Contrôle 1 MP1, groupe 1D3

Lundi 5 novembre 2007 (durée 1h30)

Exercice 1 *1 —- On pose $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Donner j sous forme trigonométrique. Dessiner les point j, j^2, j^3. Montrer que l'on a $1 + j + j^2 = 0$.*

2 — Trouver, écrites sous la forme $a + bi$, toutes les racines complexes de l'équation $z^4 = 1$, puis de l'équation $z^4 = j$.

Exercice 2 *1 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3(1 + i)z + 5i = 0$.*

2 — On pose pour $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, $f(z) = 3(1 + i) - \frac{5i}{z}$, définissant ainsi une fonction $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$. Trouver les points fixes de f, c'est-à-dire les valeurs de $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ telles que $f(z) = z$.

3 — La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

4 — On pose $A = \{z \in \mathbb{C}; \Re z > 0, \Im z = 0\}$, $B = \{z \in \mathbb{C}; \Re z = 3, \Im z < 3\}$. Montrer que si $z \in A$ alors $f(z) \in B$, si bien que l'on définit bien une fonction $h : A \to B$ en posant $h(z) = f(z)$. La fonction h est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3 *1 —- Pour discuter* $\left\{\begin{array}{cccc} 2x & +y & -\lambda z & = a \\ 4x & -y & +z & = b \\ -x & +\lambda y & -\frac{1}{12}z & = c \end{array}\right.$ *suivant les valeurs des paramètres $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$, on demande d'abord d'échelonner la matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\lambda \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & +\lambda & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.*

2 — On constatera que sauf pour une valeur λ_0 de λ que l'on précisera, et qui est indépendante des valeurs de a, b et c, le système admet toujours une unique solution $s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On donnera alors les expressions explicite de x, y et z en fonction de a, b et c.

3 — Lorsque $\lambda = \lambda_0$, montrer que, suivant que a, b et c ne satisfont pas ou satisfont à une certaine condition linéaire $pa + qb + rc = 0$ que l'on précisera, ou bien il n'existe pas de solution, ou bien il existe plusieurs solutions.

4 — Dans le cas de plusieurs solutions, déterminer une solution $s_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, dépendante des valeurs de a, b et c, et un vecteur $d = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ indépendant des valeurs de a, b et c, tels que chaque solution s'écrive de manière unique sous la forme $s = s_1 + td, t \in \mathbb{R}$.