Licence Chimie L2
Parcours Chimie
module OT3

"Outils mathématiques pour le chimiste"

Travaux Dirigés

Année universitaire 2008-2009

Table des matières

1 Algèbre linéaire

1.1 Géométrie euclidienne, vecteurs, droites, plans

Exercice 1 Rappeler la définition des coordonnées du produit vectoriel $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ et montrer que si $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ sont 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors on a :

$$(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3} + (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) \wedge \vec{V_1} + (\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}) \wedge \vec{V_2} = \vec{0}$$

Exercice 2 Toute orbitale hybride de type sp^λ peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire des orbitales s, p_x, p_y et p_z :

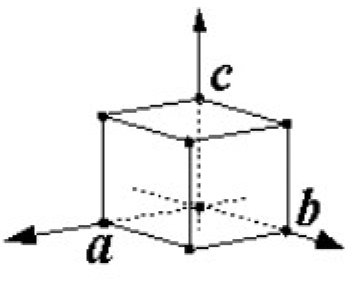
$$\Psi = C_s\ s + C_x\ p_x + C_y\ p_y + C_z\ p_z$$

Cette orbitale pointe dans la direction $C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$ où , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé. Calculer l'angle entre :

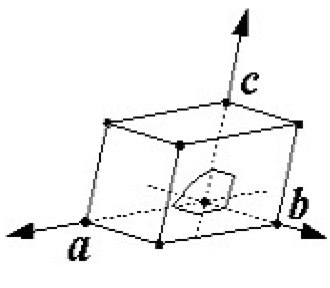
a) $\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}\ s - p_x + \sqrt{3}\ p_y)$ et $\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}\ s - p_x - \sqrt{3}\ p_y)$

b) $\frac{1}{2}(s + p_x + p_y + p_z)$ et $\frac{1}{2}(s + p_x - p_y - p_z)$

Exercice 3 Le solide se présente généralement sous une forme cristalline, c'est-à-dire que les atomes qui le constituent sont répartis de façon périodique dans les 3 directions de l'espace. On parle alors de repère cristallographique.
Les repères cristallographiques sont dans le cas le plus général constitués par des axes obliques portant des vecteurs ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) formant une base. Le volume construit à partir de ces vecteurs s'appelle la maille élémentaire.
Nous allons considérer deux repères cristallographiques différents :
repère 1 : les angles formés entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $\vec{a}$ et $\vec{c}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ valent tous 90° (maille cubique).
repère 2 : les angles formés entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $\vec{a}$ et $\vec{c}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ valent respectivement 90°, β (avec $\beta \neq 90°$) et 90° (maille monoclinique).



Repère 1



Repère 2

A- On considère dans le *repère 1* trois vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ de composantes respectives (p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2) et (p_3, q_3, r_3). Donner :

1. L'expression du produit vectoriel $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$
2. L'expression du produit mixte $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$. Montrer que le calcul du produit mixte donne le volume de la maille construite à partir des vecteurs ($\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$).
3. Quelle est la multiplicité de la nouvelle maille construite sur les vecteurs :
$\vec{V_1} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$
$\vec{V_2} = \vec{a} + \vec{b}$
$\vec{V_3} = \vec{a} + \vec{c}$

B- Répondre aux mêmes questions en travaillant dans le *repère 2*.

Exercice 4 À l'état solide, le cristal d'ozone (O_3) peut être décrit dans un repère orthogonal muni de la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Les dimensions d'une cellule unitaire sont **a** = 7,7888Å, **b** = 6,6973Å et **c** = 6,8413Å. Ceci définit un parallélépipède rectangle (maille orthorhombique).
Dans le repère orthogonal $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, les coordonnées des atomes d'oxygène, notés O_α, O_β et O_γ, d'une molécule d'ozone contenue dans la maille élémentaire formée à partir de ces vecteurs de base sont :

atome	n°	a	b	c
O	α	0,2050	0,0585	0,0648
O	β	0,1240	0,1535	0,1835
O	γ	0,0006	0,2611	0,1394

Donner les schémas de Lewis possibles de la molécule d'ozone.
Calculer l'angle $\widehat{O_\alpha O_\beta O_\gamma}$ et les distances $O_\alpha O_\beta$, $O_\beta O_\gamma$ et $O_\alpha O_\gamma$.
Sachant que les distances moyennes OO dans H_2O_2(H–O–O–H) et O_2 (O=O) valent respectivement 1,48Å et 1,20Å, que cela vous suggère-t-il pour la structure interne de la molécule d'ozone à partir des données cristallographiques ?

