Examen – session de rattrapage

(26 juin 2008, durée 1h30)

Exercice 1 :

On considère une maille hexagonale, correspondant à un parallélépipède construit sur trois vecteurs $\overrightarrow{a_h}$, $\overrightarrow{b_h}$ et $\overrightarrow{c_h}$ tels que les modules satisfassent $||\overrightarrow{a_h}|| = ||\overrightarrow{b_h}|| \neq ||\overrightarrow{c_h}||$ et que les angles entre ceux-ci soient droits sauf l'angle défini par les vecteurs $\overrightarrow{a_h}$ et $\overrightarrow{b_h}$ qui lui vaut 120°. On inscrit dans cette maille, une maille rhomboédrique, correspondant à un parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{a_r}$, $\overrightarrow{b_r}$ et $\overrightarrow{c_r}$ tels que les modules de ces trois vecteurs soient égaux et les angles formés entre eux le soient aussi mais restent différents de 90° (voir Fig. 1) :

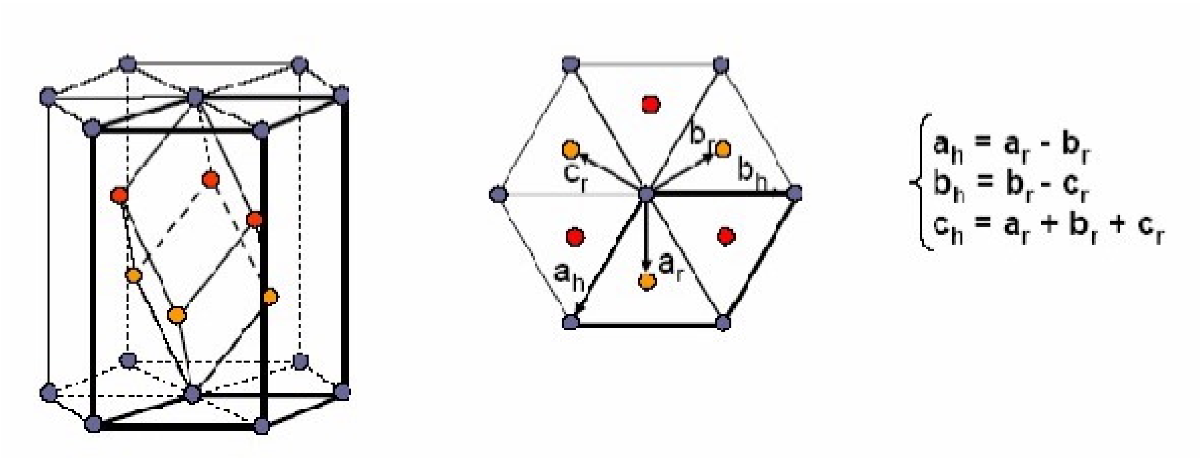

Fig. 1 – A gauche : vue en perspective de la maille hexagonale (traits noirs épais) et de la maille rhomboédrique (traits fins). A droite : projection des vecteurs de base de ces mailles dans le plan (a_h, b_h)

1. Vérifier que le choix des vecteurs $\overrightarrow{a_r}$, $\overrightarrow{b_r}$ et $\overrightarrow{c_r}$ définit bien une maille rhomboédrique, c'est-à-dire que l'égalité des normes des vecteurs et l'égalité des angles qu'ils forment entre eux sont bien respectées.
2. Déterminer la matrice de passage qui permet d'exprimer les coordonnées $\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}$ d'un atome de la maille rhomboédrique à partir des coordonnées $\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix}$ de ce même atome dans la maille hexagonale et réciproquement.
3. Application numérique : quelles sont les coordonnées dans la maille rhomboédrique de l'atome situé à $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la maille hexagonale et les coordonnées dans la maille hexagonale de l'atome situé à $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ dans la maille rhomboédrique.
4. Comparer le volume de la maille rhomboédrique à celui de la maille hexagonale.

Exercice 2 :

Soit la courbe définie dans le plan par : $\begin{cases} x(t) = & t^2 \\ y(t) = & t^3 \end{cases}$, avec t un paramètre réel.
On souhaite calculer la longueur de cette courbe entre $t = 0$ et t. On rappelle que la longueur d'un arc est donnée par l'intégrale curviligne $\mathcal{S}(t) = \int_{t=0}^{t} ds$, où ds est l'élément d'arc.

1. En coordonnées cartésiennes, $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Exprimer ds en fonction de t et dt.
2. Calculer $\mathcal{S}(t)$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit le cylindre $\mathcal{C}$ de diamètre 4 et de hauteur 5 par :

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \ ; \ 0 \leq z \leq 5\right\}$$

Soit la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.
En justifiant la réponse, calculer $\iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\ dxdydz$.
Pour cela, on propose d'effectuer un changement de variables permettant de passer du repère cartésien (x, y, z) au repère cylindrique (ρ, θ, z) comme défini ci-dessous :

$$\begin{cases} x = \rho\ \cos\theta \\ y = \rho\ \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

avec $\rho \in [0\ ; +\infty[$, $\theta \in [0\ ; 2\pi]$ et $z \in]-\infty\ ; +\infty[$.

Exercice 4 :

Soit $g(t)$ le signal périodique dépendant du temps $t \in \mathbb{R}$, de période 2, et déterminé lorsque $t \in [-1, +1]$ par $g(t) = 2t^2$.

1. Montrer que sur $[1, 3]$ le signal g est donné par la formule $g(t) = 2(t-2)^2$, que sur $[3, 5]$ le signal g est donné par la formule $g(t) = 2(t-4)^2$, etc. Dessiner $g(t)$ sur $[-10, +10]$.
2. Donner la forme générale de la série de Fourier d'une fonction f paire de période 2. Calculer explicitement la série de Fourier de g.

Exercice 5 :

On rapporte $\mathbb{R}^3$ à sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et on considère la rotation $\mathcal{R}$ d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe OA avec O l'origine de $\mathbb{R}^3$ et A le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1. On pose $\vec{OA} = \vec{e}$. Montrer que si deux vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont de norme 1, orthogonaux entre eux et à $\vec{e}$, alors $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ est une base.
2. Montrer que l'on peut trouver deux vecteurs $\vec{f_0}$ et $\vec{g_0}$ uniques de norme 1 orthogonaux entre eux et à $\vec{e}$, et tels que de plus $\vec{f}$ soit orthogonal à $\vec{k}$ (autrement dit de la forme $p\vec{i} + q\vec{j}$) et tels que la base $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ soit directe.
3. Écrire la matrice B de $\mathcal{R}$ relativement, au départ et à l'arrivée, à la base $(\vec{e}, \vec{f_0}, \vec{g_0})$.
4. Écrire la matrice C de $\mathcal{R}$ relativement, au départ et à l'arrivée, à la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.