rationnelles. Une courbe plane est dite *rationnelle* si les coordonnées du point courant sur cette courbe sont des fonctions fractions rationnelles d'un paramètre t, c'est-à-dire si l'on a $x = x(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, $y = y(t) = \frac{R(t)}{S(t)}$, où P, Q, R et S sont des polynômes en t.

Une droite, d'équation $ax + by + c = 0$ est une courbe rationnelle, car pour tout point $A = (p, q)$ sur cette droite, c'est-à-dire tel que $ap + bq + c = 0$, on peut donner le paramétrage $x = bt + p, y = -at + q$.

Un cercle aussi est une courbe rationnelle. En effet, soit dans le plan deux points $A = (p, q)$ et $A' = (p', q')$, et le cercle Γ de diamètre AA' : nous allons en écrire un paramétrage rationnel. Un point $M = (x, y)$ est sur ce cercle si et seulement si le triangle $AA'M$ est rectangle en M, soit, d'après Pythagore si et seulement si $AA'^2 = AM^2 + A'M^2$, soit $(x-p)^2 + (y-q)^2 + (x-p')^2 + (y-q')^2 = (p-p')^2 + (q-q')^2$, ce qui se réduit à $x^2 + y^2 - (p+p')x - (q+q')y + pp' + qq' = 0$. Alors la droite D passant par A et d'équations paramétrées $x = bt + p, y = -at + q$ rencontre le cercle en deux points, le point A et un point $M_{a,b}$, éventuellement confondu avec A si la droite est tangente au cercle. On trouve ces points sur D pour les valeurs de t telles que $(bt + p)^2 + (-at + q)^2 - (p + p')(bt + p) - (q + q')(-at + q) + pp' + qq' = 0$, c'est-à-dire $t\big((a^2 + b^2)t + b(p - p') - a(q - q')\big) = 0$. Le point A correspond à $t = 0$, et le point $M_{a,b}$ à la valeur $t = \frac{a(q-q') - b(p-p')}{a^2 + b^2}$, les coordonnées de ce point étant donc $x = b\frac{a(q-q') - b(p-p')}{a^2 + b^2} + p$ et $y = -a\frac{a(q-q') - b(p-p')}{a^2 + b^2} + q$, soit $x = \frac{pa^2 + (q-q')ab + p'b^2}{a^2 + b^2}$ et $y = \frac{q'a^2 + (p-p')ab + qb^2}{a^2 + b^2}$. Si l'on considère l'angle ψ entre l'axe Ox et la droite $AM_{a,b}$, on peut supposer que l'on a pris $b = \cos\psi$ et $a = -\sin\psi$, soit $-\frac{a}{b} = \tan\psi = v$, et utiliser au lieu de a et b le seul paramètre v ; on écrit alors $M_{a,b} = M_v$.

Avec v les coordonnées de M_v sont donc $x_v = \frac{pv^2+(q-q')v+p'}{1+v^2}$, $y_v = \frac{q'v^2+(p-p')v+q}{1+v^2}$.

♣ Exercices

1 — Faire les dessins des quatre formes de l'énoncé du théorème de classification des points d'une courbe paramétrée. Donner des exemples explicites.

2 — On pose $x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, y(t) = t^2 + \frac{2}{t-2}$. Étudier la forme de la courbe au voisinage du point de paramètre $t = 1$.

3 — On considère la courbe plane paramétrée $M(t) = \left(x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{(t-2)^2}{t^2-1}\right)$. Montrer qu'elle admet $y = 1$ pour asymptote pour t au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et $x = -\frac{1}{2}$ pour t au voisinage de -1. Montrer que la droite $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{2}$ est une asymptote oblique pour t au voisiinage de $+1$. Montrer que le point $M(2)$ est un point de rebroussement de première espèce. Montrer que la pente au point $M(2)$ est $\frac{1}{3}$. Dessiner la courbe.

4 — Déterminer la courbure en un point de la parabole $y = x^2$.

5 — On considère l'ellipse $M(t) = (a\cos t, b\sin t)$, et l'on pose $a^2 + b^2 = c^2$. Montrer que le centre de courbure au point $M(t)$ est $C(t) = (\frac{c^2}{a}\cos^3 t, \frac{-c^2}{b}\sin^3 t)$.

6 — Montrer que la courbe plane $M(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ est la trajectoire d'un point fixé sur un cercle qui roule sur une droite fixe. On l'appelle la *cycloïde*. Déterminer ses points de rebroussement. Déterminer sa courbure en chaque point. Montrer que le lieu de ses centres de courbures est une autre cycloïde.

7 — Montrer que la *lemniscate* de Bernouilli d'équation polaire $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ a pour rayon de courbure en un point où $\rho \neq 0$ $R = \frac{a}{3\rho}$. Montrer que l'origine est un point double, et y déterminer les deux tangentes. Dessiner la courbe.

8 — On considère la *cardioïde* d'équation polaire $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$. Quelle est la nature du point 0 ? Dessiner la courbe.

9 — Déterminer les points multiples de la courbe $M(t) = (t^2 - 2t, t^2 + t^{-2})$.

10 — Trouver le centre de symétrie de la courbe d'équation $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$, $y(t) = 2t^3 - 6t^2 + 13t + 11$. ♣

COURS 3 (08/02/06) — **Normale et plan tangent en un point d'une surface paramétrée. Gradient et ligne de niveau. Différentielle. Tangentes aux courbes planes implicites, plans tangents aux surfaces implicites. Polaires relativement aux quadriques.**

3.1. Fonctions continues de deux variables.

Soit $a < b$ et $c < d$ des réels, et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R} : m = (x,y) \mapsto f(m) = f(x,y)$ une fonction de deux variables réelles x et y à valeurs réelles $f(x,y)$, et soit $m_0 = (u,v) \in]a,b[\times]c,d[$. On dit que f est *continue* en m_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $m = (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} < \delta$ implique $|f(x,y) - f(u,v)| < \varepsilon$. Alors, si l'on fixe $x = u$ ou si l'on fixe $y = v$, les deux fonctions d'une variable $f(u,-) : y \mapsto f(u,v)$ et $f(-,v) : x \mapsto f(x,v)$ sont continues, en v et en u respectivement. Et de même, pour tous a et b fixés avec $a^2 + b^2 = 1$, la fonction $t \mapsto f(u+at, v+bt)$ est continue en $t = 0$. Mais la réciproque est fausse en général. Ainsi la fonction$f(x,y)$ qui vaut $\frac{xy^3+x^3y}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et qui vaut 0 en $(0,0)$ est continue en x et en y au point $(0,0)$ mais n'est pas continue de (x,y). Par contre, f est continue si et seulement si pour toutes fonctions continues en $t = 0$, $g(t)$ et $h(t)$, avec $g(0) = h(0) = 0$, la fonction $t \mapsto f\Big(u + g(t), v + h(t)\Big)$ est continue en 0.

3.2. Dérivées partielles et directionnelles pour l'étude des fonctions $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ sur la courbe d'équation $x = x(t), y = y(t)$.

Soit $a < b$ et $c < d$ des réels, et $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R} : m = (x,y) \mapsto f(m) = f(x,y)$ une fonction de deux variables réelles x et y à valeurs réelles $f(x,y)$. Le graphe Γ_f est la surface d'équation $z = f(x,y)$, soit $\Gamma_f = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3; z = f(x,y), x \in [a,b], y \in [c,d]\}$.. On fixe $u \in]a,b[$, $v \in]c,d[$, le point $m_0 = (u,v)$ et dans $\mathbb{R}^3$ le point $M_0 = \big(u,v,f(u,v)\big)$. Soit aussi $\vec{n} = (\alpha,\beta)$ un vecteur unitaire ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$). On appelle *dérivée directionnelle* de f en m_0 dans la direction $\vec{n}$ la limite, si elle existe

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v) = \lim_{t\to 0} \Big[\frac{f(u+\alpha t, v+\beta t) - f(u,v)}{t}\Big].$$

En particulier en prenant $\vec{n} = (1,0)$ puis $\vec{n} = (0,1)$ on introduit les *dérivées partielles* :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = \lim_{t\to 0} \Big[\frac{f(u+t,v) - f(u,v)}{t}\Big], \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = \lim_{t\to 0} \Big[\frac{f(u,v+t) - f(u,v)}{t}\Big].$$

Dérivée directionnelle — *Si pour m_0m suffisamment petit la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe, et si elle est continue en (u,v), et si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)$ existe, alors pour tout $\vec{n}$ la* dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v)$ *existe et vaut*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v) = \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(u,v).$$

En effet on a alors : $\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = \alpha \lim_{\alpha t_1\to 0}\left(\frac{f(u+\alpha t_1,v)-f(u,v)}{\alpha t_1}\right) + \beta\lim_{t_2\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u+\alpha t_2, v\right)$
$= \lim_{t_1\to 0}\left(\frac{f(u+\alpha t_1,v)-f(u,v)}{t_1}\right) + \beta\lim_{t_2\to 0}\left(\lim_{\beta t_3\to 0}(\frac{f(u+\alpha t_2,v+\beta t_3)-f(u+\alpha t_2,v)}{\beta t_3})\right) =$
$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(u+\alpha t,v)-f(u,v)}{t}\right) + \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(u+\alpha t,v+\beta t)-f(u+\alpha t,v)}{t})\right) =$
$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(u+\alpha t,v)-f(u,v)+f(u+\alpha t,v+\beta t)-f(u+\alpha t,v)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(u+\alpha t,v+\beta t)-f(u,v)}{t}\right) = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v).$

On peut alors énoncer un résultat que l'on montrera au début du quatrième cours, et qui permet d'étudier les fonctions $F(t) = f\big(x(t),y(t)\big)$:

Dérivée de $F(t) = f\big(x(t),y(t)\big)$ en t_0 — *Si les dérivées et dérivées partielles en jeu existent et sont continues au voisinage de t_0 et de $(u,v) = (x(t_0),y(t_0))$, alors on a*

$$\frac{d}{dt}f(x(t_0),y(t_0)) = F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))y'(t_0).$$

3.3. Dérivée directionnelle, et plan tangent à $z = f(x,y)$, développement à l'ordre 1 de $f(x,y)$.

Partons de la formule de dérivation directionnelle que nous venons d'obtenir : $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v) = \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$.

Pour $\vec{n}$ fixé, lorsque t varie, le point $m_{t,\vec{n}} = (u+\alpha t, v+\beta t)$ se déplace sur la droite $D_{\vec{n}}$ passant par le point $m_0 = (u,v)$ et parallèle au vecteur $\vec{n}$. Le plan vertical $\Pi_{\vec{n}}$ passant par $D_{\vec{n}}$ coupe la surface Γ_f suivant une courbe $\Gamma_{f,\vec{n}}$, constitué donc des points $M_{t,\vec{n}} = \big(u+\alpha t, v+\beta t, f(u+\alpha t, v+\beta t)\big)$, passant par le point $M_0 = \big(u,v,f(u,v)\big)$. On pose $\vec{i} = (1,0,0)$,

$\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, et la base $\kappa = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est appelée la *base canonique*. Quand besoin est, le vecteur $\vec{n} = (\alpha,\beta)$ de $\mathbb{R}^2$ est vu dans $\mathbb{R}^3$ comme $\vec{n} = (\alpha,\beta,0)$. Alors dans le plan $\Pi_{\vec{n}}$ rapporté au repère orthonormé $(m_0, \vec{n}, \vec{k})$ la courbe $\Gamma_{f,\vec{n}}$ est constituée des points $\big(t, f(u+\alpha t, v+\beta t)\big)$, et son équation est donc $z = F(t)$, avec $F(t) = f(u+\alpha t, v+\beta t)$. On a $F'(0) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(u+\alpha t,v+\beta t)-f(u,v)}{t}\right] = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v) = \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$. La direction de la tangente en M_0 à $\Gamma_{f,\vec{n}}$ est donc, dans ce repère $(m_0, \vec{n}, \vec{k})$, donnée par le vecteur $(1, F'(0))$, soit, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, par le vecteur $1\vec{n} + F'(0)\vec{k}$ soit $\big(\alpha, \beta, \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\big)$ dans la base canonique κ. Un point quelconque sur la tangente en M_0 à $\Gamma_{\vec{n}}$ est donc de la forme $\big(u + k\alpha, v + k\beta, f(u,v) + k\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + k\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\big)$, $k \in \mathbb{R}$.

Quand $\vec{n} = (\alpha,\beta)$ varie, en posant $t\alpha = A$ et $t\beta = B$, un point quelconque sur l'une quelconque des tangentes en M_0 aux diverses $\Gamma_{\vec{n}}$ est de la forme $P = \big(u + A, v + B, f(u,v) + A\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + B\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\big)$, pour $A, B \in \mathbb{R}$ quelconques. Ces points sont donc caractérisés comme les $P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que, en posant $x - u = A$ et $y - v = B$ on ait $z = f(u,v) + \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)(x-u) + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)(y-v)$.

Plan tangent — *Si pour m_0m suffisamment petit la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe, et si elle est continue en (u,v), et si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)$ existe, alors le plan d'équation*

$$z - f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-u) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-v)$$

est constitué des tangentes en $M_0 = (u,v,f(u,v))$ aux courbes $\Gamma_{f,\vec{n}}$, qui sont les sections planes verticales de Γ_f, et on le nomme plan tangent à Γ_f en M_0.

Soit donc $x - u = A$, $y - v = B$, $t = \sqrt{A^2 + B^2} = \|\vec{h}\|$, $\vec{h} = (A,B)$, $\frac{1}{t}\vec{h} = \vec{n} = (\alpha,\beta)$. donc $t\alpha = A$, $t\beta = B$. Le développement limité de $F(t) = f(u+\alpha t, v+\beta t)$ en 0 est donné par $F(t) = F(0) + F'(0)t + t\varepsilon_{\alpha,\beta}(t)$, où $\varepsilon_{\alpha,\beta}(t) \to 0$ quand $t \to 0$, c'est-à-dire que l'on a $f(u+\alpha t, v+\beta t) = f(u,v) + \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v)t + t\varepsilon_{\alpha,\beta}(t)$, soit :

Dvéloppement limité de $f(x,y)$ à l'ordre 1 — *Dans les conditions précédentes on a*

$$f(u+A, v+B) = f(u,v) + \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)A + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)B + \sqrt{A^2+B^2}\,\varepsilon\big((A,B)\big),$$

$$\text{où } \varepsilon\big((A,B)\big) \to 0 \text{ si } \sqrt{A^2+B^2} \to 0.$$

*En fait $\sqrt{A^2+B^2}\,\varepsilon\big((A,B)\big)$ est l'*écart vertical $f(u+A, v+B) - z$ *entre $\big(u+A, v+B, f(u+A, v+B)\big)$ sur Γ_f et le point correspondant $(u+A, v+B, z)$ sur le plan tangent à Γ_f en $M(u,v)$.*

3.4. Normale à une surface paramétrée, à $z = f(x,y)$.

Une *surface paramétrée* Σ est décrite comme

$$\Sigma = \{M = (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3; X = X(x,y), Y = Y(x,y), Z = Z(x,y), (x,y) \in [a,b] \times [c,d]\}.$$

Les dérivées partielles ou directionnelles de $M(x,y) = \big(X(x,y), Y(x,y), Z(x,y)\big)$ sont définies et calculées "composantes par composantes" : $\frac{\partial M}{\partial x} = (\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial x})$, $\frac{\partial M}{\partial y} = (\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial y})$, $\frac{\partial M}{\partial \vec{n}} = (\frac{\partial X}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial Y}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial Z}{\partial \vec{n}})$, et, puisque l'on sait déjà que cela est vrai "composantes par composantes" on a bien, si $\frac{\partial M}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)$ existent au voisinage de $m_0 = (u,v)$ et sont continues en m_0:

$$\frac{\partial M}{\partial \vec{n}}(u,v) = \alpha\frac{\partial M}{\partial x}(u,v) + \beta\frac{\partial M}{\partial y}(u,v).$$

Ainsi quand $\vec{n} = (\alpha,\beta)$ varie, le vecteur $\frac{\partial M}{\partial \vec{n}}(u,v)$ parcours le plan vectoriel engendré par $\frac{\partial M}{\partial x}(u,v)$ et $\frac{\partial M}{\partial y}(u,v)$, c'est-à-dire le plan orthogonal au vecteur

$$N(u,v) = \frac{\partial M}{\partial x}(u,v) \wedge \frac{\partial M}{\partial y}(u,v).$$

Plan tangent et normale — *Le* plan tangent *à la surface paramétrée Σ au point $M_0 = M(u,v)$ a pour équation*

$$N(u,v).\vec{M_0M} = 0,$$

la direction du vecteur $N(u,v)$ est dite normale *en M_0 à Σ, et ce vecteur $N(u,v)$ dépendant du paramétrage est dit* normal associé .

Considérons maintenant le cas particulier où $M = \big(x, y, f(x,y)\big)$, avec Σ le graphe Γ_f.

On a $\frac{\partial M}{\partial x}(u,v) = \big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\big)$, $\frac{\partial M}{\partial y}(u,v) = \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\big)$, et ainsi $\frac{\partial M}{\partial \vec{n}}(u,v) = \big(\alpha, \beta, \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(u,v).\big)$, et l'on a $N(u,v) = \big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\big) \wedge \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\big)$, soit

$$N(u,v) = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(u,v), -\frac{\partial f}{\partial y}(u,v), 1\Big).$$

Avec $\big(x-u, y-v, z-f(u,v)\big) = \vec{M_0M}$, le plan tangent à Γ_f en $M_0 = (u,v)$ voit bien son équation

$$z - f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-u) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-v)$$

s'écrire

$$N(u,v).\vec{M_0M} = 0.$$

3.5. Gradient et ligne de niveau.

On définit le *gradient* en (u,v) de la fonction f comme le vecteur

$$\nabla f(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) \end{pmatrix}.$$

Avec $\vec{m_0m} = \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix}$, l'équation du plan tangent à $z = f(x,y)$ que nous avons déjà établie s'écrit donc :

$$\nabla f(u,v).\vec{m_0m} = z - f(u,v).$$

Cette quantité s'appelle l'*accroissement linéaire* de f en (u,v) correspondant à l'accroissement des variables $\vec{m_0m}$. On ne le confondra pas avec l'accroissement de f, qui est $f(x,y) - f(u,v)$, dont l'accroissement linéaire est une première approximation.

Plan tangent et normale à $z = f(x,y)$, et gradient de f — *Pour une surface $z = f(x,y)$ et un point $M_0 = (u,v,f(u,v))$ il est équivalent de connaître en ce point l'équation du plan tangent, ou la normale associée N, ou le gradient ∇f.*

$\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$ signifie que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ ou que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Dans le second cas, la tangente en (x_0,y_0) à la courbe $f(x,y) = 0$ a pour équation $y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$, avec $y = \varphi(x)$ l'explicitation supposée exister de $f(x,y) = 0$ au voisinage de (u,v), et dans le premier cas on échange les rôles entre x et y. De là résulte que :

Normale et tangente à une courbe de niveau $f(x,y) = c$ — *Si $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$, la tangente en (x_0,y_0) à la courbe $f(x,y) = c$ a pour équation*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0,$$

soit, avec $m_0 = (x_0,y_0)$ et $m = (x,y)$, et $\nabla f(x_0,y_0) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\big)$:

$$\nabla f(x_0,y_0).\vec{m_O m} = 0,$$

autrement dit le vecteur $\nabla f(x_0,y_0)$ est normal à la courbe $f(x,y) = 0$.

Si l'on pose $\alpha_0|\nabla f(u,v)| = \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)$ et $\beta_0|\nabla f(u,v)| = \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$, le vecteur $\vec{n_0}$ est le vecteur unitaire dans la direction $\nabla f(u,v)$, et la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \vec{n_0}}(u,v)$ est donc aussi appelée la dérivée de f en (u,v) dans la direction $\nabla f(u,v)$. On vérifie immédiatement que

Caractérisation intrinsèque de ∇f — *Dans la direction $\nabla f(u,v)$ la dérivée vaut en module $|\frac{\partial f}{\partial \vec{n_0}}(u,v)| = |\nabla f(u,v)|$, et pour toute autre direction $\vec{n}$ on a $|\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v)| \leq |\nabla f(u,v)|$.*

3.6. Notation différentielle.

Différentielles d'ordre 1 — Soit $f(x)$ une fonction dérivable de x. On définie $df(x,A)$ une fonction de x et de A par

$$df(x,A) = f'(x)A.$$

En abrégé on note df cette fonction, et on l'appelle la *différentielle* de f. Si l'on considère la fonction x, la différentielle de cette fonction est notée dx. On a donc $dx(x,A) = A$, et par suite on peut écrire

$$\frac{df}{dx} = f'(x).$$

Si $f(x,y)$ admet des dérivées partielles en x et en y, on définie la *différentielle* $df(x,y,A,B)$ par

$$df(x,y,A,B)=\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)A+\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)B,$$

et notamment pour la fonction x des deux variables x et y, on note dx la différentielle qui vaut $dx(x,y,A,B)=A$ et de même $dy(x,y,A,B)=B$. On a donc

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy,$$

Si l'on pose $dm=\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$, on a donc

$$df=\nabla f.dm.$$

3.7. Le cas des quadriques. Plans tangents et plan polaires.

Une *quadrique* est une surface d'équation $P(x,y,z)=0$, où $P(x,y,z)$ est un polynôme du second degré. Sans démonstration énonçons :

Classification des quadriques — *Par translation de l'origine et puis rotation du système orthonormé des axes autour d'un axe passant par l'origine nouvelle — c'est-à-dire par* déplacement *— on peut ramener toute équation du second degré*

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+gx+Hy+Kz+L=0$$

à l'une des 17 formes suivantes :

1 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
(Ellipsoïde, dont ellipsoïde de révolution et sphère.)

2 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
(Hyperboloïde à une nappe.)

3 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
(Hyperboloïde à deux nappes.)

4 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
(Cône du second degré.)

5 — $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$
(Paraboloïde elliptique.)

6 — $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$
(Paraboloïde hyperbolique.)

7 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
(Cylindre elliptique.)

8 — $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
(Cylindre hyperbolique.)

9 — $y^2=2px$
(Cylindre parabolique.)

10 — $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
(Couple de plans sécants.)

11 — $\frac{x^2}{a^2}=0$
(Couple de plans parallèles.)

12 — $x^2=0$
(Couple de plans confondus.)

13 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
(Cône imaginaire du second degré de sommet réel.)

14 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
(Couple de plans imaginaires, se coupant suivant une droite réelle.)

15 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
(Ellipsoïde imaginaire.)

16 — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
(Cylindre elliptique imaginaire.)

17 — $\frac{x^2}{a^2}=-1$
(Couple de plans parallèles imaginaires.)

♣ EXERCICES

1 — Déterminer le plan tangent en $(u,v)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ à la surface $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

2 — On considère la surface Σ d'équation $z=x^2-xy+y^2$. Existe-t-il des points où le plan tangent à Σ soit horizontal?

3 — Soit Σ la surface $z=xy$. Donner l'équation du plan tangent en (x,y).

4 — Soit Σ la surface paramétrée de point courant $M(x,y)=(x^2,xy,y^2)$. Déterminer son plan tangent au point $M(0,0)$.

5 — On pose $f(x,y)=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$, avec $p>0$ et $q>0$ deux réels fixés, et on considére la surface Γ_f d'équation $z=f(x,y)$, que l'on appelle un *paraboloïde hyperbolique*. Déterminer le plan tangent à Γ_f au point $(0,0,0)$. Le point $(0,0,0)$ est un "point selle" : expliquer ce que cela veut dire, en montrant comment le point $(0,0,0)$ n'est pas un extremum local.

6 — On considère la surface $z = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$. Montrer que ces lignes de niveaux sont des ovales de Cassini, et notamment que la section par le plan $z = 0$ est une lemniscate de Bernoulli.

7 — Faire les dessins des 17 quadriques, ou du moins de leurs éléments réels. ♣

COURS 4 (15/02/06) — **Dérivées de composées, formule de Taylor à 2 variables à l'ordre 2 et extremum de $f(x,y)$. Formule de Taylor à l'ordre n, pour les fonctions de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.**

4.1. Dérivée de fonctions composées et de fonctions implicites.

Considérons $f(x,y)$ continue, admettant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues, au voisinage d'un point (u,v). on a donc $f(u+A,v+B)-f(u,v) = [f(u+A,v+B)-f(u,v+B] + [f(u,v+B)-f(u,v)]$, et on peut appliquer la formule de développement limité à chacun de ces deux accroissements, ce qui donne : $[f(u+A,v+B)-f(u,v+B] = \frac{\partial f}{\partial x}(u,v+B)A + A\varepsilon_u(A)$, $[f(u,v+B)-f(u,v)] = \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)B + B\varepsilon_v(B)$, donc

Développement limité de $f(x,y)$ à l'ordre 1 [variante] — *Dans les conditions précédentes on a*

$$f(u+A,v+B)-f(u,v) = \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(u,v+B)+\varepsilon_u(A)\Big]A + \Big[\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)B] + \varepsilon_v(B)\Big]B,$$

où $\varepsilon_u(A)$ et $\varepsilon_v(B)$ tendent vers 0 le premier avec A, le second avec B.

Supposons de plus que $x = x(t)$ et $y = y(t)$ soient des fonctions continues et dérivables de $t \in [p,q]$ au voisinage de $t_0 \in [p,q]$, et posons $u = x(t_0)$, $v = x(t_0)$. On considère alors la fonction de t donnée par $F(t) = f\big(x(t),y(t)\big)$ et on détermine sa dérivée en t_0 :

Dérivée de $F(t) = f\big(x(t),y(t)\big)$ en t_0 — *Sous les hypothèses précédentes F est dérivable en t_0 et*

$$\frac{d}{dt}f(x(t_0),y(t_0)) = F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))y'(t_0).$$

En effet en divisant les deux membres de la "variante" ci-dessus du développement limité et en faisant tendre t vers t_0 on obtient directement la formule indiquée.

On observe le cas particulier de la dérivation de $F(x,y) = xy$, $x = f(t)$, $y = y(t)$, donnant la *dérivée d'un produit* $f(t)g(t)$ sous la forme $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.

Un autre cas particulier fréquent est celui où $y(t) = t$, c'est-à-dire celui de la fonction de t donnée par $F(t) = f(x(t),t)$, dont la dérivée qui vaut $\big(f(x(t),t)\big)' = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),t)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),t)$ est dite *dérivée totale* de f par rapport à t, et noté aussi $\frac{d}{dt}f(x(t),t)$, et ne doit donc pas être confondue avec la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),t)$, surtout quand il arrive de noter naturellement cette dernière $\frac{\partial f}{\partial t}(x(t),t)$. On note donc

$$\frac{d}{dt}f(x(t),t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),t)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t),t).$$

Un autre cas particulier important encore est celui où $y(t) = 0$, qui donne la *dérivée d'une fonction composée* de la forme $h(g(t))$, dérivée qui vaut

$$\big(h(g(t))\big)' = h'(g(t))g'(t).$$

De ce cas relève la *dérivation de fonctions réciproques* : si $f : [a,b] \to [c,d]$ et $g : [c,d] \to [a,b]$ sont deux fonctions dérivables réciproques, c'est-à-dire telles que pour tout $x \in [a,b]$ et tout $y \in [c,d]$ on ait $f(x) = y$ si et seulement si $x = g(y)$, soit $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$. Alors en dérivant par rapport à y l'identité $f(g(y)) = y$ on obtient $f'(g(y))g'(y) = 1$, où $f'(g(y))$ est la dérivée de $f(x)$ par rapport à x au point $g(y)$, d'où la formule $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$. Si l'on note $f = g^{-1}$, on a donc

$$g^{-1\prime}(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}.$$

Enfin la formule s'applique pour trouver la dérivée par rapport à x d'une fonction *implicite* y de x, définie par une identité$f(x,y) = 0$. En effet s'il est possible que y soit par là définie comme une fonction drivable de x, soit $y = \varphi(x)$, alors on a $f(x,\varphi(x)) = 0$, identiquement en x. Cette dernière fonction de x étant constante (nulle), sa dérivée par rapport à x est nulle ; mais cette dérivée vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x) = 0.$:

Dérivée de fonction implicite $f(x,y) = 0$ — *Si $y = \varphi(x)$, avec φ dérivable, est déterminé implicitement par $f(x,y) = 0$, avex f dérivable, et si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ alors*

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

4.2. Différentiation et différentielles des fonctions composées, matrices jacobiennes.

La formule $\frac{d}{dt} f(x(t_0), y(t_0)) = F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))y'(t_0)$ vue ci-avant, donne maintenant si x et y sont fonctions de u et v, soit $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$, pour la fonction $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, en l'appliquant pour $t = u$ puis pour $t = v$, les dérivées

Dérivées partielles composées —

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \qquad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial v}(u, v).$$

Différentielles composées — *1 — Si f est fonction de x et y et x et y fonctions de t, la définition* formelle *du troisième cours*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

peut être divisée par dt, et donne alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d}{dt}f = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y', \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right)dt.$$

2 — Si f est fonction de x et y, et x et y fonctions de u et v, alors si dans

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

on rermplace dx par $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$ et dy par $dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$, alors on obtient effectivement

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right]du + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right]dv.$$

Une *matrice* de type 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un tableau

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$, alors on définit la matrice *produit $M'M$* par

$$M'M = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + c'b & a'c + c'd \\ b'a + d'b & b'c + d'd \end{pmatrix}.$$

Soit alors $w : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une fonction définie par $w(u, v) = \Big(x(u, v), y(u, v)\Big)$. On appelle *matrice jacobienne* de w la matrice

$$J(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Jacobienne et changement de variable dans les gradients — *Avec les notations ci-dessus, on a si $F(u, v) = f(x, y)$ avec $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$, soit $(x, y) = w(u, v)$, la formule*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix},$$

soit

$$\nabla F = J(w)^\top \nabla f,$$

oò $J(w)^\top$ est la transposée de la matrice jacobienne *$J(w)$ de w.*

PRODUIT DES MATRICES JACOBIENNES — *Soit $f(u,v) = (x,y)$, $g(x,y) = (X,Y)$, et $h(u,v) = g(f(u,v)) = (X,Y)$, définies et dérivables sur des rectangles appropriés. Alors on a*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix},$$

soit

$$J(h) = J(g \circ f) = J(g)J(f).$$

Un exemple très important est le cas des *coordonnées polaires*. Soit $(x,y) = \mathrm{cart}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées polaires $[r,\theta]$, et $[r,\theta] = \mathrm{pol}(x,y) = \left[\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right]$ les coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes (x,y). Alors, avec $r \neq 0$, soit $x^2+y^2 \neq 0$,

$$J(\mathrm{cart}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad J(\mathrm{pol}) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

4.3. Lemme de Schwarz et Formule de Taylor à 2 variables à l'ordre 2.

LEMME DE SCHWARZ — *Si $f(x,y)$ admet dans $]a,b[\times]c,d[$ des dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ elles-mêmes dérivables, la première par rapport à y et la seconde par rapport à x, et si ces dérivées sont continues, alors elles sont égales :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

En effet, considérons l'expression $W(u,v) = f(u+A,v+B)-f(u+A,v)-f(u,v+B)+f(u,v)$, posons $D(u,v) = f(u+A,v)$ et $G(u,v) = f(u,v+B) - f(u,v)$, de sorte que $W(u,v) = D(u,v+B) - D(u,v)$ et $W(u,v) = G(u+A,v) - G(u,v)$. On peut alors appliquer la formule des accroissements finis de Lagrange deux fois à D et deux fois à G. On obtient :

$W = B\frac{\partial D}{\partial y}(u, v+\theta_1 B) = B[\frac{\partial f}{\partial y}(u+A, v+\theta_1 B) - \frac{\partial f}{\partial y}(u, v+\theta_1 B)] = BA\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(u+\theta_2 A, v+\theta_1 B)$,

$W = A\frac{\partial G}{\partial x}(u+\theta_3 A, v) = A[\frac{\partial f}{\partial x}(u+\theta_3 A, v+B) - \frac{\partial f}{\partial x}(u+\theta_3 A, v)] = AB\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(u+\theta_3 A, v+\theta_4 B)$,

d'où $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(u+\theta_2 A, v+\theta_1 B) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(u+\theta_3 A, v+\theta_4 B)$, et le résultat en passant à la limite.

FORMULE DE TAYLOR À 2 VARIABLES À L'ORDRE 2 — *Si $f(x,y)$ admet dans $]a,b[\times]c,d[$ au voisinage de (u,v) des dérivées partielles continues jusqu''a l'ordre 3, alors on a :*

$$f(u+A, v+B) =$$
$$f(u,v) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)A + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)B\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v)A^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}AB + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}B^2\right) + (A^2+B^2)\varepsilon(A,B),$$

où $\varepsilon(A,B) \to 0$ quand $(A,B) \to 0$.

