Examen Chimie Méd

(mercredi 10 janvier 2008, durée 2h30)

Exercice 1 En intégrant par parties plusieurs fois déterminer deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ de degrés au plus 2 tels que $\int x^2 \sin x\, dx = A(x)\cos x + B(x)\sin x + C$. Vérifiez en dérivant.

Exercice 2 En posant $z = \sqrt{1+x^4}$, calculer la primitive $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$.

Exercice 3 On considère la courbe plane paramétrée $x(t) = \frac{t^2}{t-1}$, $y(t) = \frac{t^3}{t-1}$. Montrer qu'en $t = 0$ on a un point stationnaire. Calculer $x''(0)$ et $y''(0)$, déterminer la tangente à la courbe en $t = 0$. Calculer $x'''(0)$ et $y'''(0)$, et montrer que $t = 0$ est un point de rebroussement de première espèce. Dessiner la courbe au voisinage de ce point.

Exercice 4 A 1 — Écrire la conversion $(x, y) = \Phi(r, \theta)$ des coordonnées polaires $[r, \theta]$ vers les coordonnées cartésiennes (x, y). L'élément de surface dS s'écrit $dS = dxdy$ en coordonnées cartésiennes ; comment s'écrit-il en coordonnées polaires ?

2 — En travaillant en polaires, calculer l'aire A d'un cercle de rayon R.

3 — En utilisant les coordonnées polaires calculer l'intégrale
$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq a^2\}$ et $a \in \mathbb{R}$.

4 — En utilisant les coordonnées polaires calculer l'intégrale $J = \iint_{\Phi(E)} (x^2 + y^2)\, dxdy$ avec $E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \theta \leq r \leq 2\theta\}$.

Exercice 4 B 1 — On définit le système de coordonnées curvilignes (u, v) à partir des coordonnées polaires par $u = ar\cos\theta$, $v = br\sin\theta$, avec a et b deux réels strictement positifs. Déterminer la valeur de l'élément de surface dS dans les coordonnées (u, v).

2 — Calculer l'aire de l'intérieur de l'ellipse E d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$.

3 — Calculer $I = \iint_D xy\, dxdy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

Exercice 5 A Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $x = 2$ pour la fonction $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$.

Exercice 5 B 1 — Pour une molécule diatomique la variation de l'énergie potentielle $E(R)$ en fonction de la distance internucléaire R est décrite par un potentiel de Morse $E(R) = D_e\big[\exp(-2\alpha(R - R_e)) - 2\exp(-\alpha(R - R_e))\big]$, avec des constantes D_e (énergie de dissociation), R_e (distance d'équilibre), α (coefficient de décroissance exponentielle) dépendantes de la molécule considérée. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour $E(R)$ au voisinage de $R = R_e$. On appelle *approximation harmonique* et on note $E_{\mathrm{h}}(R)$ la partie régulière de ce développement.

2 — Pour la molécule H_2 on a les valeurs, avec R en ångström et $E(R)$ en kcal.mol^{-1} :

R	0,35	0,4	0,5	0,6	0,7	0,74	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
E(R)	33,4	−12,0	−70,2	−98,6	−108,7	−109,4	−108,1	−101,5	−92,0	−43,9	−17,9	−6,9	−2,6

R	0,35	0,4	0,5	0,6	0,7	0,74	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\mathbf{E_{\mathrm{h}}(R)}$	−45,9	−61,1	−85,3	−101,2	−108,7	−109,4	−107,9	−98,7	−81,2	−55,3	−21,0	21,6

Tracer sur un même schéma les graphes de $E(R)$ et de $E_{\mathrm{h}}(R)$. Est-ce que l'approximation harmonique rend compte des petits déplacements autour de la position d'équilibre R_e ?