Exercice 5 Soient 3 points dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$:

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre le plan $\mathcal{P}$ et la droite Δ de coefficient directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par le point $D \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 La géométrie de la molécule de CH_4 est décrite par un tétraèdre régulier. Dans le repère cartésien (repère orthonormal), on se donne 4 points :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A, B, C et D sont dans $\mathbb{R}^3$ les 4 sommets d'un tétraèdre régulier $ABCD$ de côté $2\sqrt{2}$ dont on calculera le volume. On fera une figure.
   Retrouver les valeurs des angles $\widehat{HCH}$.
2. Montrer que le plan OAB rencontre le segment $[CD]$ perpendiculairement en son milieu $K\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Matrices : déterminant, inversion, diagonalisation, changement de base

Exercice 1 Soit la matrice $\mathcal{S}$ suivante.

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice $\mathcal{S}$ est inversible et déterminer la matrice inverse $\mathcal{S}^{-1}$ de deux manières différentes : (i) en appliquant directement la définition $\mathcal{S}\ \mathcal{S}^{-1} = I$, (ii) en se servant de la méthode de Cramer.

Exercice 2

1. Soit le nombre complexe j défini comme suit : $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (avec $i^2 = -1$)
   Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
   Montrer que la matrice $\mathcal{J}$ définie comme suit est inversible :
   $$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$
   Calculer $\mathcal{J}^2$, $\mathcal{J}^3$ et $\mathcal{J}^4$ et expliciter $\mathcal{J}^{-1}$.
2. On considère la matrice "circulaire" $\mathcal{K}$ définie ci-dessous :
   $$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$
   Calculer $\mathcal{J}^{-1}.\mathcal{K}.\mathcal{J} = \mathcal{D}$. Montrer que $det(\mathcal{K}) = det(\mathcal{D})$, et en déduire la résolution de l'équation suivante : $x^3 - 3bc\ x + b^3 + c^3 = 0$.
3. les valeurs de b et c étant prises comme paramètres, déterminer pour quelles valeurs de a la matrice $\mathcal{K}$ est inversible et expliciter ladite inverse.
4. Soit la matrice "diagonale" Δ définie ci-dessous :
   $$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
   Montrer qu'il existe une unique matrice circulaire $\mathcal{K}$ telle que $\mathcal{J}^{-1}.\mathcal{K}.\mathcal{J} = \Delta$. Exprimer explicitement a, b et c en fonction de α, β et γ.

Exercice 3 Une maille cristalline de volume V, est définie sur les vecteurs de base $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$. On définit une nouvelle maille basée sur les vecteurs $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}$ telle que :

$$(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})\ [\mathcal{S}_{ij}]$$

1. Trouver les matrices permettant d'exprimer les composantes d'une rangée $\vec{R}$ notée $[UVW]$ ainsi que les coordonnées X, Y, Z d'un point M relatifs à la base $(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3})$ en fonction de ceux de la base $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$.
2. Application : soit la matrice de passage $\mathcal{S}_{ij}$ définie ci-dessous, la rangée [423] et le point de coordonnées réduites $x = 0,35$; $y = 0,43$; $z = 0,13$.

$$\mathcal{S}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Le Nickel métallique cristallise dans une maille cubique à faces centrées, définie par la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ formée de vecteurs de même norme et orthogonaux. La position d'un atome quelconque de ce métal est déterminée par ses coordonnées x, y et z.

1. Exprimer les coordonnées X, Y et Z de ce même atome dans la maille rhomboédrique inscrite dans la maille cubique. On explicitera les vecteurs de base $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ associés à la nouvelle maille à partir des vecteurs de base $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$) associés à l'ancienne maille.
   On rappelle que, par définition, les angles formés entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, $\vec{c}$ et $\vec{a}$ sont tous égaux et différents de 90° et que les normes de ces vecteurs sont égales.
2. Expliciter aussi la matrice de passage de la maille rhomboédrique à la maille cubique.