On montre la formule en appliquant à la fonction $F(t) = f(u+\alpha t, v+\beta t)$ la formule de Taylor à une variable à l'ordre 2, soit $F(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$, avec $A = \alpha t$, $B = \beta t$, $\alpha^2+\beta^2 = 1$. Avec la formule de dérivation de composées on a : $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u+\alpha t, v+\beta t)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(u+\alpha t, v+\beta t)\beta$, puis

$$F''(t) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+\alpha t, v+\beta t)\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u+\alpha t, v+\beta t)\beta\right)\alpha + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+\alpha t, v+\beta t)\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+\alpha t, v+\beta t)\beta\right)\beta =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+\alpha t, v+\beta t)\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+\alpha t, v+\beta t)\alpha\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+\alpha t, v+\beta t)\beta^2.$$

4.4. Problème d'extremum de $f(x,y)$.

On considère une fonction $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ et un point $m_0 = (u,v) \in]a,b[\times]c,d[$, et on recherche si en ce point la fonction f atteint un *maximum local*, c'est-à dire si, avec $m = (x,y)$ on a, pourvu que $m_0 \vec{m}$ soit suffisamment petit, $f(x,y) \leq f(u,v)$.

On va fixer une direction $\vec{n}$ dans le plan des (x,y) et se placer près de (u,v) et dans cette direction, soit en un point $(u+\alpha t, v+\beta t)$. Alors si l'on est en un maximum de Γ_f, on est aussi en un maximum de $\Gamma_{f,\vec{n}}$, d'équation z = F(t) dans le repère $(m_0, \vec{n}, \vec{k})$, et donc la dérivée $F'(0)$ est nulle, c'est-à-dire, par des calculs déjà vus, $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(u,v) = 0$, ou encore $alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0$. Mais comme cela doit avoir lieu pour toute direction $\vec{n}$, cela oblige à ce que $\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0$, c'est-à-dire à ce que $\nabla f(u,v) = 0$. Avec les relations que l'on vient de préciser entre gradient et plan tangent, on voit que cela signifie encore que le plan tangent en $m_0 = (u,v)$ est horizontal.

Condition nécessaire de maximum local — *Dans les conditions ci-dessus sur la fonction f et le point $m_0 = (u, v)$, pour que la fonction présente un maximum local au point, il est nécessaire que son plan tangent soit horizontal, c'est-à-dire que son gradient soit nul.*

Seconde condition nécessaire de maximum local — *Pour que l'on soit, dans les conditions précédentes, en présence d'un maximum local, il faut que dans chaque plan vertical engendré par $(m_0; \vec{n}, \vec{k})$ la section plane verticale $\Gamma_{f,\vec{n}}$ admette une tangente horizontale et soit localement sous cette tangente.*

La formule de Taylor à 2 variables à l'ordre 2 nous permet de donner une condition suffisante.

Condition suffisante de maximum local — *Soit une fonction $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ et un point $m_0 = (u, v) \in]a, b[\times]c, d[$. on suppose que f admet au voisinage de (u, v) des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 3, Pour que la fonction présente un maximum local en (u, v) il suffit que l'on ait*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) < 0.$$

En effet, on a alors $f(u + A, v + B) - f(u, v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v)A^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}AB + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}B^2\right) + (A^2 + B^2)\varepsilon(A, B)$, de même signe que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v)A^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}AB + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}B^2\right)$ pour (A, B) assez petit. Comme une expression de la forme $aX^2 + 2bX + c < 0$ pour tout réel X si $a < 0$ et $b^2 - ac < 0$, on conclut, avec $X = \frac{A}{B}$, $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v)$, $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v)$.

Cherchons maintenant, parmis les points de la courbe Γ d'équation $g(x, y) = 0$, ceux (u, v) où $f(x, y)$ atteint un maximum local sur Γ. Si $g(x, y) = 0$ s'écrit $y = \psi(x)$ au voisinage de (u, v), alors on cherche si$f(x, \psi(x))$ est maximum local pour $x = u$, et pour cela on demande au moins que la dérivée par rapport à x soit nulle en u, soit $\frac{d}{dx}(f(u, \psi(u)) = 0$, soit $\frac{\partial f}{\partial x}(u, \psi(u)) + \frac{\partial f}{\partial y}(u, \psi(u))\psi'(u) = 0$, et puisque $\psi'(u) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(u,v)}{\frac{\partial g}{\partial y}(u,v)}$, cela devient $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)}{\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(u,v)}{\frac{\partial g}{\partial y}(u,v)}$, ou encore : $\nabla f(u, v)$ et $\nabla g(u, v)$ sont collinéaires.

[Ensuite, une condition suffisante de maximum local sur Γ se dira : pour $F(x) = f(x, \psi(x))$ on a d'abord $F'(x) = 0$ — soit $\nabla f(u, v) = \lambda \nabla g(u, v)$ — et de plus $F''(x) < 0$. Le dernier point peut être développé avec $F(x) = f(x, \psi(x))$ et $G(x) = g(x, \psi(x)) = 0$, puis $F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \psi(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \psi(x)\big)\psi'(x)$, $G'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}\big(x, \psi(x)\big) + \frac{\partial g}{\partial y}\big(x, \psi(x)\big)\psi'(x) = 0$, puis
$G''(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\big(x, \psi(x)\big) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\big(x, \psi(x)\big)\psi'(x) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\big(x, \psi(x)\big)\psi'(x)^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\big(x, \psi(x)\big)\psi''(x) = 0$,
d'où l'on tire ψ'' que l'on reporte, ainsi que ψ', dans
$F''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(x, \psi(x)\big) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(x, \psi(x)\big)\psi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(x, \psi(x)\big)\psi'(x)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \psi(x)\big)\psi''(x)$.].

Condition nécessaire de maximum local de $f(x, y)$ sous la condition $g(x, y) = 0$. — *Soient f et g admettant des dérivées partielles continues. Si au point (u, v) de la courbe Γ d'équation $g(x, y) = 0$ la fonction $f(x, y)$ atteint un maximum local sur γ, si $\nabla g(u, v) \neq 0$, alors il existe un scalaire λ, dit* multiplicateur de Lagrange *tel que*

$$g(u, v) = 0, \quad \nabla f(u, v) = \lambda \nabla g(u, v).$$

4.5. Différentielles d'ordre supérieurs et Formule de Taylor d'ordre n d'une fonction numérique à 2 variables.

On connait la formule de Taylor d'ordre n pour les fonctions numériques d'une variable, soit des fonctions du type $F : \Omega \to \mathbb{R}$, avec $\Omega =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$, et aussi pour les fonctions vectorielles de dimension 2 d'une variable (ou courbes paramétrées planes) soit des fonctions du type $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, avec $\Omega =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ et encore la formule de Taylor d'ordre 2 pour les fonctions numériques de deux variables, soit des fonctions $F : \Omega \to \mathbb{R}$, avec $\Omega =]a, b[\times]c, d[\subseteq \mathbb{R}^2$. On va développer ensuite la formule de Taylor d'ordre n pour les fonctions vectorielles de dimension q, soit à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, de p variables, autrement dit des fonctions $F : \Omega \to \mathbb{R}^q$, avec $\Omega =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_p, b_p[\subseteq \mathbb{R}^p$.

Notation symbolique et différentielles d'ordres supérieures — Pour toute fonction $f(x, y)$ admettant des dérivées partielles à l'ordre n au voisinage du point (u, v), soit $d^n f(u, v)(A, B) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}A + \frac{\partial}{\partial y}B\right)^{(n)} f\right)(u, v)$, où plus légèrement $d^n f(A, B) = \left(\frac{\partial}{\partial x}A + \frac{\partial}{\partial y}B\right)^{(n)} f$ — lorsque le point (u, v) où l'on calcule est sous-entendu — le second membre s'entendant comme une *notation symbolique*, signifiant l'élévation de l'expression entre parenthèses à la puissance

n suivant la formule du binôme de Newton, et le remplacement des exposants apparaissant pour les $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ par des indications de l'ordre des dérivées. Explicitement on pose donc :

$$d^n f(A,B) = \left(\frac{\partial}{\partial x}A + \frac{\partial}{\partial y}B\right)^{(n)} f = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} A^k B^{n-k}.$$

Pour $\phi = \phi(x,y,A,B)$ une fonction de x, y, et A et B, on définit une nouvelle fonction $d\phi$ de x, y, et A et B, en posant

$$d\phi(x,y,A,B) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,A,B)A + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,A,B)B.$$

Ainsi si $\phi(x,y,A,B) = f(x,y)$ est une fonction ne dépendant pas en fait de A et B, cela donne donc $d\phi = df$, la différentielle déjà introduite au troisi 'eme cours, et puis on obtient,avec $\phi = d^{n-1}f$, $d(d^{n-1}f)(A,B) = d^n f(A,B)$.

Mise en garde — On ne confondra pas le calcul des d^n ici avec le calcul de la *différentielle extérieure d* sur les *formes différentielles* que l'on pourra rencontrer plus tard, et dans lequel on a $d^2 = 0$.

Avec ces notations différentielles, la formule de Taylor à l'ordre 2 devient

$$f(u+A, v+B) = f(u,v) + df(A,B) + \frac{1}{2}d^2 f(A,B) + (A^2+B^2)\varepsilon(A,B).$$

En dérivant $F(t) = f(u+\alpha t, v+\beta t)$ à l'ordre n on prouve exactement comme dans le cas $n = 2$ la

Formule de Taylor à 2 variables à l'ordre n — *Si $f(x,y)$ admet dans $]a,b[\times]c,d[$ au voisinage de (u,v) des dérivées partielles continues par rapport à x et par rapport à y jusqu'à l'ordre $n+1$ alors on a :*

$$f(u+A, v+B) = f(u,v) + df(u,v)(A,B) + \tfrac{1}{2}d^2 f(u,v)(A,B) + \cdots + \tfrac{1}{n!}d^n f(u,v)(A,B) + \left(\sqrt{A^2+B^2}\right)^n \varepsilon_n(A,B),$$

où $\varepsilon_n(A,B) \to 0$ quand $(A,B) \to 0$.

4.6. Formule de Taylor d'ordre n d'une fonction vectorielle à 2 variables (première version).

On donne ici une première version des faits. Une seconde expression s'obtiendrait comme cas particulier de la formule générale que l'on écrira plus loin en termes de fonctions dérivées successives pour les fonctions à p variables à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.

Soit, en notant maintenant plutôt les points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ comme des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on considère donc une fonction vectorielle de deux variables x et y, soit $F = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$, et on peut, comme on a fait au deuxième cours pour les courbes paramétrées, juxtaposer les développements de Taylor de f et de g au voisinage de (u,v). Il vient :

Formule de Taylor vectorielle à 2 variables à l'ordre n — *Si $f(x,y)$ et $g(x,y)$ admettent dans $]a,b[\times]c,d[$ au voisinage de (u,v) des dérivées partielles continues par rapport à x et par rapport à y jusqu'à l'ordre $n+1$ alors :*

$$\begin{pmatrix} f(u+A,v+B) \\ g(u+A,v+B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} df(u,v)(A,B) \\ dg(u,v)(A,B) \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} d^2 f(u,v)(A,B) \\ d^2 g(u,v)(A,B) \end{pmatrix} + \dots$$

$$+\tfrac{1}{n!}\begin{pmatrix} d^n f(u,v)(A,B) \\ d^n g(u,v)(A,B) \end{pmatrix} + \left(\sqrt{A^2+B^2}\right)^n \begin{pmatrix} \varepsilon_n(A,B) \\ \eta_n(A,B) \end{pmatrix},$$

où $\begin{pmatrix} \varepsilon_n(A,B) \\ \eta_n(A,B) \end{pmatrix} \to 0$ quand $(A,B) \to 0$.

4.7. Formule de Taylor d'ordre 1 d'une fonction vectorielle de dimension q à p variables, application linéaire tangente, fonction dérivée.

Jacobienne et différentielles — *Si $w = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$, alors on a $J\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df \\ dg \end{pmatrix}$, soit*

$$J(w)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df(A,B) \\ dg(A,B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df \\ dg \end{pmatrix}(A,B),$$

On a donc, comme cas particulier de l'énoncé précédent :

Formule de Taylor vectorielle à 2 variables à l'ordre 1 — *Si $f(x,y)$ et $g(x,y)$ admettent dans $]a,b[\times]c,d[$ au voisinage de (u,v) des dérivées partielles continues par rapport à x et par rapport à y jusqu'à l'ordre 2 alors avec $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ on a, pour tout $(A,B) \in \mathbb{R}^2$:*

$$F(u+A,v+B)=F(u,v)+J(F)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+\left(\sqrt{A^2+B^2}\right)\begin{pmatrix}\varepsilon_1(A,B)\\\eta_1(A,B)\end{pmatrix},\quad avec\ \begin{pmatrix}\varepsilon_1(A,B)\\\eta_1(A,B)\end{pmatrix}\to 0\ quand\ (A,B)\to 0.$$

Notion d'application linéaire tangente [cas particulier] — *Soit $f(x,y)$ et $g(x,y)$ admettant dans $]a,b[\times]c,d[$ au voisinage du* point $m=(u,v)\in]a,b[\times]c,d[$ *des dérivées partielles continues par rapport à x et par rapport à y jusqu'à l'ordre* 2. *On considère un* accroissement possible, *soit un $h=(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $m+h\in]a,b[\times]c,d[$. On pose $\|h\|=\sqrt{A^2+B^2}$. Alors la fonction $F=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}:]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}^2$ admet au point m une unique* application linéaire tangente *notée $T_mF:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ telle que*

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|F(m+h)-F(m)-(T_mF)(h)\|}{\|h\|}=0.$$

En effet l'existence résulte de l'énoncé précédent, il suffit de prendre $T_mF=J(F)$. L'unicité se voit en supposant que L et M soient deux solutions. L'inégalité triangulaire assure alors que puisque $\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|F(m+h)-F(m)-L(h)\|}{\|h\|}=0$ et $\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|F(m+h)-F(m)-M(h)\|}{\|h\|}=0$, on a aussi $\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|L(h)-M(h)\|}{\|h\|}=0$. Alors si $h=\lambda h_0$, avec $\|h_0\|=1$ la linéarité donne $\lim_{\|\lambda\|\to 0}\|L(h_0)-M(h_0)\|=0$, soit $L(h_0)=M(h_0)$, puis, par linéarité, $L(h)=M(h)$.

Notion de fonction dérivée [cas particulier] — *On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel réel des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers R^2, identifiable à l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, et encore identifiable à $\mathbb{R}^4$. On considère $\Omega=]a,b[\times]c,d[\subset\mathbb{R}^2$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

Soit

$$F\ :\Omega\to\mathbb{R}^2$$

une fonction admettant en tout point $m=(u,v)$ une application linéaire tangente T_mF. On appelle alors fonction dérivée *de F la fonction*

$$F'\ :\Omega\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)\ :m\mapsto F'(m)=(T_mF\ :\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2).$$

On passe aisément au cas de p variables pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.

Notion d'application linéaire tangente et formule de Taylor à l'ordre 1 [cas général] — *Soit $m=(u_1,\dots,u_p)\in\Omega=]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_p,b_p[\subseteq\mathbb{R}^p$ et $F=\begin{pmatrix}F_1\\\vdots\\F_q\end{pmatrix}:\Omega\to\mathbb{R}^q$. On suppose que les diverses composantes F_i de F admettent au point m des dérivées partielles $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(m)$, que l'on agence en une matrice jacobienne*

$$J(F)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_p}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial F_q}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_q}{\partial x_p}\end{pmatrix}.$$

On considère un accroissement possible, *soit un $h=(A_1,\dots,A_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que $m+h\in\Omega$, dont la norme euclidienne est notée $\|h\|=\sqrt{A_1^2+\cdots+A_p^2}$. On note aussi $\|y\|=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_q^2}$ la norme euclidienne de tout $y\in\mathbb{R}^q$.*

*Alors $J(F)$ est la matrice de l'*application linéaire tangente *à F en m, notée$T_mF:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, qui est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$ telle que*

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|F(m+h)-F(m)-(T_mF)(h)\|}{\|h\|}=0.$$

Réciproquement, si l'application linéaire tangente existe, alors la jacobienne existe, et toutes les dérivées partielles invoquées.

Enfin, cela s'écrit encore par une formule à la manière de Taylor :

$$F(m+h)=F(m)+T_mF(h)+\|h\|\epsilon(h), avec\quad \epsilon(h)\to 0\quad quand\quad h\to 0.$$

La preuve est comme ci-avant dans le cas $p=q=2$.

Application tangente à une fonction composée — *soit $F\ :\Omega\to\Lambda\subset\mathbb{R}^q$ et $G\ :\Lambda\to\mathbb{R}^r$. Si T_mF et $T_{F(m)}G$ existent, alors $T_m(G\circ F)$ existe et l'on a :*

$$T_m(G\circ F)=T_{F(m)}(G)\circ T_m(F).$$

Une première preuve serait basée sur la formule de composition des jacobiennes que l'on établi en dimension quelconques comme en dimension 2, et sur le fait que l'existence de l'application tangente équivaut à celle de la jacobienne. Mais nous préférerons la preuve plus directe que voici. On a $G(F(m+h)) = G(F(m) + T_m F(h) + ||h||\epsilon_1(h))$ soit, en posant $H = T_m F(h) + ||h||\epsilon_1(h)$, $G(F(m+h)) = G(F(m)) + T_{F(m)}(G)(H) + ||H||\epsilon_2(H)$, soit $G(F(m+h)) = G(F(m)) + T_{F(m)}(G)(T_m F(h) + ||h||\epsilon_1(h)) + ||H||\epsilon_2(H) = G(F(m)) + T_{F(m)}(G)(T_m F(h)) + T_{F(m)}(G)(||h||\epsilon_1(h)) + ||H||\epsilon_2(H) = G(F(m)) + T_{F(m)}(G)(T_m F(h)) + ||h|| T_{F(m)}(G)(\epsilon_1(h))) + ||H||\epsilon_2(H) = G(F(m)) + (T_{F(m)}(G) \circ T_m(F))(h) + ||h|| T_{F(m)}(G)(\epsilon_1(h))) + ||H||\epsilon_2(H)$. On conclut alors, du fait que $T_{F(m)}(G)(\epsilon_1(h))) \to 0$ quand $h \to 0$ et du fait suivant : il existe une constante K telle que pour tout h on ait $||T_m F(h)|| \leq K||h||$, donc $||H|| \leq ||h||(K + ||\epsilon_1(h)||)$. L'existence de K tient à ce que $T_m F$ est linéaire sur $\mathbb{R}^p$, et que donc, si $h = \sum_{i=1}^p h_i e_i$ pour une base (e_i), alors $T_m F(h) = \sum_{i=1}^p h_i T_m F(e_i)$, donc $||T_m F(h)|| \leq \sum_{i=1}^p |h_i|.||T_m F(e_i)|| \leq \sup_i |h_i| \big(\sum_{i=1}^p ||T_m F(e_i)|| \big) = \sup_i |h_i| K \leq ||h|| K$.

Dérivée directionnelle — *Si F admet une application linéaire tangente en m, si $||n|| = 1$, alors la dérivée de F au point m dans la direction n est $T_m(F)(n)$. Si l'on note $d_{m;n} : \mathbb{R} \to \Omega : x \mapsto m + x.n$ le déplacement unitaire depuis m dans la direction n, alors l'application tangente en 0 au composé $F \circ d_{m;n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q : x \mapsto F(m+xn)$ est l'application linéaire $T_0(F \circ d_{m;n}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q : t \mapsto tT_m(F)(n)$.*

Notion de fonction dérivée [cas général] — On considère $\Omega =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_p, b_p[\subset \mathbb{R}^p$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^q$$

une fonction admettant en tout point $m = (u_1, \ldots, u_p)$ une application linéaire tangente $T_m F$. On appelle alors *fonction dérivée* de F la fonction

$$F' : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) : m \mapsto F'(m) = (T_m F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q).$$

4.8. Dérivée seconde et formule de Taylor d'ordre 2 d'une fonction à p variables dans $\mathbb{R}^q$.

On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ l'espace vectoriel réel des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ vers R^q. On peut identifier $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ à l'ensemble $M_{q \times p}(\mathbb{R})$ des matrices $q \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, et cela est encore identifiable à $\mathbb{R}^{qp}$. Soit κ^p la base canonique de $\mathbb{R}^p$, $\kappa^p = (e_1^p, \ldots, e_p^p)$, où $e_j^p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ comporte p lignes, avec un 1 à la j-ième ligne, et des 0 ailleurs, et de même la base canonique κ_q de $\mathbb{R}^q$, $\kappa^q = (e_1^q, \ldots, e_q^q)$; on associe alors $\begin{pmatrix} l_{1,1} & \ldots & l_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{q,1} & \ldots & l_{q,p} \end{pmatrix}$ à l'application linéaire l, avec les coefficients $l_{i,j}$ définis par

$$l(e_j^p) = \sum_{i=1,\ldots,q} l_{i,j} e_i^q, \qquad i.e. \quad l_{i,j} = l(e_j^p).e_i^q.$$

Alors les pq coefficients de la matrices des $l_{i,j}$ constituent les coordonnées d'un élément de $\mathbb{R}^{qp}$. En considérant sur $\mathbb{R}^{qp}$ la norme euclidienne, on peut donc définir la norme "euclidienne" $||l||$ de l comme la norme de la matrice associée, c'est-à-dire de l'élément correspondant à cette matrice dans $\mathbb{R}^{qp}$, soit poser

$$||l|| = \sqrt{\sum_{i=1,\ldots,q; j=1,\ldots,p} l_{i,j}^2}.$$

La présentation que nous venons d'introduire à l'ordre 1 offre alors l'intérêt de pouvoir être répétée pour déterminer les dérivées successives. Nous commençons par la dérivée seconde.

Si $F : \Omega \to \mathbb{R}^q$ admet une dérivée $F' : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, il est naturelle de considérer ensuite pour $F''(m)$ l'application tangente à F' au point m, soit $F''(m) = T_m(F') : \mathbb{R}^p \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \simeq \mathbb{R}^{qp}$.

On considère sur $\mathbb{R}^p$ la norme $||h|| = \sqrt{A_1^2 + \cdots + A_p^2}$ et sur $\mathbb{R}^{qp}$ la norme $||z|| = \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_{qp}^2}$, soit sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ la norme "euclidienne" introduite ci-dessus. Alors $F''(m) = T_m(F')$ est, suivant la définition générale ci-dessus, caractérisée par la propriété que

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||F'(m+h) - F'(m) - (T_m(F'))(h)||}{||h||} = 0.$$

Il faut bien lire que $T_m(F')\ :\mathbb{R}^p\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$, donc que, pour chaque $h\in\mathbb{R}^p$,$T_m(F')(h)$ est une application linéaire $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, identifiable à une matrice $(l_{i,j})\in M_{q\times p}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{qp}$; donc pour tout $k\in\mathbb{R}^p$, $T_m(F')(h)$ s'applique à k et donne $T_m(F')(h)(k)\in\mathbb{R}^q$. Cette quantité sera notée $T_m(F')(h)(k)=F''(m)(h,k)$. Elle est *bilinéaire*, c'est-à-dire linéaire relativement à h (puisque $T_m(F')$ est une application linéaire) et linéaire relativement à k (puisque, pour tout h fixé, $T_m(F')(h)$ est une application linéaire).

Et d'autre part on dispose déjà de l'application linéaire tangente en m, $F'(m)=T_m(F)$, soit de $F'(m)(h)$ linéaire relativement à h.

4.9. Formule de Taylor d'ordre n d'une fonction à p variables dans $\mathbb{R}^q$.

♣ Exercices

1 — Montrer que la dérivée de la fonction implicite y de x d:'eterminée par $y^2-2xy+b^2=0$ vaut $\frac{y}{y-x}$.

2 — calculer la dérivée de la fonction implicite y de x déterminée par $y=\cos(x+y)$.

3 — Dans quelle direction la variation de $x\sin y-y\cos x$ est-elle maximale en (a,b) ?

4 — Soit $f(x,y)=x^3+2y^3-xy$. Développer $f(x+h,y+k)$ suivant les puissances de h et k.

5 — Faire le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage du point$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ de la fonction $z=\sin x\sin y$.

6 — Trouver les extrema locaux de la fonction $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

7 — Montrer que dans le rectangle compris entre les droites $x=0,y=0,x=1,y=2$ la fonction $z=x^2+2xy-4x+8y$ atteint son maximum en $(1,2)$ et son minimum en $(1,0)$.

8 — Trouver le maximum et le minimum de la fonction $z=x^2-y^2$ dans le disque $x^2+y^2\leq 4$.

9 — Sur l'ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ trouver le point le plus proche et le point le plus éloigné de la droite $3x+y-9=0$. ♣

COURS 5 (26/04/06) — **Aires planes, intégrales et primitives de fonctions continues. Intégration des fonctions réglées. Intégrales impropres.**

5.1. Aires et convergence des sommes de Darboux et de Riemann d'une fonction continue.

On appelle *subdivision* de $[a,b]$ une donnée notée $\sigma = [a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b]$. L'entier n est nommée la *longueur* de σ et noté $n = lg(\sigma)$, et le nombre $|\sigma| = \sup\{|x_i - x_{i-1}|; 1 \le i \le n\}$ est nommé la *largeur* de σ. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$. On dit que σ' est *plus étroite* que σ si $|\sigma'| \le |\sigma|$. On dit que σ' est *plus fine* que σ, et on écrit $\sigma' \succeq \sigma$, si tous les points de subdivisions de σ, soit les x_i, apparaissent parmis les points de subdivisions x'_j de σ' ; en particulier on a alors $n' \ge n$, et $|\sigma'| \le |\sigma|$. Étant données deux subdivisions quelconques α et β, il en existe une γ plus fine que α et que β, et donc aussi cette γ est plus étroite que α et β.

Si σ est une subdivision de $[a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, on introduit, avec $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, les sommes de Darboux inférieures et supérieures

$$S_D^-\big(f,\sigma\big) = \sum_{1\le i\le n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S_D^+\big(f,\sigma\big) = \sum_{1\le i\le n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Intégrales de Darboux inférieures et supérieures — *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée, alors pour toutes subdvisions $\sigma' \succeq \sigma$ on a*

$$S_D^-\big(f,\sigma\big) \le S_D^-\big(f,\sigma'\big) \le S_D^+\big(f,\sigma'\big) \le S_D^+\big(f,\sigma\big),$$

et l'on introduit les intégrales de Darboux inférieure (ou par défaut) et supérieure (ou par excès) :

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_\sigma S_D^-\big(f,\sigma\big) \le \inf_\sigma S_D^+\big(f,\sigma\big) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Intégrale de Darboux — *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est dite* intégrable au sens de Darboux *si ses intégrales inférieures et supérieures sont égales, soit $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$, et cette valeur est alors simplement notée $\int_a^b f(x)dx$ et appelée* intégrale de Darboux *de f.*

Autrement dit, f est intégrable au sens de Darboux *si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision σ telle que $S_D^+\big(f,\sigma\big) - S_D^-\big(f,\sigma\big) < \varepsilon$, c'est-à-dire telle que $\sum_{1\le i\le n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$; pour une telle σ et tout λ tel que $S_D^-\big(f,\sigma\big) \le \lambda \le S_D^+\big(f,\sigma\big)$ on a $|\int_a^b f(x)dx - \lambda| < \varepsilon$.*

Aire sous une courbe $f(x) \ge 0$ — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée avec pour tout $x \in [a,b]$ pn a $f(x) \ge 0$. Si f est intégrable au sens de Darboux, alors $\int_a^b f(x)dx$ est, par définition, l'*aire* du domaine $\{(x,y); x \in [a,b], 0 \le y \le f(x)\}$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est intégrable au sens de Darboux, et si $f(x) \le 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \le 0$ est l'opposée de la valeur absolue de l'aire de $\{(x,y); x \in [a,b], f(x) \le y \le 0\}$; on dit aussi que c'est l'aire algébrique du domaine en question. Enfin, si par exemple $f(x) \ge 0$ sur $[a,c[$ et $f(x) \le 0$ sur $]c,b]$, eh bien $\int_a^b f(x)dx$ représente la valeur absolue de l'aire de $\{(x,y); x \in [a,c], 0 \le y \le f(x)\}$ moins la valeur absolue de l'aire de $\{(x,y); x \in [c,b], f(x) \le y \le 0\}$.

On appelle *subdivision pointée* de $[a,b]$ une donnée (σ,ξ) formée d'une *subdivision* de $[a,b]$, et d'une suite $\xi = (\xi_i)_{1\le i\le n}$ de n points $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$.

Si (σ,ξ) est une subdivision pointée de $[a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, on introduit la *somme de Riemann* de f sur (σ,ξ), à savoir le nombre

$$S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big) = \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

de sorte que

$$S_D^-\big(f,\sigma\big) \le S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big) \le S_D^+\big(f,\sigma\big).$$

Intégrale de Darboux par sommes de Riemann — *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est intégrable au sens de Darboux, alors pour toute subdivision pointé (σ,ξ) telle que $S_D^+\big(f,\sigma\big) - S_D^-\big(f,\sigma\big) < \varepsilon$ on a $|\int_a^b f(x)dx - S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big)| < \varepsilon$.*

Du coup se trouve informellement "justifiée" la notation $\int_a^b f(x)dx$, où $\int$ est un S ou un Σ déformée et signifie une *somme continue* "limite" d'une "somme discrète" Σ, où dx signifie une quantité *infiniment petite*, "limite" d'un intervalle fini $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Une autre "justification" viendra plus loin avec la formule de changement de variable.

Intégrale de Riemann — *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite* intégrable au sens de Riemann *et d'intégrale I si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un δ tel que pour toute subdivision pointée (σ,ξ) de largeur moindre que δ, c'est-à-dire telle que $|\sigma| < \delta$, on ait $|I - S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big)| < \varepsilon(b-a)$.*

Nous reviendrons plus loin sur l'équivalence en général entre l'intégrale de Riemann et celle de Darboux, pour les fonctions bornées quelconques, et sur des critères d'intégrabilité. Mais d'abord nous allons nous intéresser aux seules fonctions continues, nous allons constater pour ces fonctions que l'intégrabilité au sens de Darboux et l'intégrabilité au sens de Riemann ont lieu, les intégrales étant les mêmes.

Uniforme continuité d'une fonction continue sur $[a,b]$ — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue en tout point x_0, c'est-à-dire telle pour tout $x_0 \in [a,b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout x on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ dès que $|x - x_0| < \delta$. Alors f est* uniformément continue *sur $[a,b]$, c'est-à-dire que : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout x_0 et tout x on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ dès que $|x - x_0| < \delta$.*

En effet, si l' on introduit le *module de continuité* de f en x_0 comme $\mu_f(x_0, \varepsilon) = \inf\{|u - x_0|; |f(u) - f(x_0)| > \varepsilon\}$, alors la continuité en x_0 signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mu_f(x_0, \varepsilon) > 0$; et l'uniforme continuité à prouver consiste en ce que, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\lambda > 0$ tel que, pour tout x_0, on ait $\mu_f(x_0, \varepsilon) > \lambda$. On l'établit par l'absurde, supposant qu'il existe dans $[a,b]$ une suite de point x_n tels que $\mu_f(x_n, \varepsilon) < \frac{1}{n}$. De la suite $(x_n)_{n>0}$ qui est bornée, on sait que l'on peut extraire une suite $(x'_n)_{n>0}$ qui est convergente, vers une limite notée x'_∞. A fortiori on a $\mu_f(x'_n, \varepsilon) < \frac{1}{n}$. Alors $|f(x) - f(x'_n)| < \varepsilon$ dès que $|x'_n - x_\infty| < \frac{1}{2}\mu_f(x'_\infty, \frac{\varepsilon}{2})$ et que $|x'_n - x| < \frac{1}{2}\mu_f(x'_\infty, \frac{\varepsilon}{2})$. Donc pour n assez grand on a $\mu_f(x'_n, \varepsilon) > \frac{1}{2}\mu_f(x'_\infty, \frac{\varepsilon}{2})$, ce qui contredit $\mu_f(x'_n, \varepsilon) < \frac{1}{n}$.

