Examen OT3

(mercredi 10 janvier 2008, durée 2h30)

Exercice 1

1 — Soit $M = \begin{pmatrix} -10 & 16 & -4 \\ -9 & 12 & -3 \\ -12 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres de M. Montrer que M est diagonalisable. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M, diagonaliser M.

2 — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 14 & -3 \\ -4 & 8 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Calculer AB, calculer ACB.

3 — Soit $D = \begin{pmatrix} -4b+6c & 8b-8c & -2b+2c \\ -9a+9c & 14a-12c & -3a+3c \\ -36a+12b+24c & 56a-24b-32c & -12a+6b+8c \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de D et montrer que D est diagonalisable. Retrouver le résultat de 1 —.

4 — Écrire le polynôme caractéristique de D et montrer que $\det D = 8abc$.

Exercice 2 Calculer les intégrales doubles :

1 — $I = \iint_S \sin(x+y)\,dxdy$, avec $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$,

2 — $J = \iint_T xy\sqrt{1+x^2}\,dxdy$, avec $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le \sqrt{3},\ 1 \le y \le 2\}$.

Exercice 3 En utilisant les coordonnées polaires calculer l'intégrale $I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le a^2\}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 En utilisant les coordonnées sphériques déterminées par $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$, où $0 \le r$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$, calculer l'intégrale triple $K = \iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$, où Ω est le solide limité par les deux sphères d'équations $x^2+y^2+z^2 = a^2$ et $x^2+y^2+z^2 = b^2$, avec a et b réels, $0 < a < b$.

Exercice 5 On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier $S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{T}$, et sur $\mathbb{R}$ la fonction$f$ de période T qui, sur $[0, T[$ vaut $f(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 \le x < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} < x < T \end{cases}$.

Montrer qu'en tout point $x \in \mathbb{R}$ la série $S(x)$ converge vers $f(x)$.

Exercice 6 Soit $f(x)$ la fonction sur $\mathbb{R}$ de période 2π dont la valeur entre 0 et 2π est donnée par la formule $f(x) = \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}x^2$ (pour donc $0 \le x \le 2\pi$).

1 — Comparer la série de Fourier de $f(x)$ avec la série $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots$.

2 — Montrer que $\lim \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{11}{12}\pi^2$.