Exercice 5 On donne la matrice $\mathcal{E}$ suivante exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres λ_i de $\mathcal{E}$. Pouvait-on prévoir le résultat sans calcul ?
2. Trouver les vecteurs propres ε_i de $\mathcal{E}$ et donner l'expression de $\mathcal{E}_D$, la matrice de $\mathcal{E}$ dans la base des ε_i.
3. Exprimer la matrice $\mathcal{P}$ de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base des ε_i et vérifier la relation des changements de base : $\mathcal{E}_D = \mathcal{P}^{-1}\ \mathcal{E}\ \mathcal{P}$.

Exercice 6 Dans le cas de la molécule de butadiène $CH_2 = CH - CH = CH2$, les valeurs E possibles pour l'énergie des électrons délocalisés sur l'ensemble de la molécule (électrons du système π) sont valeurs propres de la matrice $\mathcal{H}$ suivante :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où α et β sont deux nombres réels tels que $\alpha > 0$ et $\beta < 0$.

1. Ecrire l'équation aux valeurs propres de $\mathcal{H}$. En déduire les valeurs E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de l'énergie des électrons π de la molécule (On pourra de manière intermédiaire mettre β en facteur et poser $x = \frac{\alpha - E}{\beta}$. On classera les énergies E_i trouvées par valeurs croissantes.
2. Trouver le vecteur propre ψ_1 associé à la valeur propre E_1.
   Soient ψ_2, ψ_3 et ψ_4 les vecteurs propres associés respectivement à E_2, E_3 et E_4. Donner l'expression de $\mathcal{H}_D$, la matrice de $\mathcal{H}$ dans la base des vecteurs propres $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$.

1.3 Symétries et rotations dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on se donne 2 points :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Former l'équation du plan OAB et expliciter la matrice $\mathcal{S}_{AB}$ de la symétrie orthogonale relativement à ce plan.

Exercice 2 Ecrire, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'expression de la matrice 3×3 de la rotation d'angle $\pi/3$ dans le sens direct autour de l'axe $\vec{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la matrice $\mathcal{S}$ suivante :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(\mathcal{S})$ et en déduire que $\mathcal{S}$ est inversible.
2. Montrer que $\mathcal{M} = \frac{1}{3}\,\mathcal{S}$ est orthogonale directe. Montrer que $\mathcal{M}$ est une rotation d'axe passant par l'origine. Déterminer cet axe ainsi que l'angle de ladite rotation.
3. Calculer $\mathcal{S}^{-1}$, l'inverse de $\mathcal{S}$.
4. Exprimer $\mathcal{S}^n$ à l'aide des fonctions trigonométriques de $n\theta$.