Si f est non seulement continue, mais dérivable, alors, grâce à la formule des accroissements finis, l'uniforme continuité est immédiate à prouver et surtout plus explicite :

Uniforme continuité d'une fonction continue sur $[a,b]$ et à dérivée bornée sur $]a,b[$ — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle qu'il existe un $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]a,b[$ on ait $|f'(x)| < M$. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$, car $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ dès que $|y - x| < \frac{\varepsilon}{M}$.*

Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est bornée, et en vertu de son uniforme continuité, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta(\varepsilon)$ tel que pour tous les $x, y \in [a,b]$ tels que $|y - x| < \delta(\varepsilon)$ on ait $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, si bien que pour toute subdivision σ de largeur $|\sigma| < \delta(\varepsilon)$, on a $S_D^+(f,\sigma) - S_D^-(f,\sigma) \leq \varepsilon(b-a)$. Donc on a :

Intégrabilité des fonctions continues — *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée et intégrable au sens de Darboux et au sens de Riemann, et l'intégrale est la même $I = \int_a^b f(x)dx$. Notamment, pour tout $\varepsilon > 0$, si $\delta(\varepsilon)$ est tel que pour tous les $x, y \in [a,b]$ tels que $|y - x| < \delta(\varepsilon)$ on ait $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, alors, pour toute subdivision pointé (σ, ξ) de largeur $|\sigma| < \delta(\varepsilon)$ on a $|\int_a^b f(x)dx - S_R(f,(\sigma,\xi))| < \varepsilon(b-a)$.*

En fait c'est Cauchy qui introduit les sommes ensuite nommées sommes de Riemann pour calculer l'intégrale des fonctions continues, et ensuite Riemann met l'accent sur le fait que l'important est cette détermination de l'intégrale, que la fonction soit continue ou non. Plus tard, Darboux introduit sa version, qui, lorsque l'intégrabilité n'a pas lieu, permet cependant de parler d'intégrale inférieure et d'intégrale supérieure.

Intégrale d'une fonction continue comme limite — *Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si pour tout entier m est spécifiée une partition pointée (σ^m, ξ^m) telle que $|\sigma^m| \to 0$ quand $m \to \infty$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \big(S_R\big(f,(\sigma^m,\xi^m)\big)\big).$$

Moyenne d'une fonction continue comme limite — *Pour tout entier m et tout entier i, $1 \leq m$, soit ξ_i^m tel que*

$$a + \frac{b-a}{m}(i-1) \leq \xi_i^m \leq a + \frac{b-a}{m} i.$$

Alors, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, la moyenne *de f sur $[a,b]$ vaut*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m f(\xi_i^m)\right].$$

Plus explicitement, si $\varepsilon > 0$ est fixé, et si $\delta(\varepsilon)$ est tel que pour tous les $x, y \in [a,b]$ on ait $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ dès que $|y - x| < \delta(\varepsilon)$, alors, pour tout entier $m > \frac{b-a}{\delta(\varepsilon)}$ on a

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m f(\xi_i^m)\right| < \varepsilon.$$

Moyenne d'une fonction continue dérivable à dérivée bornée comme limite — *Soit $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dérivable et à dérivée bornée par M sur $]a,b[$, soit telle que, pour tout $x \in]a,b[$ on ait $|f'(x)| < M$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m > \frac{b-a}{\varepsilon}M$ on a $\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m f(\xi_i^m)\right| < \varepsilon$, et donc pour tout m on a*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m f(\xi_i^m)\right| < \frac{(b-a)}{m}M.$$

5.2. Linéarité, positivité et propriété de la moyenne de l'intégrale de fonctions continues, formule de Chasles.

Linéarité de l'intégrale — *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues, alors*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Positivité de l'intégrale — *Si $f, g\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues et vérifient, pour tout x, $f(x) \leq g(x)$, alors on a $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Autrement dit on peut "intégrer" les inégalités.*

En intégrant les inégalités $-M \leq -\phi(x) \leq f(x) \leq \phi(x) \leq +M$ entre a et b on obtient $-M(b-a) \leq -\int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx \leq M(b-a)$, d'où :

Positivité de l'intégrale [suite] — *Si sur $[a,b]$ on a, avec f et ϕ continues, pour tout x, $|f(x)| \leq \phi(x) \leq M$, alors on a $\left|\int_a^b f(x)\right| \leq \int_a^b \phi(x)dx \leq M(b-a)$.*

En posant $\phi(x) = |f(x)|$ on obtient :

Positivité de l'intégrale [fin] — *Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on a*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Théorème de la moyenne — *Sur $[a,b]$ soit f et g continues, avec, pour tout x, $g(x) \neq 0$. Alors il existe un $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

En effet, si g ne s'annule pas, alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, g est de signe constant, par exemple $g(x) > 0$ pour tout x. D'autre part, la fonction continue f admet, sur $[a,b]$ une plus petite valeur m et une plus grande valeur M, avec donc, pour tout x, $m \leq f(x) \leq M$, d'où l'on déduit $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, et en intégrant ces inégalités il vient $m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$. Il existe donc un certain nombre P vérifiant $m \leq P \leq M$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)dx = P\int_a^b g(x)dx$. Et le théorème des valeurs intermédiaires pour f nous assure qu'il existe un c tel que $f(c) = P$.

En appliquant ce théorème dans le cas où $g(x) = 1$ il vient le théorème suivant (qui résulterait aussi de la formule des accroissements finis appliquée à une primitive $F(x)$ de $f(x)$, primitive dont l'existence est montrée ci-après) :

Théorème de la moyenne [fin] — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe un $c \in [a,b]$ tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[u,v]$, pour tout $u, v \in [a,b]$, avec $u \leq v$, et on peut donc considérer $\int_u^v f(x)dx$ comme fonction des extrémités u et v.

On pose $\int_v^u f(x)dx = -\int_u^v f(x)dx$.

Formule de Chasles — *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, et si $u, v, w \in [a,b]$, alors*

$$\int_u^w f(x)dx = \int_u^v f(x)dx + \int_v^w f(x)dx.$$

5.3. Primitive de fonctions continues, théorème fondamental de l'analyse, intégration par parties, formule de Taylor à reste intégral, et changement de variables.

De l'égalité des dérivées à celle des fonctions — *Soit $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, et soit $\alpha \in [a,b]$ un point. Alors elles sont égales en tout $x \in [a,b]$ si et seulement si $F' = G'$ en tout $x \in]a,b[$ et $F(\alpha) = G(\alpha)$.*

Cela résulte de ce que $(F-G)'(x) = 0$, et donc $F - G$ est constante, d'après les accroissements finis.

Existence et "unicité " d'une primitive pour toute fonction continue — *Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on pose $F(u) = \int_a^u f(x)dx$. Alors la fonction $F(x)$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et l'on a $F'(x) = f(x)$. Et si $G(x)$ est une fonction sur $[a,b]$ telle que $G'x) = f(x)$ sur $]a,b[$ alors $G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)dt$.*

En effet $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$, et si l'on calcule cette intégrale comme limite, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour $|h| < \delta$ on ait pour tout $\xi_i^m \in [x, x+h]$, $f(x) - \varepsilon < f(\xi_i^m) < f(x) + \varepsilon$, et donc il vient $h\big(f(x_0) - \varepsilon\big) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \leq h\big(f(x_0) + \varepsilon\big)$. D'où l'on conclut, quand $h \to 0$, que $F'(x_0)$ existe et vaut $f(x_0)$.

Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on désigne par $\int f(x)dx$ l' *intégrale indéfinie* de f c'est-à-dire l'expression générale d'un primitive $G(x)$ de $f(x)$, c'est-à- dire de toute fonction $G(x)$ sur $[a,b]$ telles que $G'(x) = f(x)$ sur $]a,b[$. Donc si $F(x)$ est l'une de ces primitives, n'importe quelle autre $G(x)$ s'écrit

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

où C est une constante arbitraire. Ainsi les deux écritures $G(x) = \int f(x)dx$ et $G'(x) = f(x)$ sont équivalentes. Autrement dit encore la propriété de la primitive se redit encore $d\big(\int f(x)dx\big) = f(x)dx$, ou encore :

Théorème fondamental de l'analyse — *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit G une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors on a*

$$G(x) = \int f(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad dG(x) = f(x)dx,$$

et pour un tel couple (f, G) on a

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Si u et v sont continues, alors le produit uv est continue, et si u et v sont dérivables, alors uv est dérivable, de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$, et alors $uv' = (uv)' - u'v$, d'où $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$, soit

Intégration par parties —*Soit $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et dérivables. Alors, avec la notation $\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$ on a*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Autrement dit, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ par parties on cherche $p(x)$ et $q(x)$ tels que $f(x) = p(x)q(x)$ et que $\int q(x)dx$ soit connue ; on pose alors $u(x) = p(x)$, $dv = q(x)dx$; $u(x) = p(x)$, $v(x) = \int q(x)dx$; $v(x) = \int q(x)dx$, $du = p'(x)dx$; et on a :

$$\int_{x=a}^{x=b} udv = \Big[uv\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} vdu.$$

Par exemple on calcule par récurrence les fonctions $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. En effet, en intégrant par parties en posant $u = (1+t^2)^{-n}$ et $v' = 1$, il vient $u' = -2nt(1+t^2)^{-n-1}$ et v = t, d'où $I_n(x) = \big[\frac{t}{(1+t^2)^n}\big]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2dt}{(1+t^2)^{n+1}}$, ou encore $I_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n(x) - 2nI_{n+1}(x)$, soit $2nI_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n(x)$. Et on a $I_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)} = \arctan x$.

intégration par parties itérées — *Avec les hypothèses précédentes, soit u et v deux fonctions ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n+1$. Alors on a*

$$\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)dx = \big[u^{(n)}v - u^{(n-1)}v' + \cdots + (-1)^n uv^{(n)}\big]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)dx.$$

En effet on a, en intégrant par parties on a $\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)dx = \big[u^{(n)}v\big]_a^b - \int_a^b u^{(n)}(x)v'(x)dx$, puis le dernier terme vaut $-\int_a^b u^{(n)}(x)v'(x)dx = -\big[u^{(n-1)}v'\big]_a^b + \int_a^b u^{(n-1)}(x)v''(x)dx$, etc, et le résultat annoncé en ajoutant membres à membres.

Formule de Taylor à reste intégral — *Avec les hypothèses précédentes, si u est dérivable continument n + 1 fois, alors on a*

$$u(b) = u(a) + (b-a)u'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}u^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}u^{(n+1)}(x)dx.$$

Il suffit d'appliquer l'intégration par parties itérées avec $v = \frac{(b-x)^n}{n!}$. Alors $v^{(n+1)} = 0$, il n'y a donc pas d'intégrale à droite, et dans la partie intégrée tous les termes sauf le dernier sont nuls pour $x = b$.

Changement de variable — *Soit $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$ une fonction continue et dérivable de t, avec, pour tout $t \in [\alpha,\beta]$, $x'(t) > 0$, et avec $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$. Et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction continue de x. Alors dans $\int_a^b f(x)dx$ on peut remplacer dx par sa valeur en fonction de t, soit $dx = x'(t)dt$ et les bornes d'intégration $x = a$ et $x = b$ par les conditions équivalentes sur t, soit $t = x^{-1}(a) = \alpha$ et $t = x^{-1}(b) = \beta$, et on a :*

$$\int_{x=x(\alpha)=a}^{x=x(\beta)=b} f(x)dx = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f\Big(x(t)\Big)x'(t)dt,$$

Ainsi se trouve une "justification" de la notation de l'intégrant sous la forme $f(x)dx$.

En effet $\int_{u=x(\alpha)=a}^{u=x(t)} f(u)du = \int_{v=\alpha}^{v=t} f\Big(x(v)\Big)x'(v)dv$, car les deux membres sont des fonctions dérivables de t, de même dérivée — à savoir $f\big(x(t)\big)x'(t)$ — et ayant même valeur en α — à savoir 0. Ce sont donc des fonctions de t égales. Pour $t = \beta$ on a la formule annoncée.

5.4. Primitives usuelles.

Le calcul des primitives repose pour commencer sur l'utilisation de l'intégration par parties, du changement de variables, et d'une liste de primitives usuelles qu'il faut connaître par cœur.

De façon courante la liste suivante est suffisante. On en vérifie l'exactitude en dérivant membre à membre. Par exemple, sur un intervalle $[a,b]$ où $0 < a < b$ on a $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$ parce que $(\int \ln x dx)' = (x\ln x - x + C)'$ c'est-à-dire $\ln x = 1\ln x + x\frac{1}{x} - 1 + 0$. En notation d'intégrale définie on écrira $\int_a^b \ln x dx = \big[x\ln x - x\big]_{x=a}^{x=b}$.

Table de primitives usuelles — *Par dérivations on vérifie immédiatement les formules :*

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$
$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$
$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

Á partir de là, on peut calculer de nombreuses variantes par simple changement de variable. Par exemple on obtiendra, pour $a \neq 0$, $\int_0^x \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$. En effet on pose $u = at$, $du = adt$, $t = \frac{u}{a}$, $\int_0^x \frac{du}{a^2+u^2} = \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{adt}{a^2+a^2t^2} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{x}{a}} \frac{dt}{1+t^2}$, soit avec la primitive donnée par la table, $\frac{1}{a}\big[\arctan\frac{x}{a} - \arctan 0\big] = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$.

5.5. Intégrales de fractions rationnelles.

Primitives de fractions simples — *1 — Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}, \text{si } k \neq 0, \quad \int \frac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a|.$$

2 — Si $b^2 - 4ac < 0$, alors

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\right).$$

3 — Si $b^2 - 4ac > 0$, alors

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left(\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right).$$

Primitives de fractions simples [suite]. — *1 — Pour calculer* $\int \frac{dx}{(x^2-c^2)^k}$ *on décompose* $\frac{1}{(x^2-c^2)^k} = \frac{1}{(x-c)^k}\frac{1}{(x+c)^k}$ *sous la forme*

$$\frac{1}{(x^2-c^2)^k} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\alpha_i}{(x-c)^i} + \frac{\beta_i}{(x+c)^i}\right).$$

2 — Pour calculer $\int \frac{dx}{(x^2+c^2)^k}$ *on change de variable par* $cz = x$, *et l'on est ramené à* $I_k = \int \frac{dz}{(1+z^2)^k}$, *qui se trouve par* $I_1 = \arctan z$ *et les relations de récurrence* $(2k-2)I_k = \frac{z}{(1+z^2)^{k-1}} + (2k-3)I_{k-1}$.

Primitives de fractions simples [fin]. — *Pour calculer* $\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^k}$ *on se ramène avec* $x + \frac{b}{2a} = X$ *et* $K^2 = |\frac{b^2-4ac}{4a^2}|$ *aux calculs de* $\int \frac{XdX}{(X^2+K^2)^k} = \int \frac{\frac{1}{2}d(X^2)}{(X^2+K^2)^k}$, *et de* $\int \frac{XdX}{(X^2-K^2)^k} = \int \frac{\frac{1}{2}d(X^2)}{(X^2-K^2)^k}$, *qui relèvent de l'avant dernière proposition, ainsi qu'aux calculs de* $\int \frac{dX}{(X^2+K^2)^k}$ *et* $\int \frac{dX}{(X^2-K^2)^k}$, *qui relèvent de la dernière proposition.*

Primitives de fractions rationnelles quelconques — *Soit* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *une fraction rationnelle quelconque à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *soit une fraction où* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *sont des polynômes en* x *à coefficients dans* $\mathbb{R}$. *Alors pour calculer* $\int F(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, *on décompose* $F(x)$ *en somme de monomes* ax^n, *de fractions dites* simples $\frac{a}{(x-c)^k}$ *et* $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^k}$ *— ce qui est toujours possible — et on intègre séparément chaque fraction simple.*

5.6. Intégrale dépendant d'un paramètre.

Dérivation par rapport au paramètre d'une intégrale d'une fonction qui dépend d'un paramètre—*Supposons que* $f(x,m)$ *soit, pour tout* $m \in [p,q]$, *une fonction continue de* x *sur* $[a,b]$, *admettant une dérivée partielle par rapport à* m, *soit* $\frac{\partial f}{\partial m}(x,m)$, *qui soit une fonction continue des deux variables* (x,m) *sur un rectangle* $[a,b]\times[p,q]$. *Alors*

$$\frac{d}{dm}\int_a^b f(x,m)x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial m}(x,m)dx.$$

Admettons — ce qui relèverait d'une preuve analogue à celle vue dans le cas d'une variable — que si la fonction $g(x,m)$ de deux variables (x,m) est continue sur un rectangle $[a,b]\times[p,q]$ alors est y est *uniformément continue*, c'est-à- dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un δ, indépendant de x et de m, tel que, dans $[a,b]\times[p,q]$ dès que $|x'-x| < \delta$ et $|m'-m| < \delta$, on ait $|g(x',m') - g(x,m)| < \varepsilon$. En particulier, avec $x' = x$ on a donc pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$, indépendant de x et de m, tel que, dans$[a,b]\times[p,q]$ on ait $|g(x,m') - g(x,m)| < \varepsilon$ dès que $|m'-m| < \delta$.

En appliquant cela à $\frac{\partial f}{\partial m}(x,m)$ on a donc, pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$, indépendant de x, tel que $|\frac{\partial f}{\partial m}(x,m') - \frac{\partial f}{\partial m}(x,m)| < \varepsilon$ dès que $|m'-m| < \delta$.

Alors $\frac{d}{dm}\int_a^b f(x,m)x = \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x,m+h)-f(x,m)}{h}dx$ si cette limite existe. Les intégrales écrites existent bien puisque les fonctions considérées sont continues relativement à x.Mais d'après la formule des accroissements finis on a un θ, $0 < \theta < 1$, tel que $\frac{f(x,m+h)-f(x,m)}{h} = \frac{\partial f}{\partial m}(x, m+\theta h)$. Si on prend h tel que $|h| < \delta$, on a $|\theta h| < \delta$, et donc, avec la positivité de l'intégrale, les inégalités $\left|\int_a^b \frac{f(x,m+h)-f(x,m)}{h}dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial m}(x,m)dx\right| \leq \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial m}(x,m+\theta h) - \frac{\partial f}{\partial m}(x,m)\right|dx < \varepsilon$.

Ensuite, en considérant la fonction de trois variables $F(a,b,m) = \int_a^b f(x,m)dx$ et en la dérivant par rapport à m, en supposant a et b fonctions dérivables de m, on a $\frac{d}{dm}F((a,b,m) = \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dm} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dm} + \frac{\partial F}{\partial m}$, ce qui donne :

Dérivation par rapport au paramètre d'une intégrale d'une fonction qui dépend d'un paramètre [suite]—*Supposons maintenant que* a *et* b *ne soient plus des constantes, mais que* $a(m)$ *et* $b(m)$ *soient des fonctions sur* $[p,q]$ *continues et dérivables sur* $]p,q[$, *et que l'on soit sous les hypothèses pécédentes sur* $f(x,m)$ *sur chaque intervalle maintenant variable* $[a(m_0), b(m_0)]$, *pour tout* $m_0 \in]p,q[$. *Alors l'intégrale* $\int_{a(m)}^{b(m)} f(x,m)dx$ *est une fonction dérivable sur* $]p,q[$ *et l'on a*

$$\frac{d}{dm}\int_{a(m)}^{b(m)} f(x,m)dx = f(b,m)\frac{db}{dm} - f(a,m)\frac{da}{dm} + \int_{a(m)}^{b(m)} \frac{\partial f}{\partial m}(x,m)dx.$$

5.6. Équivalence des intégrales de Darboux et de Riemann des fonctions bornées.

Soit un intervalle $[a,b]$ et $\sigma = [a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b]$ une subdivision ; on définit une fonction *en escalier* ou *étagée* sur σ une fonction $e : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $i \leq n$ la fonction e soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$, de valeur e_i. Les valeurs q_i aux points x_i sont quelconques. La fonctions peut être discontinue en ces points seulement. Si l'on désigne pour $A \subseteq [a,b]$ par $\mathbb{I}_A : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction "*indicatrice*" de A, c'est-à-dire valant 1 sur A et valant 0 hors de A, la fonction e s'écrit alors $e = \sum_i e_i \mathbb{I}_{]x_{i-1},x_i[} + \sum_i q_i \mathbb{I}_{\{x_i\}}$, cette écriture n'étant pas unique. Si tous les x_i sont des points de discontinuités de e, alors cette dernière écriture est unique, et la subdivision σ correspondante est dite associée à e et noté $\sigma < e >$. Une fonction *étagée* est aussi bien une fonction qui s'écrit comme combinaison linéaire d'indicatrices d'intervalles finis quelconques, soit :

$$e = \sum_{k=1,\dots,l} v_k \mathbb{I}_{I_k},$$

avec les I_k des intervalles finis de longueurs λ_k, donc de l'une des quatre formes $[c_k, d_k]$, $[c_k, d_k[$, $]c_k, d_k]$, $]c_k, d_k[$, avec $c_k \leq d_k$ et $|d_k - c_k| = \lambda_k$. Cette écriture pour une e donnée n'est pas unique. On désignera par $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions étagées sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Intégrale de fonction étagée — *Une fonction étagée $f \in \mathcal{E} = \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est intégrable, au sens de Darboux, et, avec les notations ci-avant, on a $\int_a^b e(x)dx = \sum_{i=1,\dots,n} e_i(x_i - x_{i-1})$, ou bien $\int_a^b e(x)dx = \sum_{k=1,\dots,l} v_k\lambda_k$. Les valeurs aux points de discontinuités n'interviennent pas dans la valeur de l'intégrale.*

Par suite, l'intégrale au sens de Darboux peut se reformuler aisément via les intégrales de fonctions étagées *i sous f* et les intégrales de fonctions étagées *s au-dessus* de f :

Intégrale de Darboux [reprise] — *Pour une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ les intégrales de Darboux inférieures et supérieures valent :*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\sigma} S_D^-(f,\sigma) = \sup_{i \leq f, i \in \mathcal{E}} \int_a^b i(x)dx \leq \inf_{f \leq s, s \in \mathcal{E}} \int_a^b s(x)dx = \inf_{\sigma} S_D^+(f,\sigma) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Notamment le fait que f bornée soit Darboux-intégrable signifie que

$$\sup_{i \leq f, i \in \mathcal{E}} \int_a^b i(x)dx = \inf_{f \leq s, s \in \mathcal{E}} \int_a^b s(x)dx.$$

Ensuite on peut démontrer le

Théorème de Darboux — *Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée on a*

$$\lim_{|\sigma| \to 0} S_D^-(f,\sigma) = \sup_{\sigma} S_D^-(f,\sigma) = \sup_{i \leq f} \int_a^b i(x)dx \leq \inf_{f \leq s} \int_a^b s(x)dx = \inf_{\sigma} S_D^+(f,\sigma) = \lim_{|\sigma| \to 0} S_D^+(f,\sigma).$$

Par suite, si f bornée est intégrable au sens de Darboux, d'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ alors on a

$$\lim_{|\sigma| \to 0} S_D^-(f,\sigma) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{|\sigma| \to 0} S_D^+(f,\sigma).$$

En effet seules les égalités aux extrémités ne sont pas évidentes. Prenons par exemple celle de droite : il s'agit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|\sigma| < \delta$ entraîne $S_D^+(f,\sigma) - \inf_\sigma S_D^+(f,\sigma) < \epsilon$. Prenons une fonction étagée $s \geq f$ telle que $\inf_\sigma S_D^+(f,\sigma) \leq \int_a^b s(x)dx \leq \inf_\sigma S_D^+(f,\sigma) + \frac{\epsilon}{2}$, fonction étagée s associée à une subdivision $\tau = [a = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_m = b]$, telle que s valent s_k sur $]y_{k-1}, y_k[$, pour tous les $1 \leq k \leq m$. On considère $\beta = \frac{\epsilon}{4(m+1)M}$ et $\delta = \inf(\frac{1}{3}|\tau|, \beta)$, avec $M \geq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Pour toute subdivision σ de $[a,b]$ de la forme $\sigma = [a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b]$ telle que $|\sigma| < \delta$, on considère $\varphi_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^n M_i \mathbb{I}_{[x_{i-1},x_i]}$ avec $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, de sorte que l'on ait $S_D^+(f,\sigma) = \int_a^b \varphi_{f,\sigma}(x)dx$. On montre alors que $S_D^+(f,\sigma) - \inf_\sigma S_D^+(f,\sigma) \leq \epsilon$. En effet puisque $S_D^+(f,\sigma) - \inf_\sigma S_D^+(f,\sigma) \leq |S_D^+(f,\sigma) - \int_a^b s(x)dx| + |\int_a^b s(x)dx - \inf_\sigma S_D^+(f,\sigma)| \leq |\int_a^b \varphi_{f,\sigma}(x)dx - \int_a^b s(x)dx| + \frac{\epsilon}{2}$, il suffit d'avoir $|\int_a^b \varphi_{f,\sigma}(x)dx - \int_a^b s(x)dx| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Comme $|\sigma| < \frac{1}{3}|\tau|$, chaque $[y_{k-1}, y_k]$ contient au moins un $[x_{i-1}, x_i]$, et dans chacun de ces $[x_{i-1}, x_i]$ on a $M_i \leq s_k$; et pour les $[x_{i-1}, x_i]$ à cheval sur un y_k on a $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [y_k - \beta, y_k + \beta]$. D'où $\int_a^b \varphi_{f,\sigma}(x)dx \leq \int_a^b s(x)dx + 2\beta(m+1)M$.

Théorème de Darboux [suite et fin] — *Toute $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est* intégrable au sens de Darboux *si et seulement si elle est* intégrable au sens de Riemann*, et les deux intégrales ont la même valeur, notée $\int_a^b f(x)dx$. On dit alors que f est intégrable au sens de Riemann-Darboux, ou encore intégrable au sens de Cauchy-Riemann-Darboux.*

En effet si f est intégrable au sens de Darboux, comme on a toujours $S_D^-\big(f,\sigma\big) \leq S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big) \leq S_D^+\big(f,\sigma\big)$ le théorème ci-dessus implique que $\lim_{|\sigma|\to 0} S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big)$ existe, c'est-à-dire que la fonction est intégrable au sens de Riemann.

Et réciproquement, supposons que $\lim_{|\sigma|\to 0} S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big)$ existe et soit notée I. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe donc un δ tel que si $|\sigma| < \delta$ alors $|S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big) - I| < \epsilon$. Par définition chaque somme de Darboux inférieure ou supérieure peut être approchée par une somme de Riemann : pour σ donnée, et pour ϵ fixé, il existe pour chaque i un ξ_i et un ξ'_i tels que $f(\xi_i) - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}$ et $M_i - f(\xi'_i) < \frac{\epsilon}{b-a}$, de sorte que l'on a $S^-_D\big(f,\sigma\big) \geq S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big) - \epsilon$ ainsi que $S^+_D\big(f,\sigma\big) \leq S_R\big(f,(\sigma,\xi')\big) + \epsilon$, et donc $S^+_D\big(f,\sigma\big) - S^-_D\big(f,\sigma\big) \leq S_R\big(f,(\sigma,\xi')\big) - S_R\big(f,(\sigma,\xi)\big) + 2\epsilon$. Si on a choisi σ telle que $|\sigma| < \delta$, alors il vient $S^+_D\big(f,\sigma\big) - S^-_D\big(f,\sigma\big) \leq 4\epsilon$, et cela valant pour tout ϵ, f est intégrable au sens de Darboux.

5.7. Intégration des fonctions réglées.

L'intégrabilité par encadrements — *1— Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est Cauchy-Riemann-Darboux intégrable si et seulement s'il existe deux suites i_q et s_q de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que*

$$\forall q \quad i_q \leq f \leq s_q, \quad \int_a^b \big(s_q(x) - i_q(x)\big)dx < \frac{1}{q}.$$

2 — Une fonction bornée $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ est Cauchy-Riemann-Darboux intégrable si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux fonctions u et v bornées Cauchy-Riemann-Darboux intégrables sur $[a,b]$ telles que

$$u \leq f \leq v, \quad \int_a^b \big(v(x) - u(x)\big)dx < \epsilon.$$

Nous savons donc qu'une fonction bornée $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ est *intégrable au sens de Cauchy-Riemann-Darboux* si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision σ telle que $\sum_{1\leq i\leq n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. Cela entraîne en prenant $\varepsilon = \frac{1}{q}$ et $i_q = m_0\mathbb{I}_{[a,x_1[} + \cdots + m_{n-1}\mathbb{I}_{[x_{n-2},x_{n-1}[} + m_n\mathbb{I}_{[x_{n-1},b]}$ et $s_q = M_0\mathbb{I}_{[a,x_1[} + \cdots + M_{n-1}\mathbb{I}_{[x_{n-2},x_{n-1}[} + M_n\mathbb{I}_{[x_{n-1},b]}$ que $\int_a^b \big(s_q(x) - i_q(x)\big)dx < \frac{1}{q}$. Et réciproquement d'une telle inégalité avec $i_q \leq f \leq s_q$, pour un q tel que $\frac{1}{q} < \varepsilon$, on tire $\sum_{1\leq i\leq n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$, pour σ le raffinement commun des subdivisions associées à i_q et s_q. Pour le deuxième point, la condition est nécessaire d'après le premier point, puisque les fonctions en escaliers sont évidemment intégrables. La condition est suffisante car si $i_q \leq u$ et $s_q \geq f$ avec $\int_a^b u(x)dx - \int_a^b i_q(x)dx < \frac{1}{3q}$ et $\int_a^b s_q(x)dx - \int_a^b v(x)dx < \frac{1}{3q}$, avec donc u et v intégrables telles que $u \leq f \leq v$ et $\int_a^b v(x)dx - \int_a^b u(x)dx < \frac{1}{3q}$, alors on a $\int_a^b \big(s_q(x) - i_q(x)\big)dx < \frac{1}{q}$.

Limites uniformes de fonctions intégrables — *Soit (f_n) une suite de fonctions $f_n = [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout n la fonction f_n soit* bornée Cauchy-Riemann-Darboux intégrable*, et telle que la suite (f_n)* converge uniformément *vers une fonction $f = [a,b] \to \mathbb{R}$, ce qui signifie que*

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n\big(n > N \Rightarrow \forall x \in [a,b]\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon\big).$$

Alors f est bornée Cauchy-Riemann-Darboux intégrable et l'on a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un N tel que pour les $n > N$ on ait $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$, soit $u_n < f < v_n$, avec $u_n = f_n - \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ et $v_n = f_n + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$, avec donc u_n et v_n intégrables, et avec $\int_a^b(v_n(x) - u_n(x))dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx = \epsilon$.

Les fonctions régłées — *Une fonction $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite* réglée *si et seulement si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers. Cela équivaut à dire que pour tout point $\alpha \in [a,b]$ la fonction admet une limite à gauche $f^-(\alpha) = \lim_{x\to\alpha,x\in[a,b],x\leq\alpha} f(x)$ et une limite à droite $f^+(\alpha) = \lim_{x\to\alpha,x\in[a,b],x\geq\alpha} f(x)$.*

En effet,

5.9. Intégrales impropres.

♣ Exercices

1 — Montrer que la moyenne $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ (où donc x varie de 0 à 1 radian) est comprise entre 0 et $\sin(1)$, et donc a fortiori entre 0 et 1. Montrer que la moyenne $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ est approximée au $\frac{1}{10}$ près par $\frac{1}{21}\sum_{k=1}^{21}\sin(\frac{k^2}{441})$. En déduire que l'on obtient une approximation à $\frac{1}{5}$ près de la moyenne considérée en faisant exactement la somme des 21 termes indiqués, chacun étant calculé à $\frac{1}{100}$ près. Écrire un programme pour faire ce calcul. Donner effectivement une approximation à $\frac{1}{5}$ près.

2 — Comparer $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ et $\int_0^1(\sin x)^2dx$.

3 — Montrer que $\int_0^x \sin t dt = -\cos x$.

4 — En intégrant par parties, montrer que $\int_0^x t \sin t dt = \sin x - x \cos x$.

5 — Par le changement de variable $x = \frac{t-b}{a}$ calculer $\int_0^X (ax+b)^m dx$ lorsque $a \neq 0$ et $m \neq -1$.

6 — Montrer que $\int \sqrt{x^2+a}\, dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a} + a\ln(x+\sqrt{x^2+a})] + C$.

7 — La *spirale de Cornu* — qui permet d'étudier graphiquement la diffraction — est la courbe paramétrée

$$M(t) = \left(\int_0^t \cos(\frac{\pi}{2}u^2)du, \int_0^t \sin(\frac{\pi}{2}u^2)du \right).$$

Montrer que $M(t)$ est bien définie. Dessiner ladite spirale.

8 — Montrer que $\int x^m \ln x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1} \right)$. En déduire, pour tout polynôme $P(x)$ la valeur de $\int P(x) \ln x dx$. ♣

COURS 6 (03/05/06) — Longueurs, repère mobile, développée et développante, énergie cinétique, travail des forces, mouvement des planètes.

