Université Paris 7 Année 2008 – 2009

TD n°1 bis MP1
Application et Images d'une partie

Rappels

Définition 1 *Une application* $f : E \to F$ *associe à tout élément* x *de* E *une image* $f(x)$ *et une seule dans* F.

Définition 2 *L'application* f *est dite injective si tout* y *de* F *a au plus un antécédent :*

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

remarque 1 *En pratique, pour montrer qu'une application est injective, on utilise souvent la contraposée, i.e :*

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Propriétés :
La composée de deux injections est une injection.
Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Définition 3 *L'application* f *est dite surjective si tout* $y \in F$ *a au moins un antécédent* x *dans* E*, i.e., si pour tout* $y \in F$ *l'équation* $f(x) = y$ *a au moins une solution.*

Propriétés :
La composée de deux surjections est une surjection.
Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Définition 4 *L'application* f *est dite bijective si tout* y *dans* F *a exactement un antécédent dans* E*. Dans ce cas, on peut définir la bijection réciproque* $f^{-1} : F \to E$ *telle que :*

$$f^{-1} \circ f = Id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F$$

Propriétés :
La composée de deux bijections est une bijection.
Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $f([0, \pi])$ et $f([\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}])$.
2. Calculer $f^{-1}([-2, 1])$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 2
Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. On suppose maintenant que f est injective. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Donner une exemple pour lequel l'inclusion du 1. est stricte.

Exercice 3
Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}+$ telle $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Déterminer des intervalles $I \subset J$ et $J \subset \mathbb{R}+$ tels que la restriction de f soit une bijection de I sur J.

Exercice 4
Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^\star$ telle que
$f(n, m) = 2^m(2m + 1)$ est une bijection.

Exercice 5
Soit $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : |m| \geqslant n\}$. On définit l'application $f(n, m) = n^2 + n + m$.

1. Montrer que f est une bijection. Trouver $f^{-1}(1000)$.
2. Construire une bijection de A sur $\mathbb{N}^2$.