Contrôle 2 MP1, groupe 1D3

Lundi 17 décembre 2007 (durée 1h15)

Exercice 1 *1 — Soit* $u_n = \frac{n}{2^n}$*. Montrer que* u_n *est une suite décroissante minorée par* 0*. Montrer que* u_n *admet une limite* $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \lambda \geq 0$*.*

2 — Montrer que pour $n > 5$ *on a* $u_n < \frac{1}{n}$*. Montrer que* $\lim_{n\to\infty}(u_n) = 0$*.*

3 — On sait que $e = 2,718....$ *Montrer que* $\ln 2 > \frac{1}{2}$*.*

4 — Soit $f(x) = \frac{2^x}{x}$*. Montrer que* $f(x)$ *est une fonction strictement croissante sur* $[2, +\infty[$*.*

5 — Déduire de 2 et de 3 que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$*.*

Exercice 2 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(0) = 0$*, et admettant une dérivée en tout point de* $]0,1[$*. En appliquant le lemme de Rolle à la fonction* $f(x) + kx^2$*, avec le nombre* k *bien choisi, montrer qu'il existe un* $c \in]0,1[$ *tel que* $f(1) = \frac{f'(c)}{2c}$*.*

Exercice 3 *Soit* $a, b, c \in \mathbb{R}$*, et soit les fonctions* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définies par cas :*

$$f(x) = \begin{cases} -x \quad si \quad x \leq 0 \\ bx + c \quad si \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 + 5(x-1) \quad si \quad 1 < x \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} -x \quad si \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c \quad si \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 + 5(x-1) \quad si \quad 1 < x \end{cases} \quad .$$

1 — Déterminer b *et* c *de sorte que* f *soit continue partout sur* $\mathbb{R}$*, et pour les valeurs ainsi trouvées déterminer les points où* f *est dérivable.*

2 — Peut -on trouver a*,* b *et* c *tels que* g *soit continue et dérivable partout ?*

Exercice 4 *1 — Appliquer la formule de Taylor pour montrer que la partie régulière du développement limité en* 0 *à l'ordre 3 de* $\sqrt{1+x}$ *est* $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$*.*

2 — Donner le développement limité de $\sqrt{1 + \sin x}$ *en* 0 *à l'ordre 3.*

3 — Trouver $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+x}}{x^3}$*.*