6.1. Variations bornées, longueur, et abscisse curviligne.

VARIATION BORNÉE — *Une fonction* $f = [p, q] \to \mathbb{R}$ *est dite* à variations bornées *ou* v.b. *si et seulement si sa variation*

$$\mathcal{V}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} |(f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

sur une subdivision $\sigma = [p = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = q]$ *de* $[p, q]$ *a une limite quand* $|\sigma| = \sup_i |t_i - t_{i-1}|$ *tend vers 0, soit*

$$\lim_{|\sigma|\to 0} \mathcal{V}(f, \sigma) = \mathcal{V}_p^q(f),$$

dite variation totale *de* f *de* p *à* q.

En fait une fonction $f : [p, q] \to \mathbb{R}$ *est à variations bornées si et seulement si* $f = c_1 - c_2$*, avec* $c_1, c_2 : [p, q] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions croissantes.*

Donc si f *est à variations bornées, elle est Riemann-intégrable et même réglée, c'est-à-dire elle possède en tout point une limite à droite et une limite à gauche.*

On note que f *est à variations bornées si* f *est continûment dérivable sur* $[p, q]$*, et alors*

$$\mathcal{V}_p^q(f) = \int_p^q |f'(t)|dt.$$

Donc si g *est continue sur* $[a, b]$*, alors sa primitive* $G(x) = \int_a^x g(x)dx$ *est à variations bornées et* $\mathcal{V}_a^x(G)$ *est une primitive de* $|g|$*. Notamment, la fonction primitive* G *se décompose en somme de deux fonctions continues croissantes :*

$$\int_a^x g(x)dx = \Big(\int_a^x |(g(x)|dx\Big) - \Big(\int_a^x (|(g(x)| - g(x))dx\Big).$$

Si g *est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$*, alors* $G(x) = \int_a^x g(x)dx$ *est à variations bornées, et donc Riemann-intégrable.*

Évidemment, pour une fonction croissante $c : [p, q] \to \mathbb{R}$ on a $\mathcal{V}(c, \sigma) = c(q) - c(p)$, et donc c est à v.b., $\mathcal{V}(c) = c(q) - c(p)$. Puis, si f et g sont v.b.,. de $\mathcal{V}(\lambda f + \mu g, \sigma) \leq |\lambda|\mathcal{V}(f, \sigma) + |\mu|\mathcal{V}(g, \sigma) \leq |\lambda|\mathcal{V}_p^q(f) + |\mu|\mathcal{V}_p^q(g) < \infty$ on déduit que $\lambda f + \mu g$ est v.b. Donc si c_1 et c_2 sont croissantes, alors $c_1 - c_2$ est v.b.

Réciproquement si f erst une fonction v.b. sur $[p, q]$, alors f est v.b. sur $[a, x]$ pour tout $x \in [p, q]$, et alors on pose $c_1(x) = \mathcal{V}_p^x(f)$ et $c_2(x) = c_1(x) - f(x)$. Comme toute subdivision de $[p, x]$ se prolonge en subdivision de $[p, x']$ si $x < x'$, la fonction $c_1(x)$ est bien croissante ; et puis on voit que $c_2(x)$ aussi est croissante, car si $x < x'$ on a $c_2(x') - c_2(x) \geq 0$ car $\mathcal{V}_p^{x'}(f) - \mathcal{V}_p^x(f) \geq \mathcal{V}_x^{x'}(f) \geq f(x') - f(x)$.

Le deuxième point résulte du premier, les propriétés énoncées étant vraies des fonctions croissantes, et vraies des combinaisons linéaires de fonctions pour lesquelles elles sont séparément vraies.

Le troisième point tient à ce que la formule des accroissement finis donne, disons pour f, $f(t_i)-f(t_{i-1}) = f'(u_i)(t_i-t_{i-1})$, et f' étant continue et donc bornée en module par A, l'inégalité $|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq A(t_i - t_{i-1})$, donc $\mathcal{V}(f, \sigma) \leq A(q - p)$. En fait on a $\mathcal{V}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n |(f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |t_i - t_{i-1}|f'(\xi_i)|$, pour des points $\xi_1 \in [t_{i-1}, t_i]$, ce qui, puisque f' est continue et donc Riemann-intégrable, tend vers l'intégrale indiquée. La fin est une reformulation, avec $g = f'$. On y constate aussi directement que $G = f$ est différence de deux fonctions croissantes, donc à variation bornées. Ce qui fait preuve du quatrième point.

LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE ET VARIATIONS BORNÉES DES COORDONNÉES — *Soit* $\gamma : [p, q] \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ *un paramétrage d'une courbe orientée plane* Γ*, de paramètre* $t \in [p, q]$*, dans* $\mathcal{X}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*, avec donc* $\gamma(t) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$*, les fonctions* α *et* β *étant a priori quelconques. Pour toute subdivision* $\sigma = [p = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = q]$ *de* $[p, q]$*, on considère la ligne polygonale* γ_σ *inscrite par* σ *dans* γ*, de sommets successifs les* $\gamma(t_i)$*, et sa* longueur

$$L(\gamma_\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})^2 + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})^2}.$$

Alors la longueur $L(\gamma)$ *de* γ *est, par définition, la limite si elle existe :*

$$L(\gamma) =_{\text{def}} \lim_{|\sigma|\to 0} L(\gamma_\sigma).$$

Cette limite existe, c'est-à-dire γ est rectifiable*, si et seulement si les coordonnées α et β sont* à variations bornées.

Cela résulte de $a, b \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$, pour des $a, b \geq 0$.

Abscisse curviligne — *Soit $\gamma : [p,q] \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ un paramétrage d'une courbe orientée plane Γ, de paramètre $t \in [p,q]$, dans $\mathcal{X}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, avec donc $\gamma(t) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$, les fonctions α et β ayant des dérivées continues $\alpha'(t)$ et $\beta'(t)$. Alors il existe une fonction $h : [0,l] \to [p,q]$ de variable $s \in [0,l]$ continue dérivable avec $h'(s) > 0$ telle que $\nu(s) = \gamma\big(h(s)\big) = \big(\sigma(s), \tau(s)\big)$ soit un paramétrage de la même courbe orientée Γ tel que $\nu'(s) = \begin{pmatrix}\sigma'(s)\\ \tau'(s)\end{pmatrix} =_{\text{def}} T(s)$ soit un vecteur tangent à Γ* unitaire *c'est-à-dire telle que $\sqrt{\sigma'(s)^2+\tau'(s)^2} = 1$. La fonction réciproque $s = h^{-1}(t)$ — appelée* abscisse curviligne *sur Γ — est donnée par*

$$ds = \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt, \qquad s = \int_p^t \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt.$$

En effet $\sigma'(s) = \alpha'(t)\frac{dt}{ds}$ et $\tau'(s) = \beta'(t)\frac{dt}{ds}$, de sorte que ce qui est demandé s'écrit : $1 = \frac{dt}{ds}\sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}$, ou encore $ds = \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt$, soit encore $s = \int_p^t \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt$. Et alors $l = \int_p^q \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt$.

Abscisse curviligne et longueur d'un arc de courbe continument dérivable — *Sous les hypothèses ci-avant sur γ, la longueur*

$$L(\gamma) =_{\text{def}} \lim_{|\sigma|\to 0} L(\gamma_\sigma)$$

existe bien et vaut :

$$L(\gamma) =_{\text{def}} \lim_{|\sigma|\to 0} L(\gamma_\sigma) = \int_p^q \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt.$$

En effet, pour chaque i, la formule des accroissements finis sur $[t_{i-1}, t_i]$ donne un $u_i \in]t_{i-1}, t_i[$ et un $v_i \in]t_{i-1}, t_i[$ tels que $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \alpha'(u_i)(t_i - t_{i-1})$ et que $\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}) = \beta'(v_i)(t_i - t_{i-1})$. Alors $L(\gamma_\sigma) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\alpha'(u_i)^2+\beta'(v_i)^2}(t_i - t_{i-1})$. Or la quantité $S = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\alpha'(u_i)^2+\beta'(u_i)^2}(t_i - t_{i-1})$ est une somme de Riemann $S_R\big(\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}, (\sigma, u)\big)$ qui tend donc vers $\int_p^q \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt$. Pour conclure il suffit donc de montrer que la différence $L - S$, avec $L = L(\gamma_\sigma)$, tend vers 0. Et pour cela, si l'on on considère $L - S = \sum_{i=1}^n \Big[\sqrt{(\alpha'(u_i)^2+\beta'(v_i)^2} - \sqrt{(\alpha'(u_i)^2+\beta'(u_i)^2}\Big](t_i - t_{i-1})$, on a $|L - S| \leq \sum_{i=1}^n \Big|\Big[\sqrt{(\alpha'(u_i)^2+\beta'(v_i)^2} - \sqrt{(\alpha'(u_i)^2+\beta'(u_i)^2}\Big]\Big||(t_i - t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |\beta'(v_i) - \beta'(u_i)\Big]||(t_i - t_{i-1})|$ — car pour $a, b, c \in \mathbb{R}$: $b \leq \sqrt{a^2+b^2}$, $c \leq \sqrt{a^2+c^2}$, $|b+c| \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}$, d'où $\Big|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\Big| = \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}|b - c| \leq |b - c|$. Alors, la fonction β' étant supposée continue sur $[p,q]$ on sait qu'elle est uniformément continue, et donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que dès que $|\sigma| < \delta$ — et donc, pour tout i, $|v_i - u_i| < \delta$ — on soit assuré que $|\beta'(v_i) - \beta'(u_i)| < \varepsilon$, donc $L - S < \varepsilon(q - p)$.

6.2. L'élément de longueur ds en coordonnées curvilignes et notamment en coordonnées polaires et bipolaires.

L'élément de longueur est l'expression que nous venons de rencontrer $ds = \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt$ à partir de laquelle on calcule la longueur $s = \int_p^t \sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}dt$. En fait on a $\alpha'(t)dt = d\alpha$, $\beta'(t)dt = d\beta$, et l'on peut donc écrire $ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$, soit, puisque $x = \alpha(t)$ et $y = \beta(t)$,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Le calcul de ds se fera à partir de cette expression, en y remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction du paramètre t. Si x et y sont fonctions de t par l'intermédiaire de deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$ sous la forme $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$ on dit que $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$ sont des *coordonnées curvilignes* du point de coordonnées cartésiennes (x,y), et $dx = \frac{\partial x}{\partial u}u'(t)dt + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)dt$ et $dy = \frac{\partial y}{\partial u}u'(t)dt + \frac{\partial y}{\partial v}v'(t)dt$. Alors $ds^2 = \Big(\Big[\frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\Big]^2 + \Big[\frac{\partial y}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}v'(t)\Big]^2\Big)dt^2 = \Big(\big(\frac{\partial x}{\partial u}\big)^2 + \big(\frac{\partial y}{\partial u}\big)^2\Big)u'^2(t)dt^2 + \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\Big)u'(t)v'(t)dt^2 + \Big(\big(\frac{\partial x}{\partial v}\big)^2 + \big(\frac{\partial y}{\partial v}\big)^2\Big)v'^2(t)dt^2$ et donc on a :

Le ds^2 en coordonnées curvilignes, en coordonnées curvilignes orthogonales. — *Si $(x,y) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ alors :*

$$ds^2 = \Big(\big(\frac{\partial x}{\partial u}\big)^2 + \big(\frac{\partial y}{\partial u}\big)^2\Big)du^2 + \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\Big)dudv + \Big(\big(\frac{\partial x}{\partial v}\big)^2 + \big(\frac{\partial y}{\partial v}\big)^2\Big)dv^2.$$

Si de plus les coordonnées curvilignes (u,v) sont orthogonales *— c'est-à-dire si $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$, alors :*

$$ds^2 = \Big(\big(\frac{\partial x}{\partial u}\big)^2 + \big(\frac{\partial y}{\partial u}\big)^2\Big)du^2 + \Big(\big(\frac{\partial x}{\partial v}\big)^2 + \big(\frac{\partial y}{\partial v}\big)^2\Big)dv^2.$$

Si l'on passe des coordonnées cartésiennes aux polaires, par $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, on a $dx = d\rho\cos\theta - \rho\sin\theta d\theta$, $dy = d\rho\sin\theta + \rho\cos\theta d\theta$, donc $dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$.

Le ds^2 en polaires — *En coordonnées polaires on a*

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Donc si une courbe a pour équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, l'élément d'arc sur cette courbe s'écrit :

$$ds = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\theta.$$

Si sont fixés deux pôles $F = (c, 0)$ et $G = (-c, 0)$, avec $O = (0, 0)$ leur milieu, on peut repérer un point $M = (x, y)$ du plan par trois conditions : le signe de y, la distance $p = MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, la distance $q = MG = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. On appelle $[p, q]$ les *coordonnées bipolaires* de M relativement aux pôles F et G. Avec $\rho = OM$ et $\theta = FOM$ on a $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $p^2 = \rho^2 - 2c\cos\theta\rho + c^2$, $q^2 = \rho^2 + 2c\cos\theta\rho + c^2$, $2\rho^2 = p^2 + q^2 - 2c^2$, $x = \frac{q^2-p^2}{4c}$, $2y^2 = p^2 + q^2 - 2c^2 - 2x^2$, $y = \frac{\pm 1}{2c}\sqrt{2c^2(p^2+q^2) - 4c^2 - (p^2-q^2)^2}$. Alors $dx = \frac{qdq-pdp}{2c}$, $dy = \frac{pdp+qdq}{2y} - \frac{x}{y}dx$, et en substituant dans $ds^2 = dx^2 + dy^2$ et tenant compte de $x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = p^2$ et $x^2 + y^2 + 2cx + c^2 = q^2$, on obtient, une fois tout développé :

Le ds^2 en bipolaires — *En coordonnées bipolaires on a, avec $y > 0$,*

$$ds = \frac{\sqrt{p^2q^2(dp)^2 + \left(4c^2 - (p^2+q^2)\right)dp\,dq + p^2q^2(dq)^2}}{\sqrt{2c^2(p^2+q^2) - 4c^4 - (p^2-q^2)^2}}.$$

6.3. Arcs d'ellipse et d'hyperbole.

Intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèces — *Soit* $0 < k^2 < 1$. *On appelle* intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèces *les intégrales*

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}, \quad E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\,d\theta, \quad \Pi(n; \phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 - n\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}.$$

Ces intégrales tiennent leur qualificatif d'*elliptiques* du cas de la deuxième, $E(\phi, k)$, dont nous allons voir qu'elle représente un arc d'ellipse.

Soit $\mathcal{E}_{a,b}$ l'*ellipse* d'équations paramétrées $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, avec $a \leq b$. Avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, les points $F = (c, 0)$ et $G = (-c, 0)$ sont les *foyers*, et l'ellipse est le lieu des points $M = (x, y)$ tels que $MF + MG = 2a$, soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. L'*excentricité* est $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, et le *coefficient de contraction* $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$. La longueur du cercle de rayon a est $L(\mathcal{E}_{a,a}) = 2\pi a$ et la longueur de l'ellipse vaut $L(\mathcal{E}_{a,b}) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$. L'arc d'ellipse qui va de $A = (a, 0)$ au point $M(t) = (a\cos t, b\sin t)$ vaut $L\big(\mathcal{E}_{a,b}(AM)\big) = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}\,du = a\int_0^t \sqrt{1 - e^2\cos^2 u}\,du$. Si l'on pose $u = v + \frac{\pi}{2}$ et $t = \phi + \frac{\pi}{2}$, de sorte que ϕ est l'angle BOM compté depuis le petit sommet $B = (O, b)$ en tournant dans le sens direct jusqu'à M, alors $L\big(\mathcal{E}_{a,b}(BM)\big) = \int_0^\phi \sqrt{a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v}dv = a\int_0^\phi \sqrt{1 - e^2\sin^2 v}dv = aE(\phi, e)$. Donc :

Arc d'ellipse — *Avec les notations ci-avant, l'arc d'ellipse vaut $L\big(\mathcal{E}_{a,b}(BM)\big) = aE(\phi, e)$. L'intégrale elliptique de deuxième espèce $E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\,d\theta$ représente donc la longueur $L\big(\mathcal{E}_{1,\sqrt{1-k^2}}(BM)\big)$ de l'arc de l'ellipse $x^2 + \frac{y^2}{1-k^2} = 1$ d'origine $B = (0, \sqrt{1-k^2})$ et d'extrémité M telle que $BOM = \phi$, soit $M = (-a\sin\phi, b\cos\phi)$.*

Soit $\mathcal{H}_{a,b}$ l'*hyperbole* d'équations paramétrées $x = a\cosh t = a\frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = b\sinh t = b\frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, les points $F = (c, 0)$ et $G = (-c, 0)$ sont appelés les *foyers*, et l'hyperbole est le lieu des points $M = (x, y)$ tels que $|MF - MG| = 2a$, soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. L'*excentricité* est $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$. L'arc d'hyperbole qui va de $A = (a, 0)$ au point $M(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$ vaut $L\big(\mathcal{H}_{a,b}(AM)\big) = \int_0^t \sqrt{a^2\sinh^2 u + b^2\cosh^2 u}\,du = a\int_0^t \sqrt{e^2\cosh^2 u - 1}\,du$.

6.4. Repère mobile, intégration de l'équation naturelle, et cinématique.

Repère mobile de Serret-Frenet $(\gamma; T, N)$ — Soit donc comme ci-dessus $\gamma(t)$ un paramétrage d'une courbe plane Γ, s l'abscisse curviligne sur cette courbe, $T = \gamma'(t)\frac{dt}{ds}$ le vecteur tangent unitaire au point $\gamma(t)$, et N le vecteur normal unitaire directement perpendiculaire à T. On note $\phi = (i, T)$ l'angle de l'axe Ox avec la tangente T, de sorte que $T = \cos\phi i + \sin\phi j$ et $N = -\sin\phi i + \cos\phi j$. Le repère $(\gamma(t); T, N)$ est un *repère mobile* avec t sur Γ. Il ne dépend pas du choix du repère fixe $(O; i, j)$. Supposons donc que ce dernier soit choisi tel que, au voisinage de $\gamma(t)$ la courbe s'écrive $y = y(x)$.

On a donc, en dérivant par rapport à x : $y' = \frac{dy}{dx} = \tan\phi$, et on a $1 + y'^2 = 1 + \tan^2\phi = \frac{1}{\cos^2\phi}$, puis $y'' = \frac{\phi'}{\cos^2\phi}$. On a aussi $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, donc $y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{R}$ et $y'' = \frac{1}{R\cos^3\phi}$. On a enfin $\sqrt{1+y'^2}dx = ds$ donc $\frac{1}{\cos\phi} = s'$. Donc $dx = \cos\phi ds$, et si (x, y) est un point quelconque sur Γ, on a $\frac{dy}{dx} = \tan\phi$, donc $dy = \tan\phi dx = \tan\phi\cos\phi ds$, donc $dy = \sin\phi ds$. Et de $y'' = \frac{\phi'}{\cos^2\phi} = \frac{1}{R\cos^3\phi}$ on tire $\phi' = \frac{1}{R\cos\phi} = \frac{s'}{R}$, que l'on écrit encore $ds = Rd\phi$.

On a alors $\frac{d\gamma}{ds} = T = \cos\phi i + \sin\phi j$, puis $dT = (-\sin\phi i + \cos\phi j)d\phi = Nd\phi$. Et donc $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}N$. Et puis $\frac{dN}{ds} = (-\sin\phi i - \cos\phi j)\frac{d\phi}{ds} = -T\frac{d\phi}{ds} = -\frac{1}{R}T$.

Variation du repère mobile $(\gamma; T, N)$ — *On a les formules*

$$ds = \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}dt, \quad \frac{d\gamma}{ds} = T, \quad \phi = (i, T), \quad dx = \cos\phi ds, \quad dy = \sin\phi ds,$$

$$\frac{ds}{d\phi} = R, \quad \frac{d^2\gamma}{ds^2} = \frac{dT}{ds} = \frac{1}{R}N, \quad \frac{dN}{ds} = -\frac{1}{R}T.$$

Avec la courbure $k(s) = \frac{1}{R(s)}$ *on peut donc reformuler symboliquement en une écriture matricielle :*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}.$$

Autrement dit on forme la matrice $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ ayant pour première ligne les coordonnées de T dans la base canonique (i, j) et pour seconde ligne les coordonnées de N dans la base canonique (i, j), soit $T = b_{1,1}i + b_{1,2}j$ et $N = b_{2,1}i + b_{2,2}j$. Alors $B^\top = B^{-1}$, de sorte que B est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base (T, N) des vecteurs i et j. Avec $K = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix}$ on a

$$K = \Big(\frac{d}{ds}B\Big)B^{-1}, \quad \frac{d}{ds}B = KB.$$

Intégration de $\frac{d}{ds}B = KB$ et de l' équation naturelle $R = R(s)$ ou $k = k(s)$. — Sur une courbe plane $x = x(t), y = y(t)$ suffisamment dérivable, il existe deux fonctions naturelles, à savoir la *courbure* $k = \frac{1}{R}$ et l'*abscisse curviligne* s. La relation fonctionnelle $k = k(s)$ entre k et s s'appelle l'*équation naturelle* de la courbe. Elle caractérise la courbe indépendamment du choix des axes de coordonnées, à un déplacement près. Puis des axes étant choisis, on peut reconstruire la courbe à partir de la donnée de la fonction $k = f(s)$, celle-ci étant simplement supposée continue. *L'équation $\frac{d}{ds}B = KB$ s'intègre par quadratures (c'est-à-dire par primitives), et donc ensuite l'équation $k = k(s)$.*

En effet on a alors $\frac{d\phi}{ds} = \pm k(s)$, donc $\phi(s) - \phi_0 = \pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1$, et puis $dx = \cos\phi\, ds$ et $dy = \sin\phi\, ds$. De là on a T et N sous la forme $T = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$, soit pour $B(s)$, K (ou k) étant donné, la formule :

$$B(s) = \begin{pmatrix} \cos\left(\pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1 + \phi_0\right) & \sin\left(\pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1 + \phi_0\right) \\ -\sin\left(\pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1 + \phi_0\right) & \cos\left(\pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1 + \phi_0\right) \end{pmatrix}.$$

On tire ensuite $x(s) - x_0 = \int_{s_0}^{s} \cos\phi(s_1)\, ds_1$ et $y(s) - y_0 = \int_{s_0}^{s} \sin\phi(s_1)\, ds_1$:

$$x(s) = \int_{s_0}^{s} \cos\Big(\pm\int_{s_0}^{s_2} k(s_1)ds_1 + \phi_0\Big)ds_2 + x_0, \quad y(s) = \int_{s_0}^{s} \sin\Big(\pm\int_{s_0}^{s_2} k(s_1)ds_1 + \phi_0\Big)ds_2 + y_0.$$

Cinématique plane : vitesse et accélération. — On considère maintenant que t représente le *temps*, de sorte que $\gamma(t)$ est le vecteur *position* d'un mouvement dans le plan $\mathbb{R}^2$, dont $\gamma'(t)$ est le vecteur *vitesse* et $\gamma''(t)$ le vecteur *accélération*. Dans cette conception cinématique d'une courbe, les quantités géométriques s et R sont liées aux quantités cinématiques.

Vecteur vitesse et vitesse sur la trajectoire —*Le* vecteur vitesse *est* $\gamma'(t)$ *et la* vitesse sur la trajectoire *est définie par :*

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

On a donc

$$\gamma'(t) = vT.$$

Alors, en dérivant $\gamma' = vT$ on a $\gamma'' = v'T + vT' = v'T + v\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} = v'T + v\frac{1}{R}Nv$, soit :

Composantes tangente et normale de l'accélération : Serret-Frenet — *L'accélération vaut*

$$\gamma''(t) = \frac{dv}{dt}T + \frac{v^2}{R}N.$$

Intensité de l'accélération — *L'intensité de l'accélération est*

$$\|\gamma''(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}},$$

et donc

$$\|\gamma''(t)\| \geq \frac{v^2}{R}.$$

Notamment si $t = s$ et $v = 1$, c'est-à-dire si l'on se déplace sur la courbe à la vitesse uniforme unité, alors on a la formule $\|\gamma''(s)\| = \frac{1}{R} = k$, si bien que la courbure est "ressentie" comme l'accélération (ou la force centrifuge).

6.5. Développées et développantes de courbes planes, ou le dessin de la variation de courbure.

Développée —*On appelle* développée *ou* evolute *d'une courbe* Γ *dont le point courant est* $M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$*, le lieu géométrique* Δ *de ses centres de courbures* $C(t) = M(t) + R(t)N(t)$*, avec donc*

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|}, \quad C = \left(x_C = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{|x'y'' - x''y'|}, y_C = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{|x'y'' - x''y'|}\right).$$

La normale N à Γ en un point M est tangente à Δ au centre de courbure C relatif au point M. Précisément on a

$$R(t)N'(t) = -M'(t), \quad \text{et} \quad C'(t) = R'(t)N(t).$$

En effet, la tangence annoncée résulte de la dernière formule $C'(t) = R'(t)N(t)$ et de $C(t) = M(t) + R(t)N(t)$. La tangente à Δ en C a la direction de $C' = M' + R'N + RN'$, et donc pour montrer $C'(t) = R'(t)N(t)$ il suffit de montrer $R(t)N'(t) = -M'(t)$, ce que l'on vérifie en dérivant $N = \left(\frac{-y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{x'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$, multipliant par $R = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y''-x''y'|}$, et obtenant bien $(-x', -y') = -M'$. Notons que cette formule $R(t)N'(t) = -M'(t)$ utilisée ici est l'essentiel des formules du repère mobile que nous avons établie juste avant.

Développante — *Dans les hypothèses et notations de l'énoncé ci-avant concernant la* développée*, on dit que* Γ *est la* développante *ou* involute *de* Δ*. Si* $C_0, C_1 \in \Delta$*, les points correspondants sur* Γ *étant* M_0 *et* M_1*, alors* $M_0C_0 + \Delta(C_0C_1) = M_1C_1$*, en désignant par* $\Delta(C_0C_1)$ *l'arc sur* Δ *de* C_0 *à* C_1*. Autrement dit, on retrouve* Γ *en déroulant en le tendant un fil posé sur* Δ*, c'est-à-dire que l'on a pour l'arc de la développée* Δ *la valeur :*

$$\Delta(C_0C_1) = R_1 - R_0.$$

On comprendra cette formule en disant que la développée montre la variation de courbure *de la développante.*

Par suite, si une courbe Δ est paramétrée par son abscisse curviligne $s_\Delta = s$, de point courant $C(s) = \big(x(s), y(s)\big)$, alors ses développantes sont données par $M(s) = \big(x(s) + (c - s)x'(s), y(s) + (c - s)y'(s)\big)$.

En fait, l'essentiel est la formule $C'(t) = R'(t)N(t)$ que nous venons de voir. Car alors, si nous considérons que la courbe Δ est maintenant paramétrée par R, cette formule signifie que $\frac{dC}{dR} = N$, et donc que le paramétrage par R de Δ est tel que $\frac{dC}{dR}$ soit un vecteur unitaire. Le paramètre en question exprime donc l'abscisse curviligne sur la courbe Δ comptée à partir d'un point arbitraire fixé $C(p)$. Autrement dit $R(t) = \int_p^t \sqrt{x_C'(t)^2 + y_C'(t)^2}dt = s_\Delta(t)$.

6.6. Dynamique plane du point matériel, énergie cinétique.

Dynamique. — Admettons la *loi de Newton* de *dynamique*, énoncée :

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Soit : “Le changement de mouvement est proportionnel à la force appliquée, et s’exerce dans la direction de la droite suivant laquelle s’exerce la force”. Autrement dit, un point matériel de masse m occupant les positions successive $\gamma(t)$, suivant un mouvement $\gamma'(t)$, avec t le temps, et sur lequel agit, quand il est au point (x, y) une force $F(x, y)$ satisfait à

$$m(\gamma')'(t) = F.$$

On va décomposer cette loi en ses composantes tangentielle et normale, soit $m(\gamma')'(t).T = F.T$ et $m(\gamma')'(t).N = F.N$.

La *composante tangentielle de la force* ou *force de traction*, soit $f = F.T$, vaut m fois la composante tangentielle de l’accélération, soit $m\gamma''(t).T(s(t)) = \frac{dv}{dt}$, soit :

$$m\frac{dv}{dt} = f.$$

Autrement dit, puisque $v = \frac{ds}{dt}$, on a

$$ms'' = f.$$

Si, en fonction du temps t, le point est mobile sur une courbe supposée connue Γ, où l’abscisse curviligne est notée s, alors le mouvement est complètement connu dès que l’on connaît la *loi horaire* $s = s(t)$. Si l’on connaît la composante tangentielle de la force agissant au point d’abscisse curviligne s, la loi horaire satisfait donc à l’équation différentielle

$$ms'' = f(s).$$

La *composante normale de la force* ou *force de déviation*, soit $h = F.N$, vaut m fois la composante normale de l’accélération, soit soit $m\gamma''(t).N(s(t)) = m\frac{v^2}{R}$, soit :

$$m\frac{v^2}{R} = h.$$

Or $\frac{1}{R} = |\frac{d\phi}{ds}|$, et $v = \frac{ds}{dt}$, donc $\frac{1}{R} = |\frac{\phi'}{v}|$, $\frac{v}{R} = \phi'$, et l’équation s’écrit :

$$v\phi' = \pm h.$$

Énergie cinétique. — En introduisant l’*énergie cinétique* $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, cette équation s’écrit encore $ms''s' = f(s)s'$, soit $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}ms'^2 = f(s)s'$, soit l’*intégrale première de l’énergie cinétique* : $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2 = f(s)s'$, ou encore $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)dt = f(s)ds$. En intégrant chaque membre de cette équation on obtient $\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2dt = \int_{s_0}^{s} f(s)ds$, soit

$$\left[\frac{1}{2}mv^2(t)\right]_{t_0}^{t} = \int_{s_0}^{s} f(s)ds.$$

De là on tire $dt = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}\int_{s_0}^{s} f(s)ds+v^2(t_0)}}$, et en intégrant membre à membre il vient, en posant $v_0 = v(t_0)$:

$$t(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}\int_{s_0}^{s} f(s)ds + v_0^2}} + t_0.$$

On trouve enfin la loi horaire $s(t)$ comme la fonction réciproque de la fonction $t(s)$.

De l’intégrale première de l’énergie cinétique on tire aussi, avec la formule de Serret-Frenet, avec $m\gamma''.N = F.N = F_N$, la composante normale de la force totale F, $F_N = \frac{mv^2}{R}$, $mv^2 = RF_N$, et donc

$$F_N - F_{N_0} = \frac{2}{R}\int_{s_0}^{s} f(s)ds.$$

Traction constante, sur une trajectoire fixée. — Par exemple si la force de traction tangentiellle $f(s)$ est constante, $f(s) = f_0$, avec $v(t_0) = v_0$ on trouve $t - t_0 = \frac{m}{f_0}\left(\sqrt{\frac{2f_0}{m}(s - s_0) + v_0^2} - v_0\right)$, d’où $s - s_0 = \frac{m}{2f_0}\left(\left(\frac{f_0}{m}(t - t_0) + v_0\right)^2 - v_0^2\right) = \frac{f_0}{2m}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$, puis $v = \frac{f_0}{m}(t - t_0)$ et $v' = \frac{f_0}{m}$. Formules qui bien sûr résultent immédiatement de $mv' = f_0$ et

$s' = v$, mais que l'on préfère ici déduire de la forme générale de $t(s)$, pour souligner qu'a priori c'est $t(s)$ et non pas $s(t)$ que l'on arrive à exprimer.

