Géométrie, chapitre 1, version provisoire

René Guitart

20 septembre 2008

Table des matières

Chapitre 1

Matrices et résolutions d'équations linéaires par échelonnement

1.1 La procédure fang-cheng ou rectangularisation

1.1.1 Origines

L'examen et la résolution de problèmes que nous considérons aujourd'hui comme équivalents à des systèmes de deux équations à deux inconnues, se trouve en fait tout au long de l'histoire des mathématiques, et notamment, suivant Bartel Leendert van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, New York, 1961, p. 80., chez les babyloniens. Pour ce qui est des procédures ou des instructions de manipulations résolutoires *systématiques* effectuables sur tout jeu déterminés de coefficients numériques — associés à un problème correspondant à ce qu'aujourd'hui on nomme un système d'équations linéaires —, on en trouve l'expression en Chine vers 160 avant J.-C. — évidemment sans les notations algébriques et le vocabulaire actuel ! Il s'agit du chapitre huit du traité de Zhang Cang, marquis du palais de l'empereur, élaboré d'après des documents plus anciens encore, où l'on trouve ce qui est nommé *la procédure fang-cheng* (fang = point cardinal, côté d'un rectangle, et ch'êng = chemin, modèle, réglementation ; fang cheng = modèle rectangulaire = "rectangulation"). Pour d'autres traductions possibles du terme chinois *fang-cheng*, et pour l'explication de cette procédure en suivant exactement les originaux, on se reportera à Jean-Claude Martzloff, A history of chinese mathematics, Springer, 1997 (traduction de l'édition française *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, 1987), pp. 249-258. En fait le texte de Zhang Cang ne nous est pas resté, et les deux textes mathématiques chinois les plus anciens que nous ayons sont le *Zhoubi suanjing* (Canon de calcul gnomonique de la dynastie Zhou) et le *Jiuzhang suanshu* (Prescriptions de calcul en neuf chapitres) ; la version que nous avons de ce dernier texte est due à Liu Hui. Dans l'introduction du *Jiuzhang suanshu*, introduction qu'il écrivit juste avant 260 après J.-C., Liu Hui dit que cela à été arrangé et commenté trois ou quatre siècles avant lui, par Zhang Cang et Geng Shouchang.

Le commentaire de Liu Hui est purement verbal et ne contient aucun diagramme ; mais la procédure est indiquée avec tant de détails qu'il est facile de reconstituer l'apparence des diagrammes fangcheng sur le tableau à compter.

L'idée directrice de la procédure fang-cheng, de réduire le volume des calculs à un minimum, en annulant progressivement de plus en plus de coefficients, par combinaisons de colonnes dans le tableau des coefficients du problème envisagé, est très naturelle — c'est la mise en acte de la perception du caractère linéaire des données — et, comme le pense Martzloff, elle a probablement été redécouverte plusieurs fois dans l'histoire des mathématiques. C'est par exemple le cas de Jean Borrel (Logistica, quae et Arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta, Lyon, 1559, p. 190) qui résoud par cette procédure un problème à trois inconnues.

Carl Friedrich Gauss nommait la procédure *eliminatio vulgaris*, et en occident aujourd'hui elle est appelée *algorithme de Gauss*, ou *méthode du pivot de Gauss* (En fait il faudrait mieux parler de *rectangulation & pivots*, puisque la méthode consiste d'abord à disposer en rectangle, puis à faire des "pivots").

Elle se poursuit naturellement, sous une forme complètement normalisée, par la *réduction d'une matrice à sa forme échelonnée* voire *bi-échelonné* : nous l'allons exposer plus loin, complètement, discussion des impossibilités ou des multiplicités de solutions incluse — ce qui ne figure certe pas explicitement dans le fang-cheng d'origine.

1.1.2 Règle de trois et fausse position

Avant que de parler des problèmes à plusieurs variables et équations et de la rectangularisation commençons par les problèmes linéaires à une inconnue et à une équation :

Proposition 1. *1 — Le nombre x tel que $x + b = q$ est donné par $x = q - b$.*
2 — Si $a \neq 0$, alors le nombre x tel que $ax = c$ est donné par $x = \frac{c}{a}$.
3 — Si $a \neq 0$, alors le nombre x tel que $ax + b = c$ est donné par $x = \frac{c-b}{a}$.

Nota Bene — À ce stade, et en fait pour tout ce premier chapitre, par "*nombre*" nous entendons nombre entier ou rationnel (quotient de deux entiers affecté d'un signe), voire nombre réel (comme défini plus loin p.**??** comme "nombre à virgule"). Le travail avec des matrices à coefficients complexes ou dans un corps commutatif quelconque sera fait plus loin (p. **??**). Toutefois on trouvera dès ce premier chapitre une introduction des nombres complexes (prop 1.16, p.21) et même des quaternions (prop 1.24, p. 24) considérés comme des matrices à coefficients réels.

