Licence Chimie - L2 – Parcours Chimie
Université Paris 7
Année universitaire 2005-2006

Partiel du module « Outils mathématiques pour les chimistes » OT3
Vendredi 6 janvier 2006, de 10h15 à 12h30, salle 16 patio 44

Exercice 1 (5pts):

Soit dans l'espace R^3 le vecteur $n = (0, 0, 1)$, le vecteur $w = (-1, 1, -1)$ et $v = (a, b, c)$ le vecteur unitaire de même sens et même direction que w. On désigne par A la matrice (relativement à la base canonique de R^3) de la rotation autour de n d'un angle de 60°, et par B la matrice (relativement à la base canonique de R^3) de la rotation autour de v d'un angle de 60°

1- Déterminer la matrice A.
2- Déterminer a, b et c, puis la matrice B, soit directement en rappelant une formule générale, soit par changement de base à partir de A.
3- Déterminer, sans calculs, la matrice B^6.
4- Quelles sont les valeurs propres complexes de A ? de B ?

Exercice 2 (5pts): Soit M la matrice (relativement à la base canonique $\kappa = (i, j, k)$ de R^3) de l'application linéaire f déterminée par $f(i) = i+k$, $f(j) = i+j$, $f(k) = j+k$.

1- Écrire M, montrer que M est inversible, et calculer l'inverse de M.
2- Montrer que l'équation caractéristique aux valeurs propres de M peut se mettre sous la forme $(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$. En déduire que M possède 3 valeurs propres complexes distinctes.
3- Diagonaliser, en tant que matrice à coefficients complexes, la matrice M.

Exercice 3 (5pts):

On considère la fonction f de période $T = 2$ définie comme suit :

- $f(x) = -2$ pour $-1 \leq x \leq 0$
- $f(x) = 2$ pour $0 \leq x \leq 1$

On se propose de développer $f(x)$ en une série de Fourier du type :

$$f(x) = a_0 + \sum_n a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \sum_n b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right).$$

1- Représenter cette fonction. Déterminer sa parité.

2- Calculer a_0. Que représente ce coefficient ?

3- Calculer a_n et b_n. Peut-on prévoir ces résultats sans calcul ?
Application : calculer a_1, a_2, b_1 et b_2.

Exercice 4 (5 pts)

A-

1- Comment s'écrit la conversion des coordonnées polaires $[r, \theta]$ aux coordonnées cartésiennes (x,y) ? Comment s'écrit l'élément de surface dS dans le système de coordonnées polaires ?

2- En utilisant les coordonnées polaires, calculer l'aire A du cercle C de rayon $r = 3$.

3- En utilisant les coordonnées polaires, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\ dx\ dy$$

avec $D = \{ (x,y) \in R^2 ;\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad \text{et} \quad \theta \leq r \leq 2\theta \}$.

B-

1- En coordonnées sphériques, on définit un point par les trois coordonnées r, θ et ϕ telles que :
$r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi[$ et $\phi \in [0, 2\pi[$. La conversion des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$
$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$
$$z = r \cos(\theta)$$

Déterminer la valeur de l'élément de volume dV dans ce système de coordonnées.

2- Calculer le volume de la sphère de rayon $r = 3$.