Point pesant sur une courbe connue — Un exemple important est celui du mouvement contraint sans frottement à une courbe et sous l'action de la gravitation $F = (0, -mg)$ (On imagine que le plan du mouvement est vertical, le bas étant suivant l'axe des y négatif. On a alors, avec $\phi = (i, T)$ l'inclinaison de la tangente, la traction tangentielle qui vaut $f = F.T = -mg\sin\phi$, et donc la loi horaire $s = s(t)$ répond de l'équation $s'' = -g\sin\phi$, soit $s'' = -g\frac{dy}{ds}$, ou $s''.s' = -g\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}$, ou encore $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}s'^2) = \frac{d}{dt}(-gy)$, qui s'intègre en

$$\frac{1}{2}s'^2 - \frac{1}{2}{s'_0}^2 = g(y_0 - y)$$

qui s'écrit encore

$$\frac{1}{2}s'^2 + gy = \frac{1}{2}{s'_0}^2 + gy_0.$$

On continue ensuite comme dans le cas général, extrayant $dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0-y)+{v_0}^2}}$, d'où

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y) + {v_0}^2}}.$$

Si la courbe trajectoire connue Γ est décrite sous la forme $\mu(u) = \gamma(f(u)) = (x(u), y(u))$ à l'aide d'un paramètre $u \in [u_0, u_1]$, qui n'est ni l'abscisse curviligne s ni le temps t, avec $t = f(u)$, alors on a $ds = \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}du$, et on trouve $t = f(u)$ sous la forme :

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}}{\sqrt{2g(y_0 - y(u)) + {v_0}^2}}du,$$

et la composante normale de la force totale est

$$F_N - F_{N_0} = \frac{2g}{R}(y_0 - y).$$

Point pesant en milieu libre résistant à la vitesse — On considère un point pesant de masse m mobile dans l'espace libre sous l'action de deux forces : la force de gravitation $F = (0, -mg)$ et une force de résistance R qui s'oppose au mouvement, qui est donc de direction la vitesse V, et qui est supposée être seulement une fonction $r(v)$ de la vitesse v, c'est-à-dire que $R = -gr(v)T$, avec $r(v) \geq 0$. On écrit les composantes tangentielles et normales de l'accélération et des forces :

$$mv' = -mg(\sin\phi + r(v)), \quad mv\phi' = -mg\cos\phi.$$

Le premier cas est celui où la vitesse initiale en $t = t_0$ est verticale, de valeur numérique v_0 telle que $0 < r(v_0) < 1$. Alors le mouvement sera en permanence sur la même verticale, on aura toujours $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\sin\phi = -1$, et l'équation tangentielle suffira à l'étude. Dans ce cas $z' = v$, et $\frac{dv}{dt} = g(1 - r(v))$. On a donc $t - t_0 = \frac{1}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{1-r(v)}dv$. Avec la fonction $v = v(t)$ réciproque de $t = t(v)$, on obtient $z(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + z_0$.

Par exemple si $r(v) = kv$, avec $k > 0$, on a $g(t - t_0) = \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{1-kv} = \ln|\frac{1-kv}{1-kv_0}|$, d'où $e^{g(t-t_0)} = \frac{|1-kv|}{|1-kv_0|}$, et donc il vient $v(t) = \frac{1}{k}\left(1 - (1 - kv_0)e^{g(t-t_0)}\right)$, puis $z(t) = \frac{1}{k}\int_{t_0}^{t}\left(1 - (1 - kv_0)e^{g(t-t_0)}\right)dt + z_0 = \frac{1}{k}\left[(t - t_0) + \frac{1-kv_0}{g}(1 - e^{g(t-t_0)})\right] + z_0$.

Le deuxième cas est celui où la vitesse initiale n'est pas verticale. En faisant les rapports membre à membre des deux équations tangentielle et normale du mouvement, et en considérant v comme fonction de ϕ, il vient l'équation :

$$\frac{dv}{d\phi} = v\frac{\sin\phi + r(v)}{\cos\phi}.$$

Si l'on suppose que l'on a trouver une fonction $v = v(\phi)$ satisfaisant à cette condition, alors on trouve le mouvement par calculs de primitives, en considérant d'abord que $v\phi' = -g\cos\phi$ donne $dt = -\frac{v}{g\cos\phi}d\phi$, et que $ds = vdt$, donne $ds = -\frac{v^2}{g\cos\phi}d\phi$. Puis $dx = ds\cos\phi$ donne alors $dx = -\frac{v^2}{g}d\phi$, et $dy = ds\sin\phi$ donne $dy = -\frac{v^2\tan\phi}{g}d\phi$. on a donc :

$$t - t_0 = -\frac{1}{g}\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{v(\phi)}{\cos\phi}d\phi, \quad x - x_0 = -\frac{1}{g}\int_{\phi_0}^{\phi} v^2(\phi)d\phi, \quad y - y_0 = -\frac{1}{g}\int_{\phi_0}^{\phi} v^2(\phi)\tan(\phi)d\phi.$$

6.6. Travail d'un champ de vecteurs sur un chemin, énergie potentielle, énergie totale.

Travail. — Avec les notations ci-dessus dans la définition de la longueur de γ_σ et de γ, soit de plus F un *champ de vecteur* défini sur $\mathcal{X}$, $F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, $(x,y) \in \mathcal{X}$. Pour la subdivision σ, on considère le *travail* de F sur la ligne polygonale γ_σ, soit, avec $\alpha_i = \alpha(t_i)$ et $\beta_i = \beta(t_i)$, la quantité

$$\mathcal{W}_{\gamma_\sigma} F = \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i,\beta_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}) + Q(\alpha_i,\beta_i)(\beta_i - \beta_{i-1}),$$

$$\mathcal{W}_{\gamma_\sigma} F = \sum_{i=1}^{n} P\big(\alpha(t_i),\beta(t_i)\big)\big(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\big) + Q\big(\alpha(t_i),\beta(t_i)\big)\big(\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})\big).$$

Dans cette somme le j-ième terme qui vaut $F(\gamma(t_j)).\overrightarrow{\gamma(t_{j-1})\gamma(t_j)}$ est donc la projection de $F(\gamma(t_j))$ dans la direction $\overrightarrow{\gamma(t_{j-1})\gamma(t_j)}$, multipliée par la longueur de $\gamma(t_{j-1})\gamma(t_j)$, soit ce que l'on considèrera comme le *travail élémentaire fini* effectué par F tirant de $\gamma(t_{j-1})$ jusqu'à $\gamma(t_j)$. On définit alors le *travail* de F sur γ comme la limite, si elle existe :

$$\mathcal{W}_\Gamma F = \lim_{|\sigma|\to 0} \mathcal{W}_{\gamma_\sigma} F.$$

Travail [suite] — *Dans les hypothèses ci-avant sur γ, à savoir que les composantes α et β soient des fonctions continûment dérivables du paramètre t, et si le champ F a ses composantes P et Q continûment dérivables, alors $\lim_{|\sigma|\to 0} \mathcal{W}_{\Gamma_\sigma} F$ existe et vaut*

$$\lim_{|\sigma|\to 0} \mathcal{W}_{\Gamma_\sigma} F = \int_p^q F\big(\alpha(t),\beta(t)\big).\gamma'(t)dt.$$

En effet, avec les mêmes notations que dans la preuve du calcul de la longueur par une intégrale, faite plus haut, on écrit $\mathcal{W}_{\Gamma_\sigma} F = \sum_{i=1}^n [P\big(\alpha(t_i),\beta(t_i)\big)\alpha'(u_i) + Q\big(\alpha(t_i),\beta(t_i)\big)\beta'(v_i)](t_i - t_{i-1})$, ce que l'on compare à la somme de Riemann $S = \sum_{i=1}^n [P\big(\alpha(u_i),\beta(u_i)\big)\alpha'(u_i) + Q\big(\alpha(u_i),\beta(u_i)\big)\beta'(u_i)](t_i - t_{i-1})$. La différence $\mathcal{W}_{\Gamma_\sigma} F - S$ tend vers 0, comme dans le cas du calcul de la longueur, grâce, ici, à l'uniforme continuité de la fonction $P\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\alpha'(t) + Q\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\beta'(t)$, laquelle résulte de sa continuité.

Travail [fin] —*Dans les hypothèses ci-avant on a*

$$\mathcal{W}_\Gamma F = \int_{s_0}^{s_1} F\big(\sigma(s),\tau(s)\big).T(s)ds.$$

En effet, reprenons la définition du travail directement en termes infinitésimaux liées à l'abscisse curviligne, pour finalement arriver à la même valeur. Soit F un *champ de vecteur* défini sur $\mathcal{X}$, $F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, $(x,y) \in \mathcal{X}$. Si sur une courbe géométrique orientée rectifiable Γ de source a et but b tracée dans $\mathcal{X}$ on prend comme paramètre l'abscisse curviligne s comptée de s_0 en a jusqu'à s_1 en b, alors on peut décrire Γ comme la courbe paramétrée $\nu : [s_0, s_1] \to \mathcal{X}$ telle que $\nu(s) = \big(\sigma(s),\tau(s)\big)$ soit le point d'abscisse curviligne s. On sait qu'alors $\nu'(s) = T(s)$ est le vecteur tangent unitaire à Γ. Alors on peut considérer le produit scalaire $F(\nu(s)).T(s)ds$, soit le produit de la longueur ds par la composante de F tangentiellement à Γ en $\nu(s)$, comme un *travail élémentaire infime* de F sur Γ, et ainsi définir le travail de a vers b sur Γ comme la quantité $\mathcal{W}_\Gamma F = \int_{s_0}^{s_1} F\big(\sigma(s),\tau(s)\big).T(s)ds$. En fait le travail ayant été ainsi défini d'abord en utilisant l'abscisse curviligne s peut ensuite se calculer sans connaître s, en changeant de variable. Si $\gamma : [p,q] \to \mathcal{X}$ est un autre paramétrage $\gamma(t) = \big(\alpha(t),\beta(t)\big)$ de la même courbe Γ, de paramètre t avec $t = h(s)$, avec $h'(s) > 0$, avec $h(s_0) = p$ et $h(s_1) = q$, on considère la dérivée de γ comme un vecteur, soit $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}$. Avec $T(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds}$, soit $T(s)ds = \gamma'(t)dt$, le changement de variable $t = h(s)$ donne : $\mathcal{W}_\Gamma F = \int_p^q F\big(\alpha(t),\beta(t)\big).\gamma'(t)dt$.

On observe qu'on retrouve le calcul des longueurs de courbes comme un calcul de travail : en effet, si $T(s)$ est le vecteur tangent unitaire orienté au point d'abscisse curviligne s sur l'arc Γ de a à b, alors $\mathcal{W}_\Gamma T = \int_{s_0}^{s_1} T(s).T(s)ds = \int_0^l ds = l$. Toutefois T n'est défini que sur Γ, et non pas dans un ouvert $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant Γ.

Aussi dans $\left[\frac{1}{2}mv^2(t)\right]_{t_0}^{t} = \int_{s_0}^{s} f(s)ds$ plus haut, l'intégrale est en fait $\int_{s_0}^{s} f(s)ds = \int_{s_0}^{s} F\big(\sigma(s),\tau(s)\big)T(s)ds = \mathcal{W}_{\Gamma_s} F$ — en désignant par Γ_s la restriction de Γ à $[s_0, s]$ — et l'intégrale première de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\left[\frac{1}{2}mv^2(t)\right]_{t_0}^{t} = \mathcal{W}_{\Gamma_s} F.$$

Potentiel — Supposons défini F sur $D_R(\alpha,\beta)$, et supposons aussi que, dans ce disque il existe un *potentiel* U pour F, soit une fonction continue dérivable telle que $\nabla U = F$, soit $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Si cela a lieu et si F est continument dérivable, il faut, vu le lemme de Schwarz, que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En fait, dans un disque, pour un F continument dérivable, cette condition est suffisante pour l'existence de U, car on peut alors prendre $U(x,y) = \int_\beta^y Q(\alpha,v)dv + \int_\alpha^x P(u,y)du$. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de dérivation d'intégrale dépendant d'un paramètre, il vient d'une part $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ et, d'autre part $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(\alpha,y) + \int_\alpha^x \frac{\partial P}{\partial y}(u,y)duQ(\alpha,y) = Q(\alpha,y) + \int_\alpha^x \frac{\partial Q}{\partial x}(u,y)du = Q(\alpha,y) + (Q(x,y) - Q(\alpha,y)) = Q(x,y)$.

Existence locale de potentiel — *Si dans un disque $D_R(\alpha,\beta)$ un champ de vecteurs continument différentiable est donné, alors il existe une fonction U sur le disque tel que $\nabla U = F$ — soit un* potentiel *dont F dérive — si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Plaçons-nous dans un disque $D_R(\alpha,\beta)$ de centre (α,β) et de rayon R, et supposons que la courbe Γ soit tracée dans ce disque, de source (α,β) et de but (u,v), et que dans le disque, le champ de forces F dérive du potentiel U. Alors le travail de F sur γ vaut $\mathcal{W}_\Gamma F = \int_p^q F\big(\alpha(t),\beta(t)\big).\gamma'(t)dt = \int_p^q (P\alpha' + Q\beta')dt = \int_p^q \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial U}{\partial x}\beta'\right)dt = \int_p^q \frac{d}{dt}Udt = [U]_p^q$. Alors $E_p = U$ est appelée l'*énergie potentielle* du champs, et on définit l'*'energie totale* (ou simplement on dira l'*énergie*) du mouvement comme la somme $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + U$.

Intégrale de l'énergie — *Soit dans un disque un point matériel de masse m, en mouvement dans un champ de force F dérivant d'un potentiel U — soit donc tel que $F = \nabla U$ — et soit $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ son énergie totale. Alors on a l'intégrale première de l'énergie :*

$$E = E_0.$$

EXERCICES

1 — On considère la courbe $x = t^2, y = t^3$. Montrer que la longueur $s(t)$ de l'arc allalnt du point $t = 0$ au point $t = t$ vaut $s(t) = \frac{(4+9t^2)^{\frac{3}{2}} - 8}{27}$. Cette courbe est un exemple (le premier connu après la droite) de courbe algébrique d'arc algébrique.

COURS 7 (10/05/06) — **Équation différentielle du premier ordre à une variable réelle et famille à un paramètre réelle de courbes planes.**

De façon générale, une *équation différentielle d'ordre n* et admettant pour inconnue une fonction d'une variable x définie sur un intervalle $]a, b[$ qui est n fois dérivable et s'écrit $y = y(x)$, est une équation

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

avec $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction sur une partie $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ où figurent comme variables la variable x, la fonction y, et les dérivées successives de y jusqu'à l'ordre n, Une fonction *solution* ou *courbe intégrale explicite* est un couple $(y,]a, b[)$ d'un intervalle ouvert $]a, b[$ et d'une fonction $y :]a, b[\to \mathbb{R}$ qui soit n fois dérivables, tel que, pour tout $x \in]a, b[$ on ait $\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) \in \mathcal{D}$ et qu'en substituant à y, y', etc. les valeurs $y(x)$, $y'(x)$, etc., dans Φ le résultat soit identiquement 0 pour tout $x \in]a, b[$. Si l'on obtient seulement une fonction $y = y(x)$ solution sous forme de fonction implicite, $g(x, y) = 0$, on parle de *courbe intégrale implicite*.

Solution géométrique d'une équation différentielle du premier ordre — *On appelle* solution géométrique *d'une équation du premier ordre $\Phi(x, y, y') = 0$ où donc y' dénote $y' = \frac{dy}{dx}$, une courbe paramétrée $x = x(t)$, $y = y(t)$, définie pour $t \in [a, b]$ telle que, avec maintenant les notations $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ et $y'(t) = \frac{dy}{dt}$, on ait*

$$\Phi(x, y, \tfrac{y'}{x'}) = 0.$$

Une solution $y = y(x)$ est évidemment une solution géométrique en prenant $x = t$ et $y(t) = y(x)$. En revanche en général une solution géométrique n'est pas exprimable sous la forme $y = y(x)$, sauf peut-être parfois localement. Ainsi les solutions usuelles $y = \sqrt{1 - x^2}$ et $y = -\sqrt{1 - x^2}$ de $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$ sont distinctes et maximales, ne pouvant se prolonger aux points $x = \pm 1$. En revanche elles sont deux parties d'une unique solution géométrique, à savoir $x = \cos t$, $y = \sin t$, qui satisfait bien à $y'(t) = \frac{x(t)}{y(t)} x'(t)$. Cette solution géométrique n'est pas exprimable sous la forme $y = y(x)$ sans restreindre le domaine de définition, et en tous cas cela n'est pas possible au voisinage des points $x = \pm 1$. De façon générale une solution singulière telle que l'enveloppe d'une solution générale apparaît comme solution géométrique. Comme on peut voir plus loin pour le cas de l'astroïde.

On distinguera soigneusement, pour les fonctions, entre les notions suivantes qui seront précisées quand nécessaire : solution ou intégrale, solution ou intégrale locale, solution ou intégrale maximale, intégrale générale, solution particulière, solution singulière, solution générale, et solution géométrique. Et des distinctions semblables pour les courbes non nécessairement décrites par des fonctions explicites. On fera aussi attention aux notions d'enveloppe de famille de courbes, de lieux singuliers de famille de courbes et de lieux singuliers d'équation différentiellle.

7.1. Équations $y' = f(x, y)$: solutions locales, maximales, particulières, générale, singulières, géométriques.

Définition de base — Précisons complètement la définition que nous allons utiliser dans ce paragraphe. Une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ est un *ouvert* si, pour tout $(u, v) \in \Omega$ il existe un pavé ouvert $]a, b[\times]c, d[$ tel que $(u, v) \in]a, b[\times]c, d[\subseteq \Omega$. Et elle est *connexe* s'il n'existe pas deux ouverts disjoints non-vides Ω_1 et Ω_2 tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$; pour cela la *connexité par arc* — à savoir que pour deux points quelconques M et N de Ω il existe un arc continue $\gamma = [a, b]$ tel que $\gamma(a) = M$ et $\gamma(b) = N$ — suffit. Une *équation différentielle du premier ordre* $\Phi(x, y, y') = 0$ *supposée résolue en y* , c'est-à-dire une équation de la forme

$$y' = f(x, y),$$

est exactement la donnée d'un couple (f, Ω) où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de (x, y) sur un *ouvert connexe* Ω de $\mathbb{R}^2$. L'équation a pour inconnue une fonction $y = y(x)$ dérivable, et elle détermine la pente de tangente y' une fois donné le point (x, y) sur ladite courbe, lorsque celle-ci est une solution. Exactement on appelle *solution* de l'équation un couple $(y,]a, b[)$ d'un intervalle ouvert $]a, b[$ et d'une fonction $y :]p, q[\to \mathbb{R}$ dérivable, tel que, pour tout $x \in]a, b[$ on ait $\big(x, y(x)) \in \Omega$ et qu'en substituant à y, y', etc. les valeurs $y(x)$, $y'(x)$ dans $y' = f(x, y)$, le résultat soit identiquement 0 pour tout $x \in]a, b[$. Du coup, compte tenue de l'équation, si y est une solution, alors sa dérivée $y' = f(x, y)$ est continue.

Si $(y_1,]a_1, b_1[)$ et $(y_2,]a_2, b_2[)$ sont deux solutions telles que $]a_1, b_1[\subseteq]a_2, b_2[)$ et que, pour tout $x \in]a_1, b_1[$ on ait $y_2(x) = y_1(x)$ on dit que la solution y_2 *prolonge* la solution y_1. Une solution est dite *solution maximale* si elle ne peut être prolongée. On peut démontrer (admettons-le) que *pour toute solution y il existe une solution maximale $\overline{y}$ qui prolonge y*. Par suite on connaîtra toutes les solutions quand on connaîtra toutes les solutions maximales.

Énonçons sans démonstration :

Existence locale unique de solution d'équation différentielle du premier ordre : Cauchy.— *Soit $f(x, y)$ une fonction continue et ayant une dérivée partielle continue par rapport à y dans Ω ouvert connexe. Alors par chaque point*

$(u,v) \in]a,b[\times]c,d[$ il passe une unique solution locale de l'équation différentielle

$$y' = f(x,y),$$

c'est-à-dire que, d'une part, il existe un intervalle $]p_1,q_1[\ni u$ et une fonction $y_1 :]p,q[\to \mathbb{R}$ continue et dérivable telle que, pour tout $x \in]p,q[$ on ait $y_1'(x) = f\Big(x, y_1(x)\Big)$; et que, d'autre part, s'il existe un autre intervalle $]p_2,q_2[\ni u$ et une autre fonction $y_2 :]p_2,q_2[\to \mathbb{R}$ continue et dérivable telle que, pour tout $x \in]p,q[$ on ait $y_2'(x) = f\Big(x, y_2(x)\Big)$, alors, pour tout $x \in]p_1,q_1[\cap]p_2,q_2[$ on a $y_1(x) = y_2(x)$. Il existe donc alors une seule solution maximale par (u,v).

Mais si f est seulement continue, sans que sa dérivée partielle par rapport à y existe et soit continue, alors la situation est différente. Par exemple l'équation $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ dans $\Omega = \mathbb{R}^2$ admet pour solutions les fonctions $y = (x+C)^3$ ainsi que la fonction $y = 0$. Donc par un point $(x_0, 0)$ passe deux solutions. la solution $y = 0$ qui ne fait pas partie de la *solution générale* $y = (x+C)^3$ est dite *singulière*. Toutes les solutions maximales sont, pour des $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ choisis quelconques, de la forme

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq b \\ (x-b)^3 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

Point régulier, point singulier, lieu singulier. — Soit $y' = f(x,y)$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue et Ω un ouvert connexe, une équation différentielle. On dit que $(u,v) \in \Omega$ est un *point d'unicité locale* s'il existe une unique solution locale passant par (u,v), et on dit que (u,v) est un *point d'unicité globale* s'il existe une seule solution maximale passant par (u,v) telle que toute solution locale en soit une restriction. Un point qui n'est pas d'unicité locale est dit *point singulier* de l'équation. On appelle aussi *point singulier* un point limite d'une solution maximale. Un ensemble de points singuliers est dit un *lieu singulier*. Les points non-singuliers sont dit *point réguliers*.

Intégrale générale, solution particulière, solution singulière — *On appelle* intégrale générale *de $y' = f(x,y)$ une fonction $y = G(x,c)$, dépendant d'une constante arbitraire c et telle que pour toute valeur fixée de c la fonction*

$$y = G(x,c)$$

satisfasse l'équation différentielle $y' = f(x,y)$, et que pour toute valeurs x_0 et y_0 (dites valeurs initiales*) il existe une valeur c_0 telle que $y_0 = G(x_0,c_0)$. Si la fonction intégrale générale n'est obtenue que sous forme implicite $E(x,y,c) = 0$, on parle de* courbe intégrale générale*. Si une solution de $y' = f(x,y)$ n'est pas comprise comme cas de l'intégrale générale, elle est dite solution* singulière*.*

Résolution élémentaire — Les calculs effectifs les plus directs d'une solution voire de la solution générale, ou seulement d'une intégrale générale, d'une équation différentielle, tiennent d'abord à deux ressources : le changement de variable et de fonction, et la quadrature termes à termes. Par changement de variables bien choisi on espère passer d'une équation $\Phi(x,y,y') = 0$ à une équation $\Psi(u,v,v') = 0$ plus simple, sur laquelle éventuellement, si les variables sont séparées, on puisse tenter une quadrature terme à terme. La quadrature terme à terme demande les calculs de deux primitives, que l'on conduira chacune par changement de variables, intégrations par parties, utilisation de primitives connues, etc. Si l'on aboutit ainsi on parle de *résolution élémentaire*.

Changement de variable et de fonction — *Si l'on a $\Phi(x,y,y') = 0$, avec $y' = \frac{dy}{dx}$, si $x = a(u,v)$, $y = b(u,v)$ et si $v' = \frac{dv}{du}$, alors en substituant x, y, et $y' = \frac{\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}v'}{\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v}v'}$, on aboutit à une équation différentielle $\Psi(u,v,v') = 0$.*

Quadrature terme à terme — *Si u et v sont fonctions continument dérivables de x, et si $f(u)du = g(v)dv$, alors $\int_{u_0}^{u} f(u)du = \int_{v_0}^{v} g(v)dv$, avec $u_0 = u(x_0)$ et $v_0 = v(x_0)$.*

En effet les deux intégrales sont égales pour $x = x_0$, car alors elles sont toutes deux nulles, et il nous suffit de constater l'égalité de leurs dérivées. Or leur égalité s'écrit, par changement de variables, $\int_{x_0}^{x} f(u(x))u'(x)dx = \int_{x_0}^{x} g(v(x))v'(x)dx$; sous cette forme on obtient leurs dérivées par rapport à x qui sont $f(u(x)u'(x)$ et $g(v(x))v'(x)$, lesquelles sont bien des fonctions égales par l'hypothèse que $f(u)du = g(v)dv$.

Égalité via l'égalité des dérivées — *Soit F et G deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, et soit $\alpha \in [a,b]$. Alors on a $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a,b[$ on a $F'(x) = G'(x)$ et $F(\alpha) = G(\alpha)$. Autrement dit il existe au plus une fonction F continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ telle que $F'(x)$ soit donnée égale à une fonction $f(x)$ ainsi que la valeur $F(\alpha)$ égale à une constante k.*

En effet, le théorème des accroissements finis pour $F(x) - G(x)$ nous dit qu'il existe c strictement entre α et x, donc dans $]a,b[$, tel que $(F-G)(x) - (F-G)(\alpha) = (F-G)'(c)$, et donc si toujours $F'(c) = G'(c)$ et si $F(\alpha) = G(\alpha)$ on conclut que toujours $F(x) = G(x)$.

Cas le plus simple : la quadrature d'une fonction continue — Le cas le plus simple d'équation différentielle du premier ordre est donc le *problème de la primitive* d'une fonction continue $f(x)$, qui se formule

$$y' = f(x),$$

et dont nous savons déjà trouver une intégrale générale $y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$. Il n'y a pas de solution singulière, toute solution entre dans cette solution générale. Le théorème d'existence ci-dessus est donc une généralisation du théorème d'existence de la primitive.

7.2. Équation différentielle d'une famille de courbes, lieu singulier, enveloppe.

En fait en partant d'une famille quelconques de courbes Γ_c, dépendant d'un paramètre c, dont chacune a son équation sous la forme

$$F(x, y, c) = 0,$$

de sorte que la dérivée par rapport à x de $F(x, y, c)$ soit aussi nulle sur toute courbe de la famille, c'est-à-dire que $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$, on obtient

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)},$$

d'où, en éliminant c avec l'équation $F(x, y, c) = 0$, une équation différentielle de la famille

$$\Phi(x, y, y') = 0.$$

Bien entendu, la famille $F(x, y, c) = 0$ est une intégrale générale de cette équation, mais celle-ci peut — notamment si l'on n'est pas dans le cas des hypothèses du théorème de Cauchy — admettre des solutions singulières.

Un *point singulier* d'une des courbes Γ_c d'équation $F(x, y, c) = 0$ est un point (u, v) où $\frac{\partial F}{\partial x}(u, v) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(u, v) = 0$. En un tel point la différentiation de $F(x, y, c) = 0$ donne $0dx + 0dy = 0$, et n'indique donc rien sur la tangente à Γ_c. Un ensemble de tels points, c variant, est dit un *lieu singulier* de la famille $F(x, y, c) = 0$. Ces lieux singuliers de $F(x, y, c) = 0$ ont un rapport aux lieux singuliers de l'équation $\Phi(x, y, y') = 0$ dont $F(x, y, c) = 0$ est une intégrale générale. Un lieu singulier en ce sens peut être une solution de l'équation différentielle associée.

Si elle existe, une *enveloppe $\mathcal{E}$ de la famille* (Γ_c), est une courbe $\mathcal{E}$ qui en chaque point (x, y) est tangente en ce point à l'une des courbes Γ_c de la famille, pour un c qui dépend de (x, y). Alors x, y et y' sont, au point en question, les même sur $\mathcal{E}$ et sur Γ_c, et l'équation différentielle $\Phi(x, y, y') = 0$ étant satisfait sur Γ_c, elle l'est aussi sur $\mathcal{E}$. L'enveloppe est donc une solution de l'équation différentielle associée. L'enveloppe peut ou non être l'une des courbes de la famille Γ_c, en général elle ne l'est pas et est donc alors une solution singulière. Ses points sont alors singuliers au sens où ils ne sont pas des points d'unicité locale de l'équation, mais sont en général des points réguliers des courbes de l'intégrale générale ; elle n'est donc pas une solution du type "lieu singulier" de l'intégrale générale.

Supposons donc que la famille de courbes Γ_c d'équations $F(x, y, c) = 0$ admette une enveloppe $\mathcal{E}$ d'équation $y = \phi(x)$. Pour chaque point $(x, y) \in \mathcal{E}$ il existe donc un $c = c(x, y)$ tel que $(x, y) \in \Gamma_c$, c'est-à-dire que l'on a une fonction $c = c(x, y)$ telle que $F\big(x, y, c(x, y)\big) = 0$. En tout point de l'enveloppe, c'est-à-dire tel que $y = \phi(x)$, on a donc $F\big(x, y, c(x, y)\big) = 0$. En dérivant par rapport à x il vient $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\phi'(x) + \frac{\partial F}{\partial c}\big(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}\phi'(x)\big) = 0$. La pente $\phi'(x) = y'$ au point (x, y) sur $\mathcal{E}$ vaut la pente au même point sur $\Gamma_c(x, y)$, soit, comme calculé plus haut $y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,c)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,c)}$. Reportant cela dans l'équation précédente il vient $\frac{\partial F}{\partial c}\big(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}\phi'(x)\big) = 0$, et comme $c(x, y)$ n'est pas constante sur $\mathcal{E}$, on arrive à : $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$. Par conséquent les points de $\mathcal{E}$ satisfont aux deux équations $F(x, y, c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$. On peut donc espérer trouver l'enveloppe en éliminant c entre ces deux équations. Toutefois, si l'on considère le lieu singulier de la famille $\mathcal{S} = \big\{(x, y); \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0\big\}$, et si l'on admet que chaque point de ce lieu, en tant que point singulier d'une des courbes Γ_c, est de la forme $\big(x : \lambda(c), y = \mu(c)\big)$, avec les fonctions λ et μ dérivables, on obtient alors une identité en c,b à savoir $F(\lambda(x), \mu(c), c) = 0$, laquelle, en dérivant par rapport à c donne $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{d\lambda}{dc} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d\mu}{dc} + \frac{\partial F}{\partial c} = 0$, et comme, pour chaque point singulier, on a $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, il vient, sur $\mathcal{S}$, $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$.

Recherche conjointe du lieu singulier et de l'enveloppe — *Étant donnée une famille $F(x, y, c) = 0$, les équations*

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

sont satisfaites par les points de l'enveloppe et par les points du lieu singulier.

7.3. Trajectoires orthogonales et isogonales, isoclines.

Soit $F(x, y, c) = 0$ une famille de courbes Γ_c à un paramètre c. On appelle *trajectoires orthogonales* de cette famille les courbes qui coupent les courbes de la famille à angle droit. Supposons déterminée l'équation différentielle des courbes de la famille $F(x, y, c) = 0$, à savoir $\Phi(x, y, y') = 0$. Ici y' est donc la pente p de la courbe Γ_c de la famille passant par (x, y). La trajectoire orthogonale $y = \phi(x)$ passant par le point (x, y) admet donc pour pente $\phi'(x) = -\frac{1}{p}$, et en ce point (x, y) de cette trajectoire orthogonale on a donc la relation $\Phi\big(x, \phi(x), -\frac{1}{\phi'(x)}\big) = 0$. Ainsi :

Équation différentielle des trajectoires orthogonales — *Si une famille de courbes à un paramètre a pour équation différentielle* $\Phi(x, y, y') = 0$, *alors la famille des trajectoires orthogonales a pour équation différentielle*

$$\Phi\Big(x, y, -\frac{1}{y'}\Big) = 0.$$

On appelle *trajectoire isogonale d'angle* α de la famille $F(x, y, c) = 0$ d'équation différentielle $\Phi(x, y, y') = 0$ les courbes qui coupent les courbes de la famille avec un angle constant α. Si $y = \phi(x)$ est une telle courbe passant par (x, y) et y_1 la courbe de la famille passant par le même point, alors, avec la formule $\tan(\phi_1 - \phi) = \frac{\tan\phi_1 - \tan\phi}{1+\tan\phi_1\tan\phi}$ on a $\tan\alpha = \frac{y_1'-y'}{1+y_1'y'}$, donc $y_1' = \frac{\tan\alpha+y'}{1-\tan\alpha y'}$, soit $y_1' = \frac{(\cos\alpha)y'+\sin\alpha}{\cos\alpha-(\sin\alpha)y'}$. En remplaçant dans l'équation $\Phi(x, y, y_1')$ il vient :

Équation des trajectoires isogonales — *Les trajectoires isogonales d'angle* α *de la solution générale de l'équation* $F(x, y, y') = 0$ *ont pour équation*

$$\Phi\Big(x, y, \frac{(\cos\alpha)y' + \sin\alpha}{\cos\alpha - (\sin\alpha)y'}\Big) = 0.$$

Famille inclinée de façon variable — *Soit* $\alpha(x, y, y')$ *et* $g(x, y, y')$ *deux fonctions telles que* $g(x, y, y') = \frac{\tan\alpha+y'}{1-\tan\alpha\, y'}$, *soit* $\alpha(x, y, y') = \arctan\frac{g-y'}{1+g\,y'}$. *Alors la solution de*

$$\Phi\Big(x, y, g(x, y, y')\Big) = 0$$

passant par le point (x, y) *est une courbe inclinées d'un angle* $\alpha(x, y, y')$ *sur la solution passant en ce point de*

$$\Phi(x, y, y') = 0.$$

On ne confondra pas les trajectoires isogonales avec les isoclines :

On appelle *isocline associée à la pente* m de l'équation $\Phi(x, y, y') = 0$ la courbe d'équation $\Phi(x, y, m) = 0$, lieu des points des courbes intégrales où la tangente est de pente m.

