Contrôle 2bis MP1, groupe 1D3

Mercredi 19 décembre 2007 (durée 1h15)

Exercice 1 *Soit $a, b, c, p \in \mathbb{R}$, et soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par cas :*

$$h(x) = \begin{cases} -x \quad si \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c \quad si \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 + p(x-1) \quad si \quad 1 < x \end{cases} .$$

Peut-on trouver a, b, c et p tels que h soit continue et dérivable partout ?

Exercice 2 *1 — En appliquant la formule de Taylor donner le développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 5 de $\sqrt[3]{1+x}$.*

2 — Donner le développement limité de $\sqrt[3]{1+\sin x}$ en 0 à l'ordre 5.

3 — Déterminer la partie principale αx^k de $\sqrt[3]{1+\sin x} - \sqrt[3]{1+x}$.

Exercice 3 *1 — Montrer par récurrences que $2n+1 < n^2$ pour n assez grand, que $n^3 < 2^n$ pour n assez grand.*

2 — Soit $u_n = \frac{n^2}{2^n}$. Montrer que, pour n assez grand, u_n est une suite décroissante minorée par 0. Montrer que u_n admet une limite $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \lambda \geq 0$.

3 — Montrer que pour n assez grand on a $u_n < \frac{1}{n}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}(u_n) = 0$.

4 — Soit $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$. Déterminer une valeur A telle que $f(x)$ soit une fonction strictement croissante sur $[A, +\infty[$.

5 — Déduire de 2 et de 3 que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty$.

Exercice 4 *1 — Énoncer le théorème des accroissements finis pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

2 — Soit p un entier, et $f : [p, p+1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$. En appliquant le théorème des accroisssements finis à f, montrer que, pour tout entier p

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p}.$$

3 — Soit n et k deux entiers fixés. En appliquant le résultat de 2 pour toutes les valeurs de p de $p = n$ jusqu'à $p = kn$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} \leq \ln(kn) - \ln n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{kn-1}.$$

4 — Soit k un entier fixé, supérieur à 2. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$. Montrer que (u_n) est croissante, majorée par $k-1$, et donc convergente.

5 — Montrer que

$$u_n \leq \ln k \leq u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{kn}.$$

6 — Montrer que $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \ln k$.

7 — Montrer que $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots \frac{1}{100}$ diffère de $\ln 2$ de moins de un centième.