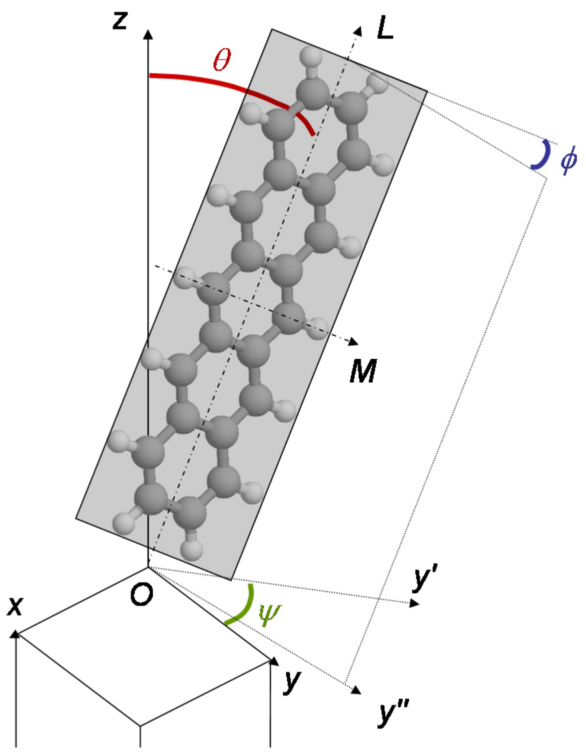
Exercice 4

1. Donner, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'expression générale de la matrice 3×3 de la rotation autour de l'axe Oz et d'angle θ.
2. Calculer le déterminant de cette matrice.
3. Donner l'expression générale de la matrice 3×3 correspondant à la symétrie par rapport au plan xOy.
4. Donner l'expression générale de la matrice 3×3 correspondant à la rotation autour de l'axe Oz et d'angle $\theta = \pi$ suivie par la symétrie par rapport au plan xOy. De quelle transformation s'agit-il ?

Exercice 5 Montrer que dans une maille cubique le produit de la rotation d'un angle $\frac{\pi}{2}$ autour de la direction Oz par la rotation d'un angle $\frac{\pi}{2}$ autour de la direction Ox est équivalent à une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour d'un axe dit *ternaire* que l'on précisera. Ce produit est-il commutatif ?

Exercice 6 Soit une molécule de pentacène, que l'on pourra assimiler à un rectangle, déposée sur le plan d'équation $z = 0$ d'un solide cubique (voir figure). Les coordonnées des atomes du cube sont repérés à l'aide de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On définit la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ orthonormée directe attachée à la molécule telle que $\vec{w}$ soit colinéaire au grand axe L de la molécule, $\vec{v}$ soit colinéaire au petit axe M de la molécule et $\vec{u}$ soit colinéaire à l'axe N avec $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$.

1. Établir la matrice de passage qui permet d'exprimer les vecteurs de base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en fonction des vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au moyen des angles d'Euler définis par la série de transformations suivante :
$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{\mathcal{R}(\vec{k},\psi)} (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}) \xrightarrow{\mathcal{R}(\vec{i}',\theta)} (\vec{i}', \vec{j}'', \vec{w}) \xrightarrow{\mathcal{R}(\vec{w},\phi)} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$
où ψ est appelé l'*angle de précession*, θ l'*angle de nutation* et ϕ l'angle de *rotation propre*.
2. La matrice de changement de base entre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donnée par la relation suivante :
$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
En déduire les angles d'orientation ψ, θ, ϕ de la molécule de pentacène par rapport au plan $z = 0$ du cube.



2 Analyse

2.1 Suites numériques

Exercice 1 Rappeler la définition d'une suite :

a) croissante non convergente

b) croissante convergente

c) convergente, ni croissante ni décroissante

d) majorée non minorée

e) bornée non convergente

On donnera un exemple de chaque cas.

Exercice 2 Trouver les limites des suites quand $n \to \infty$:

a) $u_n = \frac{n^2+1}{n^3}$ **b)** $u_n = \frac{n!}{n^2}$ $(n > 0)$ **c)** $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

d) $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ **e)** $u_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ **f)** $e^0 + e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n}$

g) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 3 On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $\forall n$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = l$

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n = l$

b) Appliquer cela à la suite (v_n) définie par le terme général : $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Exercice 4

1. Soit $(u_n)_{n\neq 0}$ la suite définie par le terme général $u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n\ (n+1)}$.
   - Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{n\ (n+1)}$ en éléments simples.
   - En déduire une autre expression de u_n en fonction de n, puis la convergence de (u_n). On précisera la limite en $+\infty$.
2. Soit (u_n) la suite définie par le terme général : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. Calculer u_n en fonction de n en utilisant le développement de $(1+n)^3$.
3. Soit $(u_n)_{n\neq 0}$ la suite définie par $u_1 > 0$ et $u_n = a\ u_{n-1} + 1$ avec a un nombre positif ou nul.
   - Calculer l'expression de u_n en fonction de n et en déduire la nature de la suite (u_n).
   - Représenter le graphe de la fonction $y = a\ x + 1$ et interpréter graphiquement les résultats trouvés.