En général, l'isocline associée à la pente m n'est pas une droite, ni nécessairement, lorsque c'est une droite, une droite de pente m. Si c'est une droite pour tout m, c'est que l'équation est du type *équation de Lagrange* $y = g(y')x + h(y')$, et si de plus, l'isocline associée à m est une droite de pente m, c'est que l'équation est du type *équation de Clairaut* $y = y'x + h(y')$. Nous reviendrons sur ces équations plus loin.

On obtiendra l'équation différentielle des isoclines en appliquant à la famille $\Phi(x, y, m)$ le traitement ci-dessus employé pour une famille $F(x, y, c) = 0$ quelconque. Notamment la pente $p(x, y)$ en (x, y) de l'isocline associée à la pente m est donnée par $p(x, y) = -\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,m)}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,m)}$. Comme la pente de l'intégrale passant par le même (x, y) est justement $y' = m$, on a :

Inclinaison sur l'isocline — *L'intégrale passant par* (x, y) *de l'équation* $\Phi(x, y, y') = 0$ *résolue en* y' *sous la forme* $y' = f(x, y)$ *est inclinée sur l'isocline passant par ce point d'un angle* $\iota(x, y)$ *tel que*

$$\tan\iota(x, y) = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y'}{\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}y'} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f}{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}f}.$$

7.4. Équation aux différentielles totales, facteur intégrant, lignes de niveau, lignes de courant.

Supposons que nous voulions résoudre une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$ avec $f(x, y) = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$, avec g et h dérivables continûment. L'équation s'écrit

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0.$$

S'il existe une fonction $E(x, y)$ satisfaisant l'*équation aux différentielles totales*

$$dE = g(x, y)dx + h(x, y)dy,$$

soit $\frac{\partial E}{\partial x} = g$ et $\frac{\partial E}{\partial y} = h$, alors par le lemme de Schwarz pour les dérivées secondes, on obtient $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$. Cette condition est suffisante si l'on est dans un disque $D_R(\alpha,\beta)$, car alors on peut prendre pour E la fonction donnée par la formule $E(x,y) = \int_\beta^y h(\alpha,v)dv + \int_\alpha^x g(u,y)du$.

Si donc $dE = g(x,y)dx + h(x,y)dy$, alors la famille des courbes d'équations $E(x,y) - c = 0$ est une intégrale générale de $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$. En effet si l'on suppose $E(x,y) - c = 0$ explicitée sous la forme $y = \phi(x)$, l'identité $E\big(x,\phi(x)\big) - c = 0$ donne, en dérivant par rapport à x, compte tenue de $\frac{\partial E}{\partial x} = g$ et $\frac{\partial E}{\partial y} = h$, l'identité : $g\big(x,\phi(x)\big) + h\big(x,\phi(x)\big)\phi'(x) = 0$, et $y = \phi(x)$ est bien une solution de l'équation proposée. Réciproquement, chaque fonction $y = \phi(x)$ solution de l'équation différentielle vérifie donc $g\big(x,\phi(x)\big) + h\big(x,\phi(x)\big)\phi'(x) = 0$, c'est-à-dire $\frac{d}{dx}E\big(x,\phi(x)\big) = 0$, et donc $E\big(x,\phi(x)\big)$ est constante.

On appelle *facteur intégrant* de l'équation aux différentielles totales $dE = g(x,y)dx + h(x,y)dy$ toute fonction $\mu(x,y)$ telle que $dH = \mu(x,y)g(x,y)dx + \mu(x,y)h(x,y)dy$ admette une solution H, c'est-à-dire telle que $\frac{\partial(\mu g)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu h)}{\partial x}$, soit, une fois développé, la condition $g\frac{\partial\mu}{\partial y} - h\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\big(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\big)$. En divisant par μ cela s'écrit $g\frac{\partial\ln\mu}{\partial y} - h\frac{\partial\ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$.

Intégrale générale via un facteur intégrant — *On obtient une intégrale générale de l'équation*

$$y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$$

sous la forme $E(x,y) = c$ en prenant μ un facteur intégrant, soit une fonction telle que

$$g\frac{\partial\ln\mu}{\partial y} - h\frac{\partial\ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y},$$

puis $E(x,y)$ telle que $dE = \mu g dx + \mu h dy$, soit, si l'on est dans un disque $D_R(\alpha,\beta)$,

$$E(x,y) = \int_\beta^y \mu(\alpha,v)h(\alpha,v)dv + \int_\alpha^x \mu(u,y)g(u,y)du.$$

En particulier cela vaut avec $\mu = 1$ si $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$.

lignes de niveau, lignes de courant — Quand une famille de courbes est de la forme explicite par rapport au paramètre, soit $E(x,y) = c$, alors deux courbes de la famille n'ont aucun point commun, et on les appelle des *lignes de niveau* ou *équipotentielles*. Les trajectoire orthogonales des lignes de niveau sont nommées *lignes de courant*.

Des lignes de niveau à l'equation différentielle — *Si l'équation d'une famille de courbes Γ_λ est du type $E(x,y) = \lambda$, alors l'équation différentielle de la famille est de la forme $\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)y' = 0$, et réciproquement.*

7.5. Équations différentielles à variables séparées, homogènes, incomplètes.

Solutions de $y' = f(x)$, de $y' = g(y)$, de $y' = f(x)g(y)$ — *1 — Si f est continue, alors la* solution générale *de $y' = f(x)$ est $y = \int_{x_0}^x f(x)dx + C$. Elle est dite obtenue* comme primitive *ou* par quadrature.

2 — Si g est continue non nulle et dérivable, alors la solution générale *de $y' = g(y)$ — équation dite* équation autonome *— est la fonction réciproque $y = y(x)$ de la fonction $x = x(y)$ donnée par $x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} + C$.*

3 — Notamment, l'équation $y' = y$ admet pour solution générale *la fonction $y(x) = y_0e^x$.*

4 — Si $y' = f(x,y)$ est à variables séparées *c'est-à-dire de la forme $y' = f(x)g(y)$, alors on sépare effectivement les variables en passant à $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, puis on intègre terme à terme, ce qui donne $\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x)dx$, et enfin on résout par rapport à y.*

Par exemple l'équation $y' = yf(x)$ donne $\frac{dy}{y} = f(x)dx$, donc $\ln y - \ln y_0 = \int_{x_0}^x f(x)dx$, puis $y = y_0e^{\int_{x_0}^x f(x)dx}$.

Des lignes de niveau à variables séparées à l'equation différentielle — *Si l'équation d'une famille de courbes Γ_λ est du type $F(x) - G(y) = \lambda$, alors l'équation différentielle de la famille est de la forme $y' = \frac{F(x)}{G(y)}$, et réciproquement.*

Équation homogène explicite — *Une équation $y' = f(x,y)$ de type* homogène *— c'est-à-dire telle que pour tout h, x, y on ait $f(hx,hy) = hf(x,y)$ — se ramène au cas des variables séparées par le changement de variable $u = \frac{y}{x}$.*

En effet, l'homogénéité signifie que $f(x,y)$ est une fonction de $\frac{y}{x}$, soit $f(x,y) = \varphi\big(\frac{y}{x}\big) = \varphi(u)$, on a alors $y = ux$, donc $y' = u + u'x$, et l'équation différentielle est transformée en $xu' = \varphi(u) - u$. Dans le cas où $\varphi(u)$ est identique à u, l'équation devient $xu' = 0$, d'où $u' = 0$, $u = c$, $y = cx$. Autrement, les variables se séparent et l'équation s'écrit $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u)-u}$, d'où $x = x_0e^{\int_{u_0}^u \frac{du}{\varphi(u)-u}}$, et donc $x = x_0e^{\int_{u_0}^{\frac{y}{x}} \frac{du}{\varphi(u)-u}}$. Si donc nous posons $\psi(u) = e^{\int_{u_0}^u \frac{du}{\varphi(u)-u}}$, nous avons $x = x_0\psi(\frac{y}{x})$, ou $y = x\psi^{-1}(\frac{x}{x_0})$.

D'UNE FAMILLE HOMOTHÉTIQUE À SON EQUATION DIFFÉRENTIELLE — *Si une famille de courbes Γ_λ est constituée des homothétiques de centre $(0,0)$ de rapport variable λ de l'une d'entre elles Γ_1 — c'est-à-dire si son équation est du type $F(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}) = 0$, autrement dit, si son équation explicite est du type $y = \lambda g(\frac{x}{\lambda})$, alors l'équation différentielle de la famille est de la forme homogène $y' = f(\frac{y}{x})$, et réciproquement.*

En effet de $y = \lambda g(\frac{x}{\lambda})$ on tire $y' = g'(\frac{x}{\lambda})$, donc $\frac{x}{\lambda} = g'^{-1}(y') = \psi(y')$, puis $\frac{y}{x} = \frac{g\psi(y')}{\psi(y')}$, ce qui est une équation homogène en x et y. La réciproque à été montrée ci-avant.

ÉQUATION SE RAMENANT AUX ÉQUATIONS HOMOGÈNES EXPLICITES — *Une équation de la forme $y' = F\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right)$, avec F une fonction quelconque dérivable, ou bien est homogène (si $c = r = 0$), ou bien se ramène à une équation homogène par le changement de variable et de fonction $x = x_1+h$, $y = y_1+k$, en choisissant h et k tels que $ah+bk+c = ph+qk+r = 0$, ou enfin, quand $aq = bp$, se ramène à une équation à variables séparées par le changement de fonction $z = ax + by$.*

ÉQUATION n-HOMOGÈNE IMPLICITE — Une équation différentielle *n-homogène* est une équation $F(x,y,y') = 0$, où pour tout x, y et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $F(\lambda x, \lambda y, y') = \lambda^n F(x,y,y')$; elle se ramène donc à la forme $F(1, \frac{y}{x}, y') = 0$. En paramétrant la courbe $F(1,X,Y) = 0$, sous la forme $X = \phi(t)$, $Y = \psi(t)$, on a $y = x\phi(t)$ et $\frac{dy}{dx} = \psi(t)$ donc $dy = \psi(t)dx$. Mais $dy = d(x\phi(t))$ donne $dy = dx\phi(t) + x\phi'(t)dt$, et il vient $\psi(t)dx = \phi(t)dx + x\phi'(t)dt$, soit, en séparant les variables, $dx(\psi(t)-\phi(t)) = x\phi'(t)dt$, et $\frac{dx}{x} = \frac{\phi'(t)}{\psi(t)-\phi(t)}dt$. On intègre cela terme à terme, soit $\ln \frac{x}{x_0} = \int_{t_0}^t \frac{\phi'(t)}{\psi(t)-\phi(t)}dt$, $x = x_0 e^{\int_{t_0}^t \frac{\phi'(t)}{\psi(t)-\phi(t)}dt}$, et donc $y = \left(x_0 e^{\int_{t_0}^t \frac{\phi'(t)}{\psi(t)-\phi(t)}dt}\right)\phi(t)$. Ainsi on obtient une représentation paramétrée d'une intégrale générale.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE IMPLICITE $f(\frac{y}{x}, y') = 0$ — *La résolution de l'équation homogène implicite de la forme $f(\frac{y}{x}, y') = 0$ se réduit à des quadratures par un paramétrage de la courbe $f(X,Y) = 0$.*

ÉQUATIONS INCOMPLÈTES $f(x,y') = 0$ ET $f(y,y') = 0$ — Pour résoudre une équation sans y de la forme $f(x,y') = 0$, dans le cas où l'on ne sait pas se ramener au cas d'une équation explicite $y' = f(x)$, on pose $x = X$ et $y' = Y$, et on cherche à paramétrer la courbe implicite $f(X,Y) = 0$ sous une forme $X = \phi(t)$, $Y = \psi(t)$. Alors il vient $dx = \phi'(t)dt$, $dy = \psi(t)dx$, $dy = \psi(t)\phi'(t)dt$, qu'on intègre terme à terme, soit $y - y_0 = \int_{t_0}^t \psi(t)\phi'(t)dt$, ce qui, joint à $x = \phi(t)$, détermine une représentation paramétrée d'une intégrale générale. Pour résoudre une équation sans$x$ de la forme $f(y,y') = 0$ on pose $y = X$ et $y' = Y$, et on cherche à paramétrer la courbe implicite $f(X,Y) = 0$ sous une forme $X = \phi(t)$, $Y = \psi(t)$. On a alors $y = \phi(t)$, $dy = \phi'(t)dt$ $dy = \psi(t)dx$, donc $dx = \frac{dy}{\psi(t)} = \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt$, et en intégrant terme à terme, $x - x_0 = \int_{t_0}^t \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt$, ce qui, joint à $y = \phi(t)$, détermine une représentation paramétrée d'une intégrale générale.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS INCOMPLÈTES — *La résolution d'équations incomplètes $f(x,y') = 0$ ou $f(y,y') = 0$, sans y ou sans x, se réduit à des quadratures par un paramétrage de la courbe $f(X,Y) = 0$.*

7.6. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants à second membre continue.

LA SOLUTION GÉNÉRALE ET TOUTES LES SOLUTIONS DE $y' - ay = f(x)$ — *Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec second membre $f(x)$ continue, est une équation de la forme*

$$y' - ay = f(x).$$

Elle admet pour solution générale la fonction

$$y = \left[\int_{x_0}^x f(x)e^{a(x_0-x)}dx\right]e^{a(x-x_0)} + y_0,$$

Et toute solution entre dans cette solution générale. En fait la formule fournit l'unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$.

En effet, tout d'abord l'équation sans $f(x)$, soit $y' = ay$ s'écrit $\frac{dy}{y} = adx$, donc admet pour solution y telle que $\ln \frac{y}{y_0} = a(x-x_0)$, soit $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$. Ensuite, on cherche une solution de l'équation proposée sous la forme $y = ue^{a(x-x_0)}$. En dérivant cette expression on obtient $u'e^{a(x-x_0)} = f(x)$, d'où $u = \int_{x_0}^x f(x)e^{-a(x-x_0)}dx + y_0$, et enfin la formule annoncée. Montrons directement, sans invoquer le théorème général, que la solution est unique. Si y est une solution quelconque telle que $y(x_0) = y_0$, par différence avec une solution y_1, par exemple celle fournit par la formule ici, pour une valeur choisie arbitrairement de y_0, on trouve une solution $v = y - y_1$ de l'équation homogène $v' - av = 0$ telle que $v(x_0) = 0$. Mais $v' - av = 0$ s'écrit $\frac{dv}{v} = adx$, on intègre terme à terme puis on prend les exponentielles, soit $v = v_0 e^{a(x-x_0)}$. Mais $v(x_0)$ vaut alors v_0, donc $v_0 = 0$, et $v = 0$, et donc $y = y_1$.

L'ÉQUATION $y' + \lambda y = f(x)$, POUR $f(x)$ UN POLYNÔME, $\lambda \neq 0$. — *Si $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_j x^j + \cdots + a_1 x + a_0$, alors il existe un polynôme $P(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_j x^j + \cdots + a_1 x + b_0$ de même degré que f tel que $P' + \lambda P = f$, donné par les relations*

$$\lambda b_k = a_k, \lambda b_{k-1} + kb_k = a_{k-1}, \ldots, \lambda b_j + (j+1)b_{j+1} = a_j, \ldots \lambda b_1 + 2b_2 = a_1, \lambda b_0 + b_1 = a_0.$$

7.7. Équations différentielles linéaires du premier ordre, $y' + P(x)y = Q(x)$, linéaires en y et y'.

Équation linéaire sans second membre — *1 — Une* équation linéaire du premier ordre sans second membre

$$y' + P(x)y = 0$$

se résoud par séparation des variables et quadratures et à pour solution générale

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx}.$$

Toute solution entre dans cette solution générale, en prenant $y_0 = y(x_0)$.

2 — Si y_1 est une solution fixée non nulle, alors, pour tout nombre a_1, la fonction $a_1 y_1$ est une solution, et toutes les solutions s'obtiennent ainsi.

La formule s'obtient en intégrant membre à membre $\frac{dy}{y} = P(x)dx$. D'ailleurs on voit immédiatement en dérivant que la formule fournit une solution. Prouvons donc l'unicité. Si y_1 est donnée par la formule, et si y est une autre solution telle que $y(x_0) = y_0$, alors $y = y_1$. En effet, la fonction $v = y - y_1$ est solution de $v' + P(x)v = 0$ avec $v(x_0) = 0$, et donc, comme dans le cas où $P(x) = -a$ est constant, on trouve $\frac{dv}{v} = P(x)dx$, on intègre membre à membre, on prend les exponentielles, soit $v = v_0 e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx}$, il vient $v_0 = v(x_0) = 0$, $v = 0$, $y = y_1$. Pour le second point, il est bien évident que si y_1 est une solution il en va de même pour $a_1 y_1$. Dans l'autre sens, avec donc $y_1(x_0) \neq 0$, si y est une solution, alors elle est déterminée par la formule quand on connaît $y(x_0) = y_0$, de sorte que $a_1 y_1(x_0) = y(x_0)$.

Équation linéaire avec second membre [début] — *Soit une* équation linéaire du premier ordre avec second membre *$y' + P(x)y = Q(x)$, et soit $y' + P(x)y = 0$ l'équation sans second membre "associée". On obtient la solution générale de $y' + P(x)y = Q(x)$ sous la forme $y = y_1 + \overline{y}$, en ajoutant une solution particulière y_1 de $y' + P(x)y = Q(x)$ à la solution générale $\overline{y}$ de $y' + P(x)y = 0$. On note aussi que si y_1 est une solution particulière de $y' + P(x)y = Q_1(x)$ et y_2 est une solution particulière de $y' + P(x)y = Q_2(x)$ alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $y' + P(x)y = Q_1(x) + Q_2(x)$.*

En fait, une équation linéaire du premier ordre avec second membre $y' + P(x)y = Q(x)$ se résoud directement par la méthode de Lagrange de *"variation de la constante " c* dans la solution générale $ce^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx}$ de l'équation sans second membre $y' + P(x)y = 0$, soit en cherchant une solution de la forme $y = u(x)e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx}$. On trouve alors $u(x)$ sous la forme $u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\left(e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx}\right)dx$, et donc

Équation linéaire avec second membre [suite] — *Une* équation linéaire du premier ordre avec second membre

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

a pour solution

$$y = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\left(e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx}\right)dx\right] e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx}.$$

Ainsi on a deux fonctions particulières $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$, avec $\phi_1(x)c$ solution générale de l'équation sans second membre, et avec $\phi_2(x)$ une solution particulière de l'équation avec second membre, telles que toute solution de l'équation soit de la forme

$$y(x) = \phi_1(x)c + \phi_2(x),$$

pour une valeur fixée de la constante c (ici $c = y_0 = y(x_0)$). C'est donc là la solution générale, dans laquelle rentre toutes les solutions.

Soit une équation linéaire du premier ordre avec second membre $y' + P(x)y = Q(x)$, résolue comme ci-dessus sous la forme $y(x) = \phi_1(x)c + \phi_2(x)$, et soit $y_1(x) = \phi_1(x)c_1 + \phi_2(x)$ et $y_2(x) = \phi_1(x)c_2 + \phi_2(x)$ deux solutions particulières distinctes. Alors $\phi_2 = y_1 - \phi_1 c_1$, et donc $y = \phi_1(c - c_1) + y_1 = \phi_1 C + y_1$, $y_2 = \phi_1 C_2 + y_1$, donc $\phi_1(x) = \frac{y_2(x) - y_1(x)}{C_2}$ et $y = \frac{y_2 - y_1}{C_2} C + y_1 = \frac{C_2 - C}{C_2} y_1 + \frac{C}{C_2} y_2$, avec donc $\frac{C_2 - C}{C_2} + \frac{C}{C_2} = 1$. réciproquement si l'on prend $y = a_1 y_1 + a_2 y_2$ avec $a_1 + a_2 = 1$ on constate immédiatement que y est une solution. Que toute solution soit ainsi atteinte résulte, par différence du même résultat pour l'équation homogène.

Équation linéaire avec second membre [suite]— *Si y_1 et y_2 sont deux solutions distincts de l'équation avec second membre $y' + P(x)y = Q(x)$, alors pour tout couple de nombres (a_1, a_2) tel que $a_1 + a_2 = 1$ la fonction $y = a_1 y_1 + a_2 y_2$ est une solution, et toute solution s'obtient ainsi pour un unique couple (a_1, a_2) tel que $a_1 + a_2 = 1$. Ainsi on dira que dans l'espace des fonctions $y(x)$, l'espace des solutions est une "droite affine" passant par y_1 et y_2.*

Équation linéaire avec second membre [fin]— *Trois courbes intégrales y_1, y_2, y_3 quelconques fixées de l'équation linéaire $y' + P(x)y = Q(x)$ partagent dans un rapport constant (indépendant de x) la verticale passant par x. Pour un x fixé quelconque, les tangentes à ces courbes aux points $(x, y_1(x))$, $(x, y_2(x))$ et $(x, y_3(x))$ se coupent en un même point ou sont parallèles. On peut ainsi tracer à la règle la tangente en $(x, y_3(x))$ à y_3 à l'aide des tangentes aux points $(x, y_1(x))$, $(x, y_2(x))$ à y_1 et à y_2.*

Le premier point n'est qu'une autre formulation du résultat précédent, qui nous donnait $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$. Et en tenant compte de ce résutat en x et en $x+h$, le théorème de Thalès nous dit que les trois cordes de $(x, y_1(x))$ à $(x+h, y_1(x+h))$, de $(x, y_2(x))$ à $(x + h, y(x + h))$ et de $(x, y_3(x))$ à $(x + h, y_3(x + h))$ sont concourantes ou parallèles ; on conclut alors en faisant tendre h vers 0.

D'une famille linéaire à son equation différentielle — *Si une famille de courbes Γ_λ répond à une équation linéaire en λ de la forme $y = \varphi(x)\lambda+\psi(x)$, alors l'équation différentielle de la famille est de la forme linéaire $y' +P(x)y = Q(x)$, et réciproquement.*

En effet on a $y' = \varphi'(x)\lambda + \psi'(x)$, et en éliminant λ entre cette équation et $y = \varphi(x)\lambda + \psi(x)$ on obtient le paramètre $\lambda = \frac{y\psi'(x)-y'\psi(x)}{\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)}$, et en reportant, il vient l'équation linéaire $y' - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)}{\varphi(x)}$. La réciproque à été vue ci-avant.

7.8. Équation de Bernoulli.

Cette équation proposée par James Bernoulli en 1695, est résolue par Leibniz, en 1696, ainsi :

Équation de Bernoulli — *On appelle* équation de Bernoulli *l'équation*

$$y' = A(x)y + B(x)y^m.$$

Si $m = 0$ ou $m = 1$ c'est une équation linéaire, et si $m \neq 0, 1$, $u = y^{1-m}$ ramène à $u' = (1 - m)Au + (1 - m)B$.

7.9. Équations de Clairaut et de Lagrange $y = xg(y') + f(y')$, linéaires en x et y.

Équations de Clairaut — La tangente à une courbe $y = y(x)$ au point $(x, f(x))$ à pour équation $Y - y = y'(X - x)$ soit $Y = y'X+(y-xy')$. Donc toute propriété de la tangente s'exprime par une relation entre $(y-xy')$ et y', $\Phi(y-xy', y') = 0$. Si cette relation est résolue par rapport $y - xy'$ elle s'écrit $y - xy' = f(y')$, soit l'*équation de Clairaut*, c'est-à-dire une équation de la forme étudiée par Alexis Clairaut en 1734 (non résolue en y')

$$y = xy' + f(y').$$

Évidemment, si c est une constante, la droite $y = cx + f(c)$ est une solution de l'équation de Clairaut. Si l'on cherche des solutions autres que celles-là, on pose $p = y'$, et l'équation devient $y = xp + f(p)$, avec donc $p = p(x)$ une fonction de x à trouver telle que $xp(x) + f(p(x))$ admette pour dérivée $p(x)$. En prenant les différentielles des deux membres de $y = xp + f(p)$ il vient $pdx = pdx + xdp + f'(p)dp$ soit $(x + f'(p))dp = 0$. Si $dp = 0$, alors $p = c$ et l'on tombe sur les droites solutions. Autrement, si $x + f'(p) = 0$, en éliminant p entre $x + f'(p) = 0$ et $y = xp + f(p)$ on obtient une solution de l'équation ne contenant pas de constante arbitraire, et qui est en générale une solution singulière. On observe que les droites formant l'intégrale générale ont peu d'intérêt par rapport au problème, et que la véritable réponse au problème est donnée par la solution singulière, comme on voit dans le problème de l'astroïde.

L'astroïde — On cherche une courbe $y = y(x)$ telle que le segment T_1T_2 de sa tangente compris entre les axes de coordonnées ait une longueur constante a. On exprime les coordonnées des points T_1 et T_2 en fonctions des coordonnées du point de contact $M = (x, y)$ et de la pente y', puis on montre que la condition géométrique revient à l'équation différentielle $y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$. c'est une équation de Clairaut, dont l'intégrale générale peut se mettre sous la forme $y = x\lambda \pm \frac{a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. On vérifie que la courbe paramétrée $x = \mp a\cos^3\varphi$, $y = \pm a\sin^3\varphi$, soit l'*astroïde* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, est une solution singulière enveloppe de la solution générale. C'est bien sûr une solution géométrique.

Équations de Lagrange — Cela dit considérons l'équation plus générale — on retrouve celle de Clairaut pour $g(y') = y'$ — que l'on appelle *équation de Lagrange*, soit celle de la forme

$$y = xg(y') + f(y').$$

On suppose que $g(y') \neq y'$, car sinon est est dans le cas de Clairaut, que l'on vient d'expliquer. On pose encore $y' = p$, on a donc $y = xg(p) + f(p)$, et en différentiant il vient $pdx = g(p)dx + xg'(p)dp + f'(p)dp$, d'où, en divisant par dp, l'équation différentielle linéaire pour $x = x(p)$:

$$(g(p) - p)\frac{dx}{dp} + g'(p)x + f'(p) = 0,$$

On sait alors exprimer l'intégrale générale $x = \phi_1(p)c + \phi_2(p)$ et en reportant cette expression dans $y = xg(p) + f(p)$ on obtient $y = (\phi_1(p)c + \phi_2(p))g(p) + f(p)$. Les deux formules $x = \phi_1(p)c + \phi_2(p)$ et $y = (\phi_1(p)c + \phi_2(p))g(p) + f(p)$ expriment x et y en fonction d'une constante arbitraire c et d'un paramètre variable p, et ainsi elles donnent une représentation paramétrique de l'intégrale générale de l'équation de Lagrange. Si enfin entre ces deux équations on élimine p, on obtient une équation explicite de l'intégrale générale. Ainsi :

Intégrale générale de l'équation de Lagrange — *L'intégrale générale de l'équation de Lagrange*

$$y = xg(y') + f(y')$$

se trouve sous forme paramétrée via des quadratures.

7.10. Équation de Riccati.

On appelle *équation de Riccati* — introduite en 1724 par Jacopo Riccati dans un cas particulier, et considérée dans sa forme générale par D'Alembert en 1763 — l'équation

$$y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2.$$

On peut démontrer (mais nous ne le ferons pas ici) que, en général, cette équation ne se résoud pas par quadrature, et a fortiori ne se ramène pas à l'équation linéaire. Toutefois on sait résoudre en solutions exactes des cas particuliers. Ainsi l'équation de Riccati où $A(x) = 0$ pour tout x, soit $y' = B(x)y + C(x)y^2$ se résoud, elle, complètement. C'est un cas particulier de l'équation de Bernoulli. Signalons aussi le cas particulier important de l'*équation spéciale de Riccati* $y' = ay^2 + bx^n$, dont on peut écrire des solutions via les fonctions de Bessel quand $n \neq -2$, et, dont, pour $n = -2$, soit pour l'équation $y' = ay^2 + bx^{-2}$, on connaît la solution générale sous la forme (où k est une solution de l'équation $ak^2 + k + b = 0$) : $y = \frac{k}{x} - x^{2ak}\left(\frac{ax}{2ak+1}x^{2ak} + C\right)^{-1}$.

Équation de Riccati dont on connaît une solution particulière — *Si l'on connaît une solution particulière y_1, alors le changement de fonction $u = \frac{1}{y-y_1}$ ramène à l'équation linéaire $u' = -(B + 2y_1C)u - C$. Donc une solution générale en u étant du genre $u_2\lambda + u_3$, avec $u_2 = \frac{1}{y_2-y_1}$ et $u_3 = \frac{1}{y_3-y_1}$, la solution générale en y s'écrit $y = y_1 + \frac{1}{u_2\lambda+u_3}$: elle est fonction homographique de la constante d'intégration λ.*

Si l'on détaille la résolution d'équation linéaire en jeu, on a, en posant $\Phi(x) = e^{\{\int[2C(x)y_1(x)+B(x)]dx\}}$, la solution générale peut s'écrire

$$y = y_1 + \Phi(x)\left(C - \int C(x)\Phi(x)dx\right)^{-1}.$$

D'une famille homographique à son equation différentielle — *Si une famille de courbes Γ_λ répond à une équation homographique en λ de la forme $y = \frac{\varphi(x)\lambda+\psi(x)}{\mu(x)\lambda+\nu(x)}$, alors l'équation différentielle de la famille est de la forme de Riccati $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$, et réciproquement.*

En effet l'équation de la famille peut se mettre sous la forme $\lambda = H(x) + \frac{K(x)}{y+L(x)}$, et en dérivant on obtient l'équation $H'(x)(y+L(x))^2 + (y+L(x))K'(x) - K(x)(y' + L'(x)) = 0$, soit l'équation de Riccati $y' = \frac{KL'+H'L^2+LK'}{K} + \frac{K'+2H'L}{K}y + \frac{H'^2}{K}y^2$. La réciproque est établie ci-avant.

EXERCICES

1 — Les paraboles de tir depuis le point $O = (0, 0)$ dans le plan vertical des (x, z), avec une vitesse initiale de grandeur donnée v_0 faisant avec l'axe $0x$ un angle variable α ont pour équation générale $z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. On pose $h = \frac{v_0^2}{2g}$ et $\lambda = \tan\alpha$. Montrer que la famille de ces paraboles s'écrit $z = \lambda x - (1 + \lambda^2)\frac{x^2}{4h}$, admet pour équation différentielle $4h(z - xz') = x^2 + (2z - xz')^2$.

Montrer que ces paraboles admettent pour enveloppe la parabole dite "parabole de sûreté" $y = h - \frac{1}{4h}x^2$. Vérifier que cette parabole est une solution singulière de $4h(z - xz') = x^2 + (2z - xz')^2$.

2 — Trouver l'enveloppe de la famille de droites $x\cos\lambda + y\sin\lambda = 1$.

3 — Montrer que l'équation à variables séparées $xdx + ydy = 0$ admet pour intégrale générale $x^2 + y^2 = \lambda$.

4 — Résoudre l'équation $y' = -ky$.

5 — Soit l'équation $y' = \frac{xy}{x^2-y^2}$. Montrer que c'est une équation homogène. En posant $u = \frac{y}{x}$ écrire l'équation différentielle satisfaite par $u = u(x)$, la résoudre en séparant les variables, puis, revenant à $y = y(x)$, montrer que la solution générale de l'équation proposée peut se mettre sous la forme $\frac{-x^2}{2y^2} = \ln|\lambda y|$. Conclure en montrant que l'on peut expliciter x en fonction de y par : $x = y\sqrt{-2\ln|\lambda y|}$.

6 — Montrer que $y' + xy = x^3y^3$ est une équation de Bernoulli. Poser $z = y^{-2}$ et montrer que l'on arrive à l'équation linéaire $z' - 2xz = -2x^3$. Pour résoudre cette équation linéaire poser $z = uv$, avec $v = e^{x^2}$. Montrer que v vérifie $v' - 2xv = 0$, et que donc pour résoudre l'équation en z il suffit de trouver les u solutions de $e^{x^2}u' = -2x^3$. Trouver ces u par séparation des variables. Conclure qu'une solution générale de l'équation en y est $y = \frac{1}{x^2+1+\lambda e^{x^2}}$.

7 —

8 — Montrer que l'équation de Bernoulli $x^2 + 2xyy' - y^2 - h = 0$ admet pour courbes intégrales une famille de cercles.

9 — Montrer que la fonction $y = -x$ est une intégrale particulière de l'équation de Riccati $(1+x^3)y' + 2xy' + x^2y + 1 = 0$. En déduire que l'on a une solution générale de la forme $y = \frac{\lambda - x}{1+\lambda x^3}$.

10 — On considère l'équation $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$. Rechercher les intégrales pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$, et montrer que l'on trouve des arcs d'ellipse. Rechercher les intégrales pour $|x| > 1$ et $|y| > 1$, et montrer que l'on trouve des arcs d'hyperboles. Montrer que dans tous les cas les courbes intégrales sont des arcs des coniques comprises dans l'équation $x^2 + y^2 - 2\mu xy = 1 - \mu^2$.

11 — Montrer que l'équation linéaire homogène $y' = -\frac{y}{x}$ a pour solution générale $y = Ce^{\frac{1}{x}}$. En faisant "varier la constante", c'est-à-dire en cherchant une solution sous la forme $y = C(x)e^{\frac{1}{x}}$, résoudre l'équation $y' = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x^3}$: montrer qu'alors $C'(x) = -\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$, puis que $C(x) = \left(-\frac{1}{x} - 1\right)e^{-\frac{1}{x}} + k$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si sur $\mathbb{R}_{<0}$ l'on pose $\varphi_\lambda(x) = \lambda e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1$, on détermine une solution maximale, et de même si sur $\mathbb{R}_{>0}$ l'on pose encore $\varphi_\lambda(x) = \lambda e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1$, on détermine une solution maximale. Montrer que la courbe φ_λ admettent pour asymptote horizontale la droite $y = \lambda - 1$, et pour asymptote verticale la droite $x = 0$. Dessiner la famille solution générale.

12 — Montrer que la famille $y^2 = 2Cx + C^2$ satisfait à l'équation $yy'^2 + 2xy' - y = 0$.

13 — Montrer que la courbe dont la pente de la tangente en chaque point est proportionnelle à l'abscisse du point de contact est une parabole $y = ax^2 + C$.

14 — On considère les courbes Γ_C d'équations $\left(\frac{x}{C}\right)^n - \left(\frac{C}{x}\right)^n = \frac{2y}{x}$. Montrer qu'elles ont la propriété qu'en tout point $M \in \Gamma_C$ si l'on note N le point où la tangente en M rencontre l'axe Oy, on a $\frac{ON}{OM} = n$. A-t-on ainsi toutes les courbes ayant cette propriété ?

15 — Montrer que l'enveloppe de la famille de cercles centrés sur la parabole $y^2 = 2px$ et passant par le sommet de la parabole est la courbe d'équation $x^3 + y^2(x + p) = 0$ (qui est une cissoïde).

16 — Montrer que la développée de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, considérée en tant qu'enveloppe de ses normales a pour équation $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

17 — Montrer que l'équation de Riccati $y' = y^2 - xy + 1$ admet $y_1(x) = x$ comme solution particulière. En posant $y(x) = x + u(x)$ montrer que $u' = u^2 + xu$, qui est une équation de Bernoulli, de solution générale $u = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{c_1 - \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt}$, et en déduire que la solution générale de l'équation de Riccati proposée est donc $y = x + \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{c_1 - \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt}$.

COURS 8 (17/05/06) — Équations différentielles linéaires du second ordre, et sytèmes différentiels linéaires du premier ordre associés.

8.1. Équation différentielle du second ordre, courbure, cas incomplets, cas linéaire, équation de Riccati

Équation du second ordre et expression de la courbure — *Une équation différentielle du second ordre exprime la courbure en fonction de l'élément de contact.*

En général, une équation différentielle *du second ordre* résolue en y'', soit de la forme

$$y'' = g(x, y, y'),$$

s'interprète géométriquement, compte tenu de ce que l'on a $y' = \tan\phi$ et $y'' = \frac{1}{R|\cos^3\phi|}$ pour R le rayon de courbure et ϕ l'angle de la tangente T avec l'axe Ox. Le triplet (x, y, T) s'appelle l'*élément de contact*. Ainsi l'équation se reformule :

$$R = \frac{1}{|\cos^3\phi| g(x, y, \tan\phi)}.$$

Remarquons aussi que si l'on a une courbe $y = y(x)$ solution d'une équation différentielle du premier ordre $y' = f(x, y)$, alors en dérivant on a $y'' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)y'$, puis, avec $\frac{1}{\cos^3\phi} = (1 + f^2)^{\frac{3}{2}}$, $R = \frac{(1+f^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f}$. Ainsi y'' et R s'obtiennent à partir de f seule, sans avoir à résoudre l'équation $y' = f(x, y)$.

Les équations incomplètes du second ordre — *Les équations incomplètes $y'' = f(x, y')$ et $y'' = f(y, y')$ se ramènent à la résolution d'une équation du premier ordre et à une quadrature.*

L'équation $y'' = f(x, y')$ — Si dans l'équation n'apparaît pas y, alors on pose $p = y'$, d'où $p' = f(x, p)$. Si cette équation du premier ordre admet une solution générale $p = p(x, C_1)$, alors en résolvant $y' = p$ on trouve la solution générale $y = \int_{x_0}^{x} p(x, C_1)dx + C_2$.

L'équation $y'' = f(y, y')$ — Si dans l'équation n'apparaît pas x, alors on pose $p = y'$, Alors $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$, d'où $\frac{dp}{dy}p = f(y, p)$, ou $\frac{dp}{dy} = \frac{f(y,p)}{p}$, où donc on considère p comme fonction de y. Supposons que $p = p(y, C_1)$ soit une solution générale de cette équation du premier ordre, alors on a $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$, soit en séparant les variables $\frac{dy}{p(y,C_1)} = dx$, et en intégrant termes à termes on arrive à $\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{p(y,C_1)} + C_2 = x$, soit la solution générale sous le forme d'une fonction x de y.

Équation linéaire homogène et équation de Riccati — *L'équation linéaire homogène "équivaut" à l'équation de Riccati.*

On appelle *équation différentielle linéaire homogène* du second ordre une équation différentielle du second ordre de la forme

$$M(x)u''(x) + L(x)u'(x) + K(x)u(x) = 0,$$

où les fonctions $K(x)$, $L(x)$ et $M(x)$ sont connues, et définies sur un même intervalle $]a, b[$.

Si l'on considère l'équation du premier ordre de Riccati, soit $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$, on peut y faire la substitution $u = e^{-\int C(x)y(x)dx}$, et l'on arrive alors pour u à une équation du second ordre. En effet $u' = -Cyu$ et, en tenant compte de ce que $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$, il vient $u'' = -[CA + (C' + CB)y]u$. D'où l'on tire

$$Cu'' - (C' + CB)u' + C^2Au = 0.$$

Á supposer que u soit une solution de cette équation, alors $y = -\frac{u'}{Cu}$ est une solution de l'équation de Riccati.

D'une équation linéaire homogène $Mu'' + Lu' + Ku = 0$, on revient à l'équation de Riccati $y' = \frac{K}{M^2} + \frac{L-M'}{M}y + My^2$.

8.2. Équations différentielles linéaires homogènes du second ordre : combinaisons des solutions, wronskien, résolution générale associé a ` des solutions particulières.

Nous verrons que la discussion des systèmes linéaires du premier ordre à deux fonctions inconnues conduit à l'examen des équations linéaires homogènes du second ordre, et inversement. Mais nous laissons pour l'instant de côté les systèmes linéaires, et examinons les propriétés générales des *équations linéaires homogènes du second ordre*, que nous écrivons sous la forme

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Énonçons sans démonstration :

Existence et unicité des solutions de l'équation linéaire homogène du second ordre — *Si $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues dans $[a,b]$, et si $x_0 \in [a,b]$, et si $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une fonction et une seule $y(x)$ sur $[a,b]$ deux fois dérivables telle que $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, et, pour tout $x \in [a,b]$, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.*

Évidemment on a :

Combinaison des solutions — *Soit l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.*

Si y_1 et y_2 sont deux solutions, C_1 et C_2 deux constantes, alors $C_1y_1 + C_2y_2$ est une solution.

Wronskien, formule de Liouville — *Soient y_1 et y_2 deux solutions de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. On appelle* wronskien *ou* déterminant de Wronski *de ces deux solutions la quantité*

$$W(y_1, y_2) = y_1y'_2 - y_2y'_1.$$

Alors on a, pour tout $x_0 \in [a,b]$, la formule de Liouville *:*

$$W(y_1, y_2) = W(y_1, y_2)(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Par suite, aux points où $y_1 \neq 0$ on a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = W(y_1, y_2)(x_0)\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2}.$$

En effet on a $W' = y'_1y'_2 + y_1y''_2 - y'_2y'_1 - y_2y''_1 = y_1y''_2 - y_2y''_1$. Or en multipliant $y''_1 + py'_1 + qy_1$ par $-y_2$ et $y''_2 + py'_2 + qy_2$ par y_1 et additionnant membre à membre, on obtient $y_1y''_2 - y_2y''_1 + p(y_1y'_2 - y_2y'_1) = 0$, d'où $W' + pW = 0$. On intègre alors cette équation linéaire homogène du premier ordre. Pour la dernière formule on a $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W(y_1,y_2)}{y_1^2} = W(y_1, y_2)(x_0)\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2}$.

Solutions indépendantes — *Soient y_1 et y_2 deux solutions de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sur $[a,b]$. Elles sont dites* indépendantes *s'il n'existe pas deux constantes C_1 et C_2 telles que, sur $[a,b]$ on ait $C_1y_1 + C_2y_2 = 0$.*

y_1 et y_2 sont indépendantes si et seulement si $W(y_1, y_2) \neq 0$.

En effet, si y_1 et y_2 sont dépendantes, alors par exemple $y_2 = Cy_1$, et $W(y_1, Cy_1) = 0$. Inversement, supposons que $W(y_1, y_2) = 0$. Alors en prenant x_0 telle que $y_1(x_0) \neq 0$, et en posant $C = \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)}$, il vient, puisque $W(y_1, y_2) = 0$ que $C = \frac{y'_2(x_0)}{y'_1(x_0)}$. Alors la solution $y_3 = y_2 - Cy_1$ vérifie $y_3(x_0) = y'_3(x_0) = 0$, et donc, par le théorème d'existence et d'unicité, c'est la solution nulle : $y_2(x) - Cy_1(x) = 0$.

Toutes les solutions à partir de deux solutions indépendantes — *Si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sur $[a,b]$, alors toute solution s'écrit de manière unique sous la forme*

$$C_1y_1 + C_2y_2.$$

En effet, admettons sans le prouver ceci : *il existe une solution unique y qui au point x_0 vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.* Alors on détermine C_1 et C_2 par les conditions $C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0$ et $C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) = y'_0$, ce qui admet bien une unique solution puisque $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Toutes les solutions à partir d'une solution — *Si y_1 est une solution de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sur $[a,b]$, alors une seconde solution indépendante y_2 peut être obtenue comme une solution de l'équation linéaire du premier ordre*

$$y_1y' - y'_1y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

soit sous la forme

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx,$$

et donc toute solution s'obtient sous la forme

$$y = C_1y_1 + C_2y_1\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx.$$

En effet on sait que si y_1 et y_2 sont deux solutions on a $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = W(y_1, y_2)(x_0)\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2}$, d'où en intégrant la valeur de $\frac{y_2}{y_1}$, qui est manifestement non constante, de sorte que y_2 et y_1 sont bien indépendantes.

N.B. — C'est donc en utilisant le théorème général d'existence et unicit qu'une solution y est déterminée par sa valeur et celle de sa dérivée en un point, soit les nombres $y(x_0)$ et $y'(x_0)$, que nous avons établi que la solution générale de l'équation linéaire contient toutes les solutions. Nous allons poser nettement ce théorème à prouver dans le cadre de l'équation linéaire non-homogène. En revanche, dans le cas des coefficients constants positifs, soit $y'' + py' + qy = 0$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, nous fournirons immédiatement une preuve complète.

8.3. Équations différentielles linéaires non-homogènes du second ordre : méthode de 'variation des constantes'.

Une *équation linéaire non-homogène du second ordre* est une équation de la forme

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

L'équation

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

est dite *équation homogène associée*, $f(x)$ est appelé le *second membre, et l'équation non-homogène est aussi dite* équation complète.

Combinaisons de solutions — *Si y_1 est une solution particulière de $y'' + py' + qy = f_1(x)$ et y_2 est une solution particulière de $y'' + py' + qy = f_2(x)$ alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.*

Énonçons sans démonstration l'importante précision globale suivante du théorème d'existence locale. Nous fournirons une preuve dans le cas spécial des coefficients constants.

Existence et unicité des solutions de l'équation linéaire non-homogène du second ordre — *Si $p(x)$ et $q(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues dans $[a, b]$, et si $x_0 \in [a, b]$, et si $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une fonction et une seule $y(x)$ sur $[a, b]$ deux fois dérivables telle que $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, et que, pour tout $x \in [a, b]$, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.*

Si y_3 et y sont deux solutions de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, alors $y - y_3$ est une solution de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. L'unicité se déduit donc de celle du cas particulier pour l'équation homogène admise plus haut.

Autrement dit :

Expression de toutes les solutions — *Soit y_3 une solution particulière de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, et y_2 et y_1 deux solutions particulières indépendantes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Alors toute solution de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ s'écrit sous la forme*

$$y = y_3 + C_2 y_2 + C_1 y_1,$$

pour deux constantes uniques C_2 et C_1.

Ainsi la résolution de l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ revient, connaissant deux solution indépendantes y_1 et y_2 de l'équation homogène $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, à trouver une solution particulière y_3 de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, ce que l'on peut faire par la *méthode de 'variation des constantes'*, qui consiste à imiter l'expression $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ de la solution de l'équation homogène associée $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, où C_1 et C_2 sont des constantes, et à chercher y_3 sous la forme

$$y_3 = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

où $C_1(x)$ et $C_2(x)$ ne sont plus des constantes, mais sont maintenant deux fonctions inconnues. On cherche donc $C_1(x)$ et $C_2(x)$ telles que y_3 soit solution de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. À quoi, puisqu'il y a alors deux fonctions inconnues, l'on peut se permettre d'ajouter la condition

$$C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0.$$

En introduisant dans le premier membre de l' équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ les valeurs de $qy_3 = qC_1y_1 + qC_2y_2$, $py'_3 = pC'_1y_1 + pC'_2y_2 + pC_1y'_1 + pC_2y'_2$, et $y''_3 = C''_1y_1 + C''_2y_2 + 2C'_1y'_1 + 2C'_2y'_2 + C_1y''_1 + C_2y''_2$, il vient, en tenant compte de la condition ajoutée, $C_1(x)(y''_1 + p(x)y'_1 + q(x)y_1) + C_2(x)(y''_2 + p(x)y'_2 + q(x)y_2) + C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x)$, soit, puisque y_1 et y_2 satisfont à l'équation homogène associée,

$$C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x).$$

Alors, comme y_1 et y_2 sont indépendantes, si bien que $W(y_1, y_2) = y_1y'_2 - y_2y'_1$ est non nul, on tire de cette dernière équation et de l'équation ajoutée les valeurs de $C'_1(x)$ et $C'_2(x)$:

$$C'_1(x) = \frac{-y_2 f}{y_1y'_2 - y_2y'_1}, \quad C'_2(x) = \frac{y_1 f}{y_1y'_2 - y_2y'_1}.$$

Variation des constantes — *Par variation des constantes, si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, on trouve une solution particulière de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ sous la forme*

$$y_3 = y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{-y_2 f}{y_1y'_2 - y_2y'_1} dx + y_2 \int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{y_1y'_2 - y_2y'_1} dx.$$

Cette solution est la seule solution de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ telle que $y_3(x_0) = y_3'(x_0) = 0$.
Et donc toute solution y de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$y = y_1\Big(\int_{x_0}^{x} \frac{-y_2 f}{y_1y_2' - y_2y_1'}dx + c_1\Big) + y_2\Big(\int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{y_1y_2' - y_2y_1'}dx + c_2\Big),$$

avec

$$c_1 = \frac{y(x_0)y_2'(x_0) - y'(x_0)y_2(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)},\quad c_2 = \frac{y_1(x_0)y'(x_0) - y_1'(x_0)y(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)}.$$

8.4. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, à second membre continue.

L'ÉQUATION $y'' + k^2y = f(x)$, AVEC $f(x)$ CONTINUE — *Toute solution de $y'' + k^2y = f(x)$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante fixée, $k \neq 0$, s'écrit de façon unique, avec deux constantes c_1 et c_2, sous la forme*

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + \int_{x_0}^{x} f(t)\frac{\sin\big(k(x-t)\big)}{k}dt.$$

En effet $y_1 = \cos kx$ et $y_2 = \sin kx$ sont deux solutions particulières indépendantes de l'équation homogène associée $y'' + k^2y = 0$, et il suffit donc de constater que $y_3 = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\big(k(x-t)\big)dt$ est solution particulière de $y'' + k^2y = f(x)$. Or si l'on cherche y_3 sous la forme $C_1(x)\cos kx + C_2(x)\sin kx$, par la méthode de variation de la constante, on trouve ici le wronskien $W(\cos kx, \sin kx) = k$, puis $y_3 = \frac{1}{k}\Big(-\cos kx\int_{x_0}^{x} f(t)\sin kt\,dt + \sin kx\int_{x_0}^{x} f(t)\cos kt\,dt\Big)$, soit, en introduisant les facteurs indépendants de la variable d'intégration sous le signe somme, et tenant compte de ce que $\sin k(x-t) = -\cos kx \sin kt + \sin kx \cos kt$, la solution particulière envisagée. Que toute solution entre dans cette solution générale, cela revient au même fait pour l'équation homogène à coefficients constants, ce qui peut se prouver de façon directe élémentaire comme suit. Soit donc u une fonction sur $[a, b]$ telle que $u'' + k^2u = 0$ et telle que $u(x_0) = u'(x_0) = 0$; alors $u = 0$. En effet en multipliant l'équation différentielle par $2u'$ on a $2u'u'' + 2k^2u'u = 0$, soit $[u'^2 + (k^2u^2]' = 0$, et donc $u'^2 + k^2u^2 = c$, une constante. Mais si l'on calcul en x_0 il vient $0 + k^2.0 = c$, et ensuite $u = 0$. Alors, si u est une fonction telle que $u'' + k^2u = 0$, elle est déterminée par les valeurs $u(x_0)$ et $u'(x_0)$. En effet si l'on a deux solutions u_1 et u_2 avec $u_1(x_0) = u_2(x_0)$ et $u_1'(x_0) = u_2'(x_0)$, d'après ce que l'on vient de dire $u = u_1 - u_2$ est nulle. Par exemple sinus et cosinus sont déterminées par leurs valeurs initiales et leur équation différentielle $u'' + u = 0$.

RÉSONANCE — *Soit l'équation $y'' + k^2y = a \sin \omega x$, avec $k > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ deux constantes déterminées. La solution de l'équation homogène est, donc avec C_1 et C_2 deux constantes indéterminées, $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$.*

1 — Si $k \neq \omega$, la solution de l'équation complète est, avec A et ϕ_0 deux constantes indéterminées

$$y = A\sin(kx + \phi_0) + \frac{a}{q - \omega^2}\sin \omega x.$$

2 — Si $k = \omega$, la solution de l'équation complète est, avec A et ϕ_0 deux constantes indéterminées

$$y = A\sin(kx + \phi_0) - \frac{a}{2k}x\cos \omega x.$$

Dans le cas où $k = \omega$ il y a donc résonance*, car l'amplitude des oscillations augmente indéfiniment lorsque $x \to +\infty$.*

L'ÉQUATION LINÉAIRE HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS $y'' + py' + qy = 0$ — *Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Alors :*

1 — Si $p^2 - 4q > 0$, c'est-à-dire si $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1, r_2 = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$, alors $y_1 = e^{r_1x} = e^{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}x}$ et $y_2 = e^{r_2x} = e^{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}x}$ sont deux solutions réelles indépendantes de $y'' + py' + qy = 0$.
2 — Si $p^2 - 4q = 0$, c'est-à-dire si $x^2 + px + q = 0$ admet une racine double $r = \frac{-p}{2}$, alors $y_1 = e^{rx} = e^{\frac{-p}{2}x}$ et $y_2 = xe^{rx} = xe^{\frac{-p}{2}x}$ sont deux solutions réelles indépendantes de $y'' + py' + qy = 0$.

3 — Si $p^2 - 4q < 0$, c'est-à-dire si $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines complexes distinctes $r_1, r_2 = \frac{-p\pm i\sqrt{4q-p^2}}{2}$, on pose $\rho = \frac{-p}{2}$ et $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$, et alors $y_1 = e^{\rho x}\cos \omega x$ et $y_2 = e^{\rho x}\sin \omega x$ sont deux solutions réelles indépendantes de $y'' + py' + qy = 0$.

Dans chaque cas toute solution y s'écrit alors de façon unique $y = c_1y_1 + c_2y_2$, avec deux constantes c_1 et c_2.

En effet, on cherche et trouve deux solutions indépendantes. Tout d'abord, s' il y a une solution de la forme $y_1 = e^{rx}$, alors on a $r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$, soit $r^2 + pr + q = 0$. Cette équation est dite *caractéristique*. Si son discrimiant

p^2-4q est positif, on a deux possibilités réelles, $r_1, r_2 = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$, et les deux solutions indiquées. Si le discriminant est nul, on obtient une seule valeur $r = -\frac{p}{2}$, et la solution associée e^{rx}. On vérifie alors que xe^{rx} est aussi une solution, indépendante de e^{rx}. Enfin, si le discriminant est négatif, on a pour l'équation caractéristique les solutions complexes $r_1, r_2 = \frac{-p\pm i\sqrt{4q-p^2}}{2}$, à quoi correspond, avec $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$ des fonctions $e^{r_1x} = e^{-\frac{p}{2}}(\cos\omega + i\sin\omega)$ et $e^{r_2x} = e^{-\frac{p}{2}}(\cos\omega - i\sin\omega)$ solutions mais à valeurs complexes. On trouve alors deux fonctions solutions indépendantes en prenant $e^{r_1x} \pm e^{r_2x}$. On arrive alors, dans tous les cas à une solution générale $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Et il reste à établir que toute solution rentre dans cette solution générale. Cela résulte du théorème général non encore démontré, mais on peut, dans le cas spécial ici en établir une preuve directe.

Par variation des constantes on peut ensuite résoudre l'équation avec second membre $y'' + py' + qy = f(x)$.

L'Équation linéaire à coefficients constants avec second membre $y''+py'+qy = f(x)$, avec $f(x)$ continue — *Soit $k(x)$ continue deux fois dérivable vérifiant $k(0) = 0$, $k'(0) = 1$, et $k''+pk'+qk = 0$. Alors la fonction $h(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)k(x-t)dt$ satisfait à $h(x_0) = 0$, $h'(x_0) = 0$, et $h'' + ph' + qh = f$.*

Par suite, toute solution de $y'' + py' + qy = f(x)$, s'écrit :

1 — Si $p^2-4q > 0$, $r_1, r_2 = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$: $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \int_{x_0}^{x} f(t)\frac{e^{r_2(x-t)}-e^{r_1(x-t)}}{r_2-r_1}dt$.

2 — Si $p^2-4q = 0$, $r = \frac{-p}{2}$: $y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} + \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)e^{r(x-t)}dt$.

3 — Si $p^2-4q < 0$, $\rho = \frac{-p}{2}$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$: $y = c_1e^{\rho x}\cos\omega x + c_1e^{\rho x}\sin\omega x + \int_{x_0}^{x} f(t)\frac{e^{-\frac{p}{2}(x-t)}\sin\big(\omega(x-t)\big)}{\omega}dt$.

La fonction $f(t)k(x-t)$ est continue par rapport à t et admet une dérivée partielle par rapport à x, à savoir $f(t)k'(x-t)$, qui est continue du couple (t,x). On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre sous le signe somme. Si $F(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t)k(y-t)dt$, on a les dérivées premières $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x)k(y-x)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t)k'(y-t)dt$, puis les dérivées secondes $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f'(x)k(y-x) - f(x)k'(y-x)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = f(x)k'(y-x)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t)k''(y-t)dt$. Pour $h(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)k(x-t)dt = F(x,x)$ il vient $h'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,x)$, soit $h'(x) = f(x)k(0) + \int_{x_0}^{x} f(t)k'(x-t)dt$, puis on obtient de même $h''(x) = f'(x)k(0) + f(x)k'(0) + \int_{x_0}^{x} f(t)k''(x-t)dt$. De là résulte pour p et q des constantes que

$$h'' + ph' + qh = f(x)k'(0) + \big(f'(x) + pf(x)\big)k(0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\big(k''(x-t) + pk'(x-t) + qk(x-t)\big)dt = f(x).$$

On observe qu'ainsi, sans renvoie au théorème général non-démontré encore, est prouvée l'existence d'une solution.

Ensuite on en déduit la solution générale dans les trois cas, à partir d'une solution particulière de l'équation homogène. On vérifierait aussi ces formes en partant des formules via la variation des constantes sur $c_1y_1+c_2y_2$, que l'on a données par $y = y_1\left(\int_{x_0}^{x} \frac{-y_2f}{y_1y_2'-y_2y_1'}dx + c_1\right) + y_2\left(\int_{x_0}^{x} \frac{y_1f}{y_1y_2'-y_2y_1'}dx + c_2\right)$, comme fait pour $y'' + k^2y = f$.

Pour ce qui est du fait que toute solution entre dans cette solution générale, cela revient au même fait pour l'équation homogène à coefficients constants et sa solution générale, ce qui se décompose en deux points. D'une part on montre que si deux solutions de l'équation homogène vérifient $u_1(x_0) = u_2(x_0) = a$ et $u_1'(x_0) = u_2'(x_0) = b$, alors elles sont égales. D'autre part, on montre que, y_1 et y_2 étant donc deux solutions indépendantes de l'équation homogène, pour a et b quelconques il existe c_1 et c_2 tels que $u = c_1y_1+c_2y_2$ satisfasse à $u(x_0) = a$ et $u'(x_0) = b$. Ce deuxième point résulte de l'indépendances de y_1 et y_2 qui, on l'a vu, dit que $y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$, de sorte que le système $c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = a$, $c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = b$ admet $c_1 = \frac{ay_2'(x_0)-by_2(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_1'(x_0)y_2(x_0)}$ et $c_2 = \frac{-ay_1'(x_0)+by_1(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_1'(x_0)y_2(x_0)}$ pour solutions. Quant au premier point, en voici la preuve lorsque $p \geq 0$ et $q \geq 0$. On a alors $w = u_1 - u_2$ qui satisfait $w(x_0) = w'(x_0) = 0$ et $w'' + pw' + qw = 0$, et on peut en déduire que $w = 0$. En effet on procède comme pour l'équation $y'' + k^2y = 0$ plus haut, en multipliant l'équation par $2w'$, d'où $2w'w'' + 2pw'^2 + 2qw'w = 0$, $\frac{d}{dt}(w'^2) + \frac{d}{dt}(qw^2) + 2pw'^2 = 0$, ou $d(w'^2 + qw^2) = -2pw'^2dt$, donc $[w'^2 + qw^2]_{x_0}^{x} = -2p\int_{x_0}^{x} w'^2dt$. Puisque w et w' s'annulent en x_0, il vient donc $w'(x)^2 + qw(x)^2 + 2p\int_{x_0}^{x} w'^2dt = 0$. Si $p \geq 0$ et $q \geq 0$, il faut que pour tout x chacun des trois termes soit nul, et donc $w'(x) = 0$, donc $w(x)$ est constant, $w(x) = w(x_0) = 0$.

On est donc conduit, dans la résolution de $y''+py'+qy = f(x)$, à calculer des intégrales de la forme $\int_{x_0}^{x} f(t)k(x-t)dt$, où $k(u)$ est une fonction de la forme $P(u)e^{\alpha u}\sin(\beta u)$ ou somme de deux expressions de ce type. Alors si $f(x)$ elle-même est également de ce genre, les primitives se calculent explicitement, et la forme intégrée d'une solution particulière est a priori connue. On peut alors résoudre les équations *par identification à la forme connue a priori*.

Résolution de l'équation $y'' + py' + qy = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ — *Soit l'équation à coefficients constants p et q, avec α et β constantes, avec $P(x)$ et $Q(x)$ des polynômes données :*

$$y'' + py' + qy = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Soit U et V des polynômes indéterminés dont le degré est égal au plus élevé des degrés de P ou de Q. En particulier

si P et Q sont des constantes, on prendra pour U et V des constantes aussi.
1 — Si $(\alpha+\beta i)^2 + p(\alpha+\beta i) + q \neq 0$*, l'équation admet une solution particulière de la forme*

$$U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

2 — Si $(\alpha+\beta i)^2 + p(\alpha+\beta i) + q = 0$*, l'équation admet une solution particulière de la forme*

$$x(U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x).$$

Résolution de l'équation $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$ — *Soit l'équation à coefficients constants p et q avec* $P_n(x)$ *un polynôme donné de degré n*

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}.$$

Soit $Q_n(x)$ *un polynôme indéterminé de degré n,* $L_2(x)$ *un polynôme indéterminé de degré* 2.
1 — Si $a^2 + pa + q \neq 0$*, l'équation admet une solution particulière de la forme* $Q_n(x)e^{ax}$.
2 — Si $a^2 + pa + q = 0$ *et* $2a + p \neq 0$*, l'équation admet une solution particulière de la forme* $xQ_n(x)e^{ax}$.
3 — Si $a^2 + pa + q = 0$ *et* $2a + p = 0$*, l'équation admet une solution particulière de la forme* $x^2Q_n(x)e^{ax}$.
Donc dans tous les cas on peut trouver une solution sous la forme

$$L_2(x)Q_n(x)e^{ax}.$$

Résolution de l'équation $y'' + py' + qy = M\cos\beta x + N\sin\beta x$ — *Soit l'équation à coefficients constants donnés p et q, et M et N,*

$$y'' + py' + qy = M\cos\beta x + N\sin\beta x.$$

Soit A et B deux constantes indéterminées.
1 — Si $(\beta i)^2 + p(\beta i) + q \neq 0$*, l'équation admet une solution particulière de la forme*

$$A\cos\beta x + B\sin\beta x,$$

2 — Si $(\beta i)^2 + p(\beta i) + q = 0$*, l'équation admet une solution particulière de la forme*

$$x(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

Remarquons que si l'on travaille au niveau de fonctions à valeurs complexes, les seconds membres indiqués dans les trois résultats précédent sont des sommes de termes de la forme mx^ke^{ax}. On trouvera donc des solutions particulières à valeurs complexes des équations indiquées par sommes de solutions particulières d'équations du type suivant.

Résolution directe de l'équation $y'' + py' + qy = mx^ke^{ax}$ — *On a une solution de* $y'' + py' + qy = mx^ke^{ax}$ *en prenant* $y = ce^rx$*, avec* $r^2 + pr + q = 0$*, avec* $c' = be^{-(2r+p)x}$*, avec* $b' = mx^ke^{(a+r+p)x}$*. Les deux primitives successives à trouver, b et puis c, sont de la forme* $P(x)e^{sx}$.

Avec r tel que $r^2+pr+q = 0$, on constate, pour $u = ce^{rx}$, avec c une constante quelconque, que $u''+pu'+qu = 0$. On fait alors varier la constante c, c'est-à-dire que l'on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $u = c(x)e^{rx}$, où maintenant $c = c(x)$ est une fonction inconnue. On remplace alors dans l'équation u par cette expression, et il vient pour c l'équation $\big(c'' + (2r+p)c' + (r^2+pr+q)c\big)e^{rx} = mx^ke^{ax}$, soit $c'' + (2r+p)c' = mx^ke^{(a-r)x}$. Avec $c' = v$ on résoud l'équation $v' + (2r+p)v = mx^ke^{(a-r)x}$, en résolvant d'abord l'équation sans second membre $v' + (2r+p)v = 0$, dont une solution générale est $v = be^{-(2r+p)x}$, et en cherchant par variation de la constante b une solution v de l'équation avec second membre qui soit de la forme $v = be^{-(2r+p)x}$. Alors il vient $v'+(2r+p)v = b'e^{-(2r+p)x}$, et il faut donc que $b'e^{-(2r+p)x} = mx^ke^{(a-r)x}$, soit $b' = mx^ke^{(a+r+p)x}$.