Exercice 5

1. Montrer que la suite (u_n) définie par le terme général $\frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n}{3^n}$ est convergente en démontrant que c'est une suite de Cauchy.
2. Soit la suite définie par $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.
   – Montrer que $u_{2n} - u_n$ est minorée par $\frac{1}{2}$.
   – Utiliser le résultat pour montrer que la suite (u_n) est divergente.
3. Soit une suite de réels (u_n). On pose : $\forall n \geq 1,\ \delta_n = |u_{n+1} - u_n|$.
   – Montrer que si (u_n) converge, alors $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. La réciproque est-elle vraie ?
   – On suppose cette fois ci que $\exists\ \alpha > 1,\ \forall n \geq 1,\ \delta_n \leq \frac{A}{\alpha^n}$ ($A \geq 0$ fixé). Démontrer qu'alors (u_n) est une suite de Cauchy.
4. Soit k un réel tel que $0 \leq k < 1$ et (u_n) une suite vérifiant la condition suivante :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1} - u_n| \leq k\ |u_n - u_{n-1}|$.
   Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.

2.2 Séries, séries entières, convergence

Exercice 1

1. Soit la série définie par $S_n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n + \ldots$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de cette série en fonction des valeurs possibles pour α.
2. On pose la série de Riemann $S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ avec $\alpha \in]0\ ; +\infty[$. Étudier la nature de la série de Riemann en fonction de α. On prendra soin de distinguer les cas $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$. Dans ce deuxième cas, on utilisera le théorème de comparaison série intégrale pour prouver la convergence de la série.
3. Étudier la nature de la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$; $n > 0$ en fonction des différentes valeurs de $\alpha \in]0\ ; +\infty[$.

Exercice 2

1. Montrer que la série définie par $a_0 = 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ avec $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ converge.
2. Employer le critère de d'Alembert pour montrer la convergence de la série de terme général $a_n = \frac{n!}{n^n}$
3. Soit la série de fonctions définie par $\sum u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+x^2}$. Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Soit la série entière définie par $U_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$
   Employer le critère de d'Alembert pour prouver que le rayon de convergence de cette série s'étend à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série alternée définie par : $V_n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ converge.

Exercice 4 Rappeler la règle de Cauchy permettant le calcul explicite du rayon de convergence d'une série entière définie par $(a_n\ x^n)_{n\geq 0}$ avec a_n non nul pour tout entier n.
Calculer le rayon de convergence de la série suivante : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ (pour $|x| < 1$)

Exercice 5

1. Quand dit-on qu'une fonction f est développable en série entière à l'origine ?
2. Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2+x}$. Utiliser la formule de Taylor pour développer cette fonction en série entière au voisinage de l'origine. Expliciter son rayon de convergence.
3. Montrer que si p est un entier positif ou nul, on a quelque soit $|x| < 2$:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}$$

En déduire la somme de la série suivante :

$$S_n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

Exercice 6 Soit la fonction $f\ :\ ]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞, et définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On désire trouver un développement de cette fonction en série entière vers l'origine en utilisant la méthode des équations différentielles.

1. Montrer que la fonction $f(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
2. Soit $\varphi(x) = \sum a_n x^n$. Expliciter les coefficients a_n pour que $\varphi(x)$ soit solution de l'équation différentielle précédente.
3. Montrer que le développement de $\varphi(x)$ converge vers $f(x)$.

2.3 Séries de Fourier

Exercice 1 On considère la fonction périodique de la variable t définie comme suit :

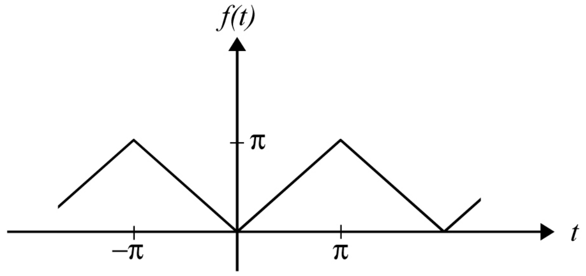
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in]0;\pi[\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = \pi \\ 0 & \text{si} \quad t \in]\pi;2\pi[\end{cases}$$

On se propose de développer $f(t)$ en une série de Fourier du type :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

1. Représenter graphiquement $f(t)$ et calculer a_0.
2. Calculer les coefficients a_n et b_n.

Exercice 2 Soit la fonction $f(t)$ de période 2π représentée ci-dessous.