8.5. Systèmes différentielles linéaires plan.

De façon générale, un *système différentielle implicite d'ordre* 1 *et plan, soit à* 2 *fonctions inconnues* u et v d'une variable t définies sur un intervalle $]a,b[$, dérivables, consiste en deux équations

$$\Phi_1(u,v,u',v',t) = 0, \qquad \Phi_2(u,v,u',v',t) = 0,$$

avec $\Phi_1, \Phi_2 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions sur une partie $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^5$, où figurent comme variables la variable t, les fonctions inconnues u et v de t, et leurs dérivées relativement à t, u' et v', qui sont aussi inconnues. Une *solution* est un couple $((u,v),]a,b[)$ d'un intervalle ouvert $]a,b[$ et de deux fonctions u et v telles que les équations soient satisfaites pour

$t = t$, $u = u(t)$, $v = v(t)$, $u' = \frac{du}{dy}$, $v' = \frac{dv}{dt}$. Une solution est donc une courbe plane paramétrée, et une solution générale sera donc une famille à un paramètre de courbes planes dont chacune sera une solution.

On parlera de *système différentielle explicite* d'ordre 1 ou simplement de *système différentielle d'ordre 1* lorsque les équations seront sous la forme

$$u' = \phi_1(u, v, t), \qquad v' = \phi_2(u, v, t).$$

Système du premier ordre associé à une équation explicite du second ordre — *En posant $x = t$, $u = y$, $v = y'$, et $\phi_2(u, v, t) = g(t, u, v)$, l'équation*

$$y'' = g(x, y, y')$$

équivaut au système

$$u' = v, \quad v' = \phi_2(u, v, t).$$

Ainsi la théorie des équations différentielles explicites du second ordre à une fonction inconnues est un cas particulier de celle des systèmes différentielles du premier ordre à deux fonctions inconnues.

Une équation incomplète sans x, $y'' = f(y, y')$ correspond à un système autonome de la forme $u' = v, \quad v' = f(u, v)$.

Une équation linéaire homogène $y'' = a(x)y + b(x)y'$ correspond à un système $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

Particulièrement nous parlerons de *système différentielle autonome* lorsque les équations seront sous la forme

$$u' = \psi_1(u, v), \qquad v' = \psi_2(u, v).$$

Plus particulièrement encore nous parlerons de *système différentielle autonome linéaire plan* ou simplement de *système linéaire* si ces équations sont de la forme

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Système linéaire et équation de Riccati— *Le système linéaire du premier ordre à deux fonctions inconnues "équivaut" à une équation de Riccati. Entre un système linéaire du premier ordre à deux fonctions inconnues, l'équation du premier ordre de Riccati et l'équation linéaire homogène du second ordre, on a les réductions suivantes :*

1 — Si $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, avec $y = \frac{u}{v}$ on a $y' = c + (a - d)y - by^2$.

2 — Si $y' = A + By + Cy^2$, avec $w = e^{-\int Cydx}$ on a $w'' = -CAw + (\frac{C'}{C} + B)w'$.

3— Si $w'' = Pw + Qw'$, avec $r = w$ et $ss = w'$ on a $\begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$.

4— Si l'on applique successivement les étapes précédentes, alors le système $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est réduit au sytème $\begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ bc & \frac{c'}{c} + a - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ avec $r = e^{\int \frac{bu}{v} dx}$ et $s = \frac{bu}{v} e^{\int \frac{bu}{v} dx}$.

On note que ces transformations appliquées à des équations à coefficients constants donnent des équations à coefficients constants.

On peut donc considérer que la théorie des équations linéaires homogènes du second ordre est identifiable à un fragment de la théorie des systèmes linéaires à deux inconnues, et que aussi cette dernière peut "à la Riccati" se ramener à la première.

L'équation de Riccati

$$y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$$

est la première difficulté sérieuse après la résolution de l'équation linéaire $y' = A(x)+B(x)y$. Mais Riccati l'a introduite en fait *à partie du problème linéaire à deux fonctions inconnues* $u = u(x)$ et $v = v(x)$ qui satisferaient au système

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x) & c(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}.$$

Pour étudier cette question, Riccati introduit $y = \frac{u}{v}$. Alors on a $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(au+cv)v - u(bu+dv)}{v^2}$, soit $y' = c+(a-d)y-by^2$. En effet si $y_1(x)$ est une solution de cette équation, alors on trouvera une solution du système avec $u = y_1 v$ et v solution de $v' = (by_1 + d)v$, que l'on trouve par une quadrature : $\ln v = \int_{x_0}^{x} (b(x)y_1(x) + d(x))dx + C$, $v = e^C e^{\int_{x_0}^{x} (b(x)y_1(x)+d(x))dx}$.

Ainsi on voit que la difficulté de l'équation linéaire à deux inconnues est réductible à l'équation quadratique de Riccati à une inconnue.

8.6. Le système linéaire $x' - k(t)y = 0$, $y' + k(t)x = 0$.

LA RECONSTRUCTION D'UNE COURBE DEPUIS SON ÉQUATION NATURELLE — *Le système $x' - k(t)y = 0$, $y' + k(t)x = 0$ admet la solution (x_1, y_1)donnée par*

$$x_1(t) = \cos\Big(\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau\Big), \quad y_1(t) = -\sin\Big(\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau\Big).$$

Et ces fonctions x_1 et y_1 sont deux solutions indépendantes de l'équation linéaire homogène du second ordre

$$u'' - \frac{k'}{k}u' + k^2u = 0.$$

Dans l'étude du repère mobile de Serret-Frenet sur une courbe nous avons résolu l'équation $\frac{d}{ds}B(s) = K(s)B(s)$ lorsque $K = k(s)J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sous la forme $B = \begin{pmatrix} \cos\big(\pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1 + \phi_0\big) & \sin\big(\pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1 + \phi_0\big) \\ -\sin\big(\pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1 + \phi_0\big) & \cos\big(\pm\int_{s_0}^{s} k(s_1)ds_1 + \phi_0\big) \end{pmatrix}$. Autrement dit, changeant maintenant le nom du paramètre s en t, nous avons fournit en fait deux solutions au système $x' - k(t)y = 0$, $y' + k(t)x = 0$, l'une donnée par la première colonne de B, l'autre par la seconde. Ainsi nous concluons avec la première colonne. En fait si $\big(x(t), y(t)\big)$ forment une solution du système, alors $x(t)$ et $y(t)$ sont deux solutions indépendantes de l'équation linéaire homogène du second ordre $u'' - \frac{k'}{k}u' + k^2u = 0$. En effet en dérivant $x' - ky = 0$ il vient $x'' - k'y - ky' = 0$, ce qui, avec $y' + kx = 0$ donne $x'' - k'(\frac{x'}{k}) - k(-kx) = 0$. Et de même pour y.

En particulier si k est constante et vaut $k = 1$, alors la courbe paramétrée par (x, y) est un cercle, les fonctions x et y étant les solutions de $u'' + u = 0$, soit les fonctions $\sin t$ et $\cos t$.

EXERCICES

1 — On considère l'équation $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Constater que $y_1 = x$ est une solution particulière. Montrer que $y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx$ est une seconde solution indépendante. Montrer que $y_2 = x\int \frac{e^{-\ln|1-x^2|}}{x^2}dx = x\int \frac{dx}{x^2|1-x^2|}$, puis que $y_2 = x\int\big(\pm\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\big)dx = x\big[\mp\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\big|\frac{1+x}{1-x}\big|\big]$. Montrer que toute solution de l'équation s'écrit $y = C_1x + C_2\Big(\frac{1}{2}x\ln\big|\frac{1+x}{1-x}\big| \mp 1\Big)$.

2 — Résoudre $y'' + y' + y = 0$, puis $y'' + y' + y = x$.

3 — Soit l'équation $y'' + 9y = 0$. Trouver l'intégrale générale et la solution particulière y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$. Constater que c'est une fonction périodique. En dessiner le graphe.

4 — Soit l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$. Trouver l'intégrale générale et la solution particulière y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Constater que c'est une fonction "périodique amortie", en dessiner le graphe.

5 — Trouver la solution générale de l'équation $y'' + 4y' + 3y = x$.

6 — Trouver la solution générale de l'équation $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$.

7 — Trouver la solution générale de l'équation $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$.

8 — Montrer que l'intégrale générale de $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$ peut se mettre sous la forme $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

9 — Montrer que la solution générale de $y' + ay = b$, où a et b sont des constantes, s'écrit $y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$.

10 — Dessiner le graphe de la solution $y = \sin(\beta x + \phi_0) - \frac{a}{2\beta}x\cos\beta x$ de l'équation $y'' + qy = a\sin\omega x$, quand $\beta = \omega = \sqrt{q}$ (cas de résonance).

11 — Pour résoudre le système $x' = y + z$, $y' = z + x$, $z' = x + y$, où les inconnues sont trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, on dérive la première, et entre cette première et sa dérivée on élimine y et z, et l'on obtient $x'' - x - 2x = 0$. Donner l'intégrale générale de cette dernière équation sous la forme $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$, et en déduire que $y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - z$. Enfin substituant dans la troisième équation montrer que $z' + z = 3C_2e^{2t}$. Montrer que l'intégrale de cette équation est $z = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}$, puis que $y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}$. Comme x, y et z jouent des rôles symétriques, présenter la solution générale du système $x' = y + z$, $y' = z + x$, $z' = x + y$ sous une forme "symétrique".

COURS 10 (??/???/06) — **Intégrale curviligne, travail et calcul d'aire.**

10.1. Intégration de 1-formes différentielles en dimension 1 : notation.

La formule de changement de variable dans une intégrale et celle de calcul par primitives se laissent reformuler comme suit, avec l'introduction de l'idée d'intégrale de forme différentielle sur un *arc orienté simple*. Cette reformulation en dimension 1 n'est vraiment intéressante que comme préparation à l'introduction de "la même chose " en dimension 2, qui suit.

Forme différentielle d'une variable. — Soit $\mathcal{X} =]A,B[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une 1-*forme différentielle* continue sur $\mathcal{X}$ d'une variable $x \in \mathcal{X}$ est une écriture $\omega = f(x)dx$, où $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathcal{X}$. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $]A,B[$ on a donc une "primitive" F de ω, soit une fonction $F(x)$ telle que $dF = \omega$.

Chemin paramétré orienté injectif et arc orienté simple, en dimension 1 — Un *chemin paramétré orienté injectif* γ dans $\mathcal{X}$ est une application continue injective $\gamma : [p,q] \to \mathcal{X}$, avec la spécification que $\gamma(p) = a \in \mathcal{X}$ est la *source* et $\gamma(q) = b \in \mathcal{X}$ le *but*. Le bord du chemin paramétré orienté γ est la différence formelle entre son but b et sa source a, soit $\partial\gamma = b - a = \gamma(q) - \gamma(p)$.

Soit $\gamma : [p,q] \to \mathcal{X}$ un chemin paramétré orienté injectif dérivable à dérivée γ' continue, chemin dans $\mathcal{X}$, avec $\gamma(p) = a$, $\gamma(q) = b$. Soit un *changement de paramètre* dérivable $h : [r,s] \to [p,q]$ avec $h(r) = p$ et $h(s) = q$, $h'(u) > 0$, et soit $\mu : [r,s] \to \mathbb{R}$ le nouveau chemin paramétré orienté injectif $\mu = \gamma \circ h$. Si le paramètre de γ est $t \in [p,q]$ et le paramètre de μ est $u \in [r,s]$, on a donc $h(u) = t$, $\mu(u) = \gamma\Big(h(u)\Big) = \gamma(t)$. Et $\mu'(u) = \gamma'\Big(h(u)\Big)h'(u)$. On considère alors que γ et μ déterminent le même *chemin orienté à paramétrage injectif* ou *arc simple* noté $[\gamma] = [\mu]$. En fait, puisque l'on est en dimension 1, $[\gamma] = [\mu]$ est connu par ses extrémités, et l'on peut l'écrire $[\gamma] = [\mu] = \overset{\frown}{ab}$. Finalement, l'arc orienté simple qui est défini par γ ou aussi bien par μ *est* le segment d'extrémités a et b ($[a,b]$ si $a \leq b$ ou $[b,a]$ si $b \leq a$, *avec* la spécification que a est la source et b le but.

On note $-[\mu] = \overset{\frown}{ba}$ l'arc opposé même arc avec l'orientation opposée, qui se décrirait, comme $[\lambda]$ avec $\lambda : [p,q] \to \mathcal{X}$ le chemin paramétré orientśimple donné par $\lambda(t) = \mu\big((q-p) - t\big)$. Comme $\partial\gamma$ ne dépend que de $[\gamma]$, on le note $\partial[\gamma]$ ou encore $\partial\overset{\frown}{ab}$.

Image réciproque et intégrale d'une forme sur un chemin. — Soit γ et μ et h comme ci-dessus. On introduit l'*image réciproque* de $\omega = f(x)dx$ par γ, soit $\gamma^*\omega = \gamma^*\Big(f(x)dx\Big)$ par

$$\gamma^*\omega = f\Big(\gamma(t)\Big)\gamma'(t)dt,$$

Pour tout ω on a $(\gamma \circ h)^*\omega = h^*(\gamma^*\omega)$, soit en bref

$$(\gamma \circ h)^* = h^* \circ \gamma^*.$$

Si $\omega = dF$, alors $\gamma^*(dF) = \gamma^*(F'(x)dx) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \frac{d}{dt}\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)dt$.

On définit l'*intégrale* de $\omega = f(x)dx$ sur le chemin paramétré orienté γ comme l'intégrale de $\gamma^*\omega$ sur le chemin $\mathrm{Id}_{[p,q]} : [p,q] \to [p,q]$, soit

$$\int_\gamma \omega =_{\mathrm{def}} \int_{\mathrm{Id}_{[p,q]}} \gamma^*\omega =_{\mathrm{def}} \int_p^q f\Big(\gamma(t)\Big)\gamma'(t)dt.$$

Avec la formule de changement de variable dans l'intégrale pour le changement de variable $t = h(u)$ on a alors pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue :

$$\int_{t=p}^{t=q} f\Big(\gamma(t)\Big)\gamma'(t)dt = \int_{u=r}^{u=s} f\Big(\gamma(h(u))\Big)\gamma'\Big(h(u)\Big)h'(u)du = \int_r^s f\Big(\mu(u)\Big)\mu'(u)du.$$

Si $\omega = dF$ on a $\int_\gamma dF = \int_p^q \frac{d}{dt}\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)dt = [F\big(\gamma(t)\big)]_p^q = [F(x)]_a^b$.

Changement de variable [variante] et primitive [variante], formule de Stokes —*La quantité* $\int_\gamma \omega = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt$ *attachée a priori au paramétrage* γ *est* invariante *si* γ *est remplacé par* $\mu = \gamma \circ h$, *avec pour* h *les conditions ci-dessus, c'est-à-dire avec* $[\gamma] = [\mu]$, *c'est-à-dire que* $\int_{\gamma\circ h} \omega = \int_\gamma \omega$. *On l'appelle donc l'*intégrale *de* ω *sur le* chemin orienté *ou* arc orienté simple $[\gamma]$ *et pour souligner l'invariance on la note encore* $\int_{[\gamma]} \omega$, *voire* $\int_{\overset{\frown}{ab}} \omega$. *On peut donc poser*

$$\int_{\overset{\frown}{ab}} \omega = \int_p^q f\Big(\gamma(t)\Big)\gamma'(t)dt,$$

avec γ un paramétrage orienté injectif continument dérivable quelconque de l'arc $\overset{\frown}{ab}$.

Si de plus on a une fonction $F\ : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ telle que $dF = \omega$, alors $\int_{[\gamma]} dF = \int_{[\gamma]} \omega = \Big[F(x)\Big]_{\gamma(p)}^{\gamma(q)} =_{\text{def}} \int_{\partial[\gamma]} F$, et donc cette quantité ne dépend que des extrémités du chemin orienté $[\gamma]$. La formule $\int_{[\gamma]} dF = \int_{\partial[\gamma]} F$ est nommée formule de Stokes *pour les 1-formes en dimension 1.*

10.2. Intégration de 1-formes différentielles en dimension 2.

Forme différentielle de deux variables — Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une 1-*forme différentielle* continue sur $\mathcal{X}$ d'une variable $(x, y) \in \mathcal{X}$ est une écriture $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, où $P, Q\ : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur $\mathcal{X}$.

Si V est un *champ de vecteur* défini sur $\mathcal{X}$, $V(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$, $(x, y) \in \mathcal{X}$, on considère la forme différentielle $\phi_V = Pdx + Qdy$ que l'on dira associée à V.

On dit que $F(x, y)$ est une *primitive* de ω sur $\mathcal{X}$ si $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$, c'est-à-dire si $dF = \omega$. Évidemment ϕ_V admet une primitive U exactement si $\nabla U = V$, et on dit alors que V "dérive" du *potentiel* U.

On a déjà examiner les choses dans le langage des champs de vecteurs et du travail, mais justement ici on veut, avec le langage des formes différentielles, mettre en place un système de plus vaste portée, susceptible d'extension aux dimension plus grandes.

Existence d'une primitive d'une 1-forme fermée [début] — *1 —Si $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est telle que P et Q admette des dérivées partielles continues, alors si ω admet une primitive F, nécessairement ω est* fermée, *c'est-à-dire on a $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

2 — Si dans le disque $D_R(\alpha, \beta) = \Big\{(x, y);\ \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} < R\Big\} \subset \mathcal{X}$ les fonctions P et Q sont continues et à dérivées partielles continues, et si les conditions nécessaires $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sont satisfaites, alors dans ce disque la 1-forme $\omega = Pdx + Qdy$ admet une primitive.

La preuve est bien sûr la même que pour les champ de vecteurs et la question de savoir s'ils dérivent ou non d'un potentiel, seules les notations varient. En effet, le premier point résulte du lemme de Schwarz pour une éventuelle primitive F, qui satisferait donc $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$; alors $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ donne la condition proposée.

Pour le deuxième point il suffit de prendre $F(x, y) = \int_\beta^y Q(\alpha, v)dv + \int_\alpha^x P(u, y)du$. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de dérivation d'intégrale dépendant d'un paramètre, il vient d'une part $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$ et, d'autre part $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(\alpha, y) + \int_\alpha^x \frac{\partial P}{\partial y}(u, y)duQ(\alpha, y) = Q(\alpha, y) + \int_\alpha^x \frac{\partial Q}{\partial x}(u, y)du = Q(\alpha, y) + (Q(x, y) - Q(\alpha, y)) = Q(x, y)$.

Chemin paramétré orienté injectif et arc orienté simple, en dimension 2. — Un *chemin paramétré orienté injectif* γ dans $\mathcal{X}$ est une application continue injective $\gamma : [p, q] \to \mathcal{X}$ — qu'on pourra détailler coordonnée par coordonnée en $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ — avec la spécification que $\gamma(p) = (\alpha(p), \beta(p)) = a \in \mathcal{X}$ est la *source* et $\gamma(q) = (\alpha(q), \beta(q)) = b \in \mathcal{X}$ le *but*. Le bord du chemin orienté γ est la différence formelle entre son but b et sa source a, soit $\partial\gamma = b - a = \gamma(q) - \gamma(p)$.

Soit $\gamma\ : [p, q] \to \mathcal{X}$ un chemin paramétré orienté dérivable à dérivée $\gamma'(t) = (\alpha'(t), \beta'(t))$ continue, chemin dans $\mathcal{X}$, avec $\gamma(p) = a \in \mathcal{X}$, $\gamma(q) = b \in \mathcal{X}$. Soit un *changement de paramètre* dérivable $h\ : [r, s] \to [p, q]$ avec $h(r) = p$ et $h(s) = q$, $h'(u) > 0$, et soit $\mu\ : [r, s] \to \mathcal{X}$ le nouveau chemin paramétré $\mu = \gamma \circ h$. Si le paramètre de γ est $t \in [p, q]$ et le paramètre de μ est $u \in [r, s]$, on a donc $h(u) = t$, $\mu(u) = \gamma\Big(h(u)\Big) = \gamma(t)$. Ou encore $\mu(u) = (\alpha(h(u)), \beta(h(u)))$. Alors $\mu'(u) = \Big(\alpha'(h(u)h'(u), \beta'(h(u))h'(u)\Big) = \Big(\alpha'(h(u), \beta'(h(u))\Big)h'(u)$, soit $\mu'(u) = \gamma'\Big(h(u)\Big)h'(u)$. On considère alors que γ et μ déterminent le même *chemin orienté* noté $[\gamma] = [\mu]$. Comme $\partial\gamma$ ne dépend que de $[\gamma]$, on le note $\partial[\gamma]$.

Image réciproque d'une forme. — Soit γ, μ et h comme ci-dessus. L'*image réciproque* de $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ par γ est $\gamma^*\omega = \gamma^*\big(P(x, y)dx + Q(x, y)dy\big)$ donnée par :

$$\gamma^*\omega = \Big[P\big(\alpha(t), \beta(t)\big)\alpha'(t) + Q\big(\alpha(t), \beta(t)\big)\beta'(t)\Big]dt.$$

Pour tout ω on a $(\gamma \circ h)^*\omega = h^*(\gamma^*\omega)$, soit en bref

$$(\gamma \circ h)^* = h^* \circ \gamma^*.$$

SI $\omega = dF$, alors $\gamma^*(dF) = \Big[\frac{\partial F}{\partial x}\big(\alpha(t), \beta(t)\big)\alpha'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(\alpha(t), \beta(t)\big)\beta'(t)\Big]dt = \frac{d}{dt}\big(F(\alpha(t), \beta(t))\big)dt$.

Intégrale d'une forme sur un chemin — On définit l'*intégrale* de $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ sur le chemin γ comme l'intégrale de γ^* sur le chemin $\mathrm{Id}_{[p,q]} : [p,q] \to [p,q]$, soit

$$\int_\gamma \omega =_{\mathrm{def}} \int_{\mathrm{Id}_{[p,q]}} \gamma^*\omega =_{\mathrm{def}} \int_p^q \Big[P\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\alpha'(t) + Q\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\beta'(t)\Big]dt.$$

Cette notion contient celle de l' intégrale $\int_a^b f(x)dx$, que l'on retrouve comme $\int_{\gamma_f} ydx$ avec $\gamma_f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par $\gamma_f(x) = (x, f(x))$.

L'intégrale curviligne comme travail. — Évidemment, pour un champ de vecteurs F on a

$$\mathcal{W}_\Gamma F = \int_\gamma \phi_F.$$

On peut ainsi interpréter toute intégrale de 1-forme $\int_\gamma \omega$ comme un travail. On peut donc traduire en terme de champ de vecteur la théorie formulée en terme de 1-forme, et réciproquement.

Notation ds — Par définition, pour une 1-forme différentielle $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, on obtient $\gamma^*\omega$ en remplaçant partout dans ω x par $\alpha(t)$ et y par $\beta(t)$, y compris dans dx et dy qui deviennent respectivement $\alpha'(t)dt$ et $\beta'(t)dt$. En fait cela vaut pour des fonctions $\omega = \omega(x,y,dx,dy)$ qui ne sont pas nécessairement de la forme $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ linéaire en dx et en dy. Le cas fondamental qui précisément sort du cas linéaire est ce que l'on va noter sur $\mathcal{X}$:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

qui *n'est pas* une 1-forme différentielle sur $\mathcal{X}$, ni a fortiori la différentielle d'une fonction s sur $\mathcal{X}$. Cependant, $\gamma^*(ds) = \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}dt$, notée ci-dessus simplement ds, est une forme différentielle sur $[p,q]$, et on a $s = \int_p^t \gamma^*(ds)$. Alors *sur* $[p,q]$, ds est bien la différentielle de s. Si l'on veut éviter les ambiguïtés, quand γ varie, on devra donc noter plutôt $\int_p^t \gamma^*(ds) = s_\gamma$ et $\gamma^*(ds) = ds_\gamma$, et dire que *sur* $[p,q]$, ds_γ est bien la différentielle de s_γ.

Enfin, on pose

$$\int_\gamma ds =_{\mathrm{def}} \int_p^q \gamma^*(ds).$$

Intégrale sur un composé de chemins — Si $\gamma_1 : [p_1,q_1] \to \mathcal{X}$ et $\gamma_2 : [p_2,q_2] \to \mathcal{X}$ sont deux chemins "qui se suivent", c'est-à-dire avec $\gamma_1(q_1) = \gamma_2(p_2)$, on définit le *composé* $\gamma_2 * \gamma_1 : [p_1, q_1 + (q_2 - p_2)] \to \mathcal{X}$ par $(\gamma_2 * \gamma_1)(t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [p_1,q_1]$, et $(\gamma_2 * \gamma_1)(t) = \gamma_2(p_2 + (t - q_1))$ si $t \in [q_1, q_1 + (q_2 - p_2)]$. Cette composition est associative, c'est-à-dire que si γ_3 suit γ_2 qui suit γ_1, on a $\gamma_3 * (\gamma_2 * \gamma_1) = (\gamma_3 * \gamma_2) * \gamma_1$.

Si $\gamma_2 * \gamma_1$ vérifie les hypothèses de continuités et dérivabilités qu'impliquent les écritures, alors

$$\int_{\gamma_2 * \gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_1} \omega.$$

Intégrale d'une combinaison linéaire de formes — Si $\omega_1 = P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy$ et $\omega_2 = P_2(x,y)dx + Q_2(x,y)dy$ sont des 1-formes sur $\mathcal{X}$, et si $|ambda_1$ et λ_2 sont des nombres réels, alors on définit la combinaison linéaires $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ par

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = (\lambda_1(P_1(x,y) + P_2(x,y)))dx + (\lambda_2(Q_1(x,y) + Q_2(x,y)))dy.$$

On a alors :

$$\int_\gamma \big(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\big) = \lambda_1 \int_\gamma \omega_1 + \lambda_2 \int_\gamma \omega_2.$$

Changement de variable [variante, bis] et primitive [variante, bis], formule de Stokes [bis] —*L'intégrale de ω sur γ, soit la quantité $\int_\gamma \omega = \int_p^q \Big[P\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\alpha'(t) + Q\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\beta'(t)\Big]dt$ attachée a priori au paramétrage γ, est* invariante *si γ est remplacé par $\mu = \gamma \circ h$, avec pour h les conditions ci-dessus, c'est-à-dire avec $[\gamma] = [\mu]$, c'est-à-dire que $\int_{\gamma\circ h} \omega = \int_\gamma \omega$. On l'appelle donc l'intégrale de ω sur le* chemin orienté $[\gamma]$ *et pour souligner l'invariance on la note encore $\int_{[\gamma]} \omega$. Si de plus on a une fonction $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ telle que $dF = \omega$, alors $\int_{[\gamma]} dF = \int_{[\gamma]} \omega = \Big[F(x,y)\Big]_a^b =_{\mathrm{def}} \int_{\partial[\gamma]} F$, et donc cette quantité ne dépend que des extrémités du chemin orienté $[\gamma]$. La formule $\int_{[\gamma]} dF = \int_{\partial[\gamma]} F$ est nommée* formule de Stokes *pour les 1-formes en dimension 2.*

En effet $\int_\mu \omega = \int_r^s \Big[P\big(\alpha(h(u)),\beta(h(u))\big)\alpha'(h(u))h'(u) + Q\big(\alpha(h(u)),\beta(h(u))\big)\beta'(h(u))h'(u)\Big]du$, ce qui par le changement de variable $h(u) = t$ vaut $\int_\gamma \omega$.

Pour $\omega = dF$ on a $\int_\gamma dF = \int_p^q \frac{d}{dt}\big(F(\alpha(t),\beta(t))\big)dt = [F\big(\alpha(t),\beta(t)\big)]_p^q = [F(x,y)]_a^b$.

Calculs de primitives d'une 1-forme fermée [suite] — *Si dans $D_R(\alpha,\beta) = \Big\{(x,y);\ \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} < R\Big\} \subset \mathcal{X}$ les fonctions P et Q sont continues et à dérivées partielles continues, et si les conditions nécessaires $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sont satisfaites, et si $\gamma_{(x,y)} : [p,q] \to D_R(\alpha,\beta)$ est un chemin orienté continue dérivable quelconque de source $\gamma_{(x,y)}(p) = (\alpha,\beta)$ et de but $\gamma_{(x,y)}(q) = (x,y)$, alors dans $D_R(\alpha,\beta)$ la 1-forme $\omega = Pdx+Qdy$ admet pour primitive $G(x,y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega$.*

En effet, on a déjà vu que, dans ces conditions, ω admet une primitive, à savoir $F(x,y) = \int_\beta^y Q(\alpha,v)dv + \int_\alpha^x P(u,y)du$. En fait maintenant cela s'écrit encore $F(x,y) = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega$, en désignant par $\gamma_1 : [\beta,y] \to \mathcal{X}$ un chemin rectiligne de (α,β) à (α,y) défini par $\gamma_1(t) = (\alpha,t)$, et par $\gamma_2 : [\alpha,x] \to \mathcal{X}$ un chemin rectiligne de (α,y) à (x,y) défini par $\gamma_2(t) = (t,y)$, et comme $\gamma_1(y) = \gamma_2(\alpha)$, on peut mettre γ_1 et γ_2 bout à bout, former le chemin anguleux $\theta_{(x,y)} : [\beta, y+(x-\alpha)] \to \mathcal{X}$ défini par $\theta(t) = \gamma_1(t)$, pour $t \in [\beta,y]$ et $\gamma(t) = \gamma_2(t+(\alpha-y))$, pour $t \in [y, y+(x-\alpha)]$ — soit $\theta = \gamma_2 * \gamma_1$, avec la composition $*$ des chemins que l'on introduit ci-après — et considérer que $F(x,y)$ est l'intégrale $\int_{\theta_{(x,y)}}\omega$ de ω sur $\theta_{(x,y)}$. Mais ce n'est là que l'un des calculs possibles d'une primitive, et en fait chaque chemin dans $D_R(\alpha,\beta)$ de (α,β) à (x,y) fourni une possibilité de calcul : Puisque ω admet une primitive F, alors, pour tout chemin $\gamma_{(x,y)} : [p,q] \to D_R(\alpha,\beta)$ de source $\gamma_{(x,y)}(p) = (\alpha,\beta)$ et de but $\gamma_{(x,y)}(q) = (x,y)$ on a $\int_{\gamma_{(x,y)}}\omega = \int_{\gamma_{(x,y)}} dF = [F(x,y)]_{(\alpha,\beta)}^{(x,y)} = F(x,y) - F(\alpha,\beta)$, ce qui est bien une primitive puisque $F(x,y)$ en est une.

Nous venons aussi de prouver :

Indépendance du chemin dans l'intégrale d'une 1-forme fermée — *Si dans $D_R(\alpha,\beta)$ la forme différentielle ω est* fermée*, c'est-à-dire vérifie $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, et si γ_1 et γ_2 sont deux chemins dans $D_R(\alpha,\beta)$ de même source a et de même but b, alors $\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$, et on souligne ce fait en notant l'intégrale $\int_a^b \omega$, sans indiquer le chemin emprunté.*

ou encore :

Nullité de l'intégrale d'une 1-forme fermée sur un lacet — *Si dans $D_R(\alpha,\beta)$ la forme différentielle ω est* fermée*, c'est-à-dire vérifie $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, et si γ est un lacet chemin fermé dans $D_R(\alpha,\beta)$, soit un chemin de source a et but $b = a$, alors $\int_\gamma \omega = 0$.*

10.3. Calcul d'aires.

Considérons un domaine plan qui puisse se décrire sous la forme $D = \{(x,y); x \in [a,b], y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, avec y_1 et y_2 des fonctions continues de x sur $[a,b]$, et $y_1(a) = y_2(a)$, $y_1(b) = y_2(b)$, Alors l'aire de D vaut $\mathcal{A}(D) = \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx = \int_a^b y_2(x)dx - \int_a^b y_1(x)dx$.

On considère alors la courbe Γ paramétrée par $\gamma\ : [a, 2b-a] \to \mathbb{R}$, définie sur $[a,b]$ par $\gamma(t) = y_2(t)$, et puis sur $[b, 2b-a]$ par $\gamma(t) = y_1(2b-t)$, constituée donc de deux arc enchaînées, le premier Γ_2 d'origine $(a, y_2(a))$ et but $(b, y_2(b))$, et passant "en haut', de gauche à droite, le second Γ_1 d'origine $(b, y_1(b))$ et but $(a, y_1(a))$, et passant "en bas", de droite à gauche. Ainsi le parcours de Γ avec t se fait dans le sens horaire, soit le sens dit "rétrograde". Alors $\int_\gamma ydx = \int_{\gamma_1} ydx + \int_{\gamma_2} ydx$, soit

$= \int_a^b y_1(t)dt + \int_b^{2b-a} y_2(2b-t)dt$, soit, en changeant de variable, $\int_\gamma ydx = \int_a^b y_1(x)dx - \int_a^b y_2(x)dx = \mathcal{A}(D)$.