Donner le développement en série de Fourier de $f(t)$. En déduire la valeur de la série suivante :

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Exercice 3 Soit la fonction 2π périodique définie par $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

1. Représenter quelques périodes de $f(x)$.
2. Calculer le développement en série de Fourier de cette fonction.
3. Utiliser le résultat pour calculer la série suivante :

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 4 Soit la fonction $f(x) = |\cos(x)|$; $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $g(x) = \frac{\pi}{2} f(x) - 1$ converge vers la série trigonométrique conjointe suivante :

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2nx)$$

3 Calcul intégral

3.1 Intégrales multiples, changement de variable

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dx\ dy$$

   D étant défini comme la partie du plan (xOy) limité par $\sqrt{x^2+y^2}=2$ et $\sqrt{x^2+y^2}=3$.
2. Calculer à nouveau cette intégrale dans le cas où D est défini comme la partie du plan (xOy) telle que $x \geq 0$ et $2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \iint_D x\sqrt{y}\ dx\ dy$$

avec D défini par $0 \leq x \leq a$ (a est un nombre réel strictement positif) et $0 \leq y \leq x^2$.

$$J = \iint_D xy\ dx\ dy$$

$$\text{et } K = \iint_D (x^2+y^2)\ dx\ dy$$

avec D défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} \leq 1$ (a et b étant 2 nombres réels strictement positifs).

$$L = \iint_D \frac{x^2}{y^2}\ dx\ dy$$

avec D défini par $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{x} \leq y \leq x$.

Exercice 3 Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 | (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) \leq 0\}$.
Calculer l'aire de D.

Exercice 4

1. En coordonnées sphériques, la fonction d'onde correspondant à l'orbitale $2p_x$ de l'atome d'hydrogène est donnée par (en unités atomiques) :

$$\Psi_{2p_x} = N\ r \times \exp\left(\frac{-\,r}{2}\right) \times \sin\theta\cos\phi$$

   Que vaut N, la constante de normalisation sachant que :

$$\iiint_V \Psi_{2p_x}^2\ dV = 1 \quad \text{où } dV \text{ est l'élément de volume ?}$$

$$\text{Remarque : on pourra utiliser le résultat suivant : } \int_0^\infty x^n e^{-qx} dx = \frac{n!}{q^{n+1}}$$

2. Pour l'atome d'hydrogène dans son état fondamental, la distance moyenne entre l'électron et le noyau est donnée par l'expression suivante :

$$< r_{1s} > = \iiint_V r \ \Psi_{1s}^2 \ dV$$

$$\text{avec } \Psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \ \exp\left(\frac{-\ r}{a_0}\right)$$

Montrer que la distance moyenne électron-noyau est égale à $\frac{3a_0}{2}$.

3.2 Intégrale curviligne, théorème de Green-Riemann

<u>**Exercice 1**</u> Soient dans $\mathbb{R}^2$, le domaine ξ délimité par le contour Γ définis par :

$$\xi = \left\{(x,y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \quad \text{et} \quad \Gamma = \left\{(x,y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

1. Calculer $\int_\Gamma (ydx - xdy)$.
2. Montrer, en utilisant la formule de Green, que : $-2 \iint_\xi dx \ dy \ = \ \int_\Gamma (ydx - xdy)$.
3. Quelle est l'aire de ξ ?

<u>**Exercice 2**</u> Soit $f \ : \ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2\right\} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable continûment deux fois.
On définit le gradient de cette fonction par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix}$$

1. Montrer, en utilisant la formule de Green, que si $\Gamma^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\right\}$ alors $\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{\text{grad}} f \ . \ \overrightarrow{dM} = 0$
2. Si Γ_1 et Γ_2 sont deux chemins reliant les points A et B dans $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, montrer que $\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}} f \ . \ \overrightarrow{dM} = \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}} f \ . \ \overrightarrow{dM} = f(B) - f(A)$.

<u>**Exercice 3**</u> L'équation en coordonnées polaires de la cardioïde (courbe ci-contre) est donnée par :
$\rho = a(1 + \cos\theta) \quad$ avec $a > 0$.

1. Calculer la longueur de la courbe.
2. Calculer l'aire délimitée par la cardioïde.