Exercice 1. *1 — Sachant que l'épicier vend 2 euro le kilo d'orange qui lui est revenu à 1 euro 60, combien de bénéfice fait-il si je lui achète une orange de 250 g ?*
2 — Mettre le problème en équation et le résoudre par l'algèbre.

C'est en principe ce que sait faire un élève de dix ans sortant de l'école primaire. En fait il sait la chose sous forme non-littérale donc, sous forme de deux règles qui lui permettent d'affirmer d'un côté que puisque le prix de vente est le prix de revient plus le bénéfice, c'est que le bénéfice est le prix de vente moins le prix de revient, et d'un autre côté que si un kilo d'orange est vendu 2 euro, alors une orange de 250 grammes est vendu 50 centimes d'euro. Par suite si le kilo revient au commerçant à 1 euro 60, le bénéfice qu'il fait sur l'orange est de 10 centimes.

Au collège on apprend le langage algébrique et l'écriture littérale, la mise en équation de ces problèmes, et les principes de la proposition ci-dessus pour résoudre : si B est le bénéfice par kilo et b le bénéfice demandé, on a, en centimes d'euro, $B = 200 - 160$ et $b = \frac{B \times 250}{1000}$. la première équation donne $B = 40$, puis en reportant dans la seconde, $B = \frac{40 \times 250}{1000} = 10$.

En fait l'équation-clé $b = \frac{B \times 250}{1000}$, dite *règle de trois*, s'écrit aussi $\frac{b}{B} = \frac{250}{1000}$, et alors est dite *règle de proportionalité*, ou s'écrit encore $b = \frac{250}{1000} B$, et est alors nommée règle de linéarité, la fraction $\frac{250}{1000} = k$ étant le coefficient de proportionalité de la relation linéaire $b = kB$.

Exercice 2. *Un sac contient 154 euro, en pièces de 5 euro et de 2 euro ; il y a 41 pièces, trouver le nombre de pièces de 5 euro. D'abord par l'algèbre, puis sans algèbre.*

Par l'algèbre, on poserait x le nombre de pièces de 5 euro, de sorte que $41 - x$ serait le nombre de pièces de 2 euro, et que l'on aurait l'équation $5x + 2(41 - x) = 154$, d'où $3x = 154 - 82 = 72$, et $x = 24$. Sans algèbre, on peut procéder par le raisonnement suivant : si toutes les pièces étaient de 2 euro, le sac ne contiendrait que 41×2 ou 82 euro, tandis qu'il en contient 154 : la différence est de 72 euro. Or chaque fois que l'on remplace une pièce de 2 feuro par une pièce de 5 euro le nombre total des pioèces ne change pas, mais la somme augment de 3 euro. Comme il faut augmenter la somme de 72 euro, il faudra remplacer autant de pièces de 2 euro par des pièces de 5 euro que 3 est contenu de fois dans 72, c'est-à-dire 24 fois : il y a alors 24 pièces de 5 euro.

Cette manière de faire ne demandant donc pas l'usage d'algèbre s'appelle usuellement aujourd'hui la *méthode de fausse position*. Toutefois au cours de l'histoire elle s'est appelée aussi "règle du trop et du pas assez", "opération par un nombre d'essai", "règle de l'augmentation et de la diminution", "méthode des plateaux". Elle se comprend, sous forme algébrique, ainsi :

Proposition 2. *Si un problème revient à une équation $ax = b$, alors on suppose que pour x soit prise quelconque une valeur x', dite* fausse position*, conduisant à la valeur $ax' = b'$, et on en déduit que la bonne valeur de x est telle que $\frac{x}{x'} = \frac{b}{b'}$, c'est-à-dire qu'elle s'obtient par la règle de trois*

$$x = \frac{bx'}{b}.$$

Voici en exercice un problème indien de Bhāskara, extrait du Lī̄lāvati (XIIème siècle après Jésus-Christ) :

Exercice 3. *Quel est le nombre qui, multiplié par cinq, après soustraction du tiers du produit et division par dix du reste et addition d'un tiers, d'une moitié et d'un quart de la quantité d'origine donne deux de moins que soixante-dix ?*

Bhāskara résoud par fausse position : on suppose que la valeur de x soit $x' = 3$, on fait les opérations indiquées, on trouve $\frac{17}{4}$, et on en déduit que la vraie valeur est $x = \frac{3\times 68}{\frac{17}{4}}$. Bien sûr, aujourd'hui on peut évidemment résoudre par l'algèbre, le problème d'algèbre correspondant étant $\frac{1}{10}\left[5x - \frac{1}{3}(5x)\right] + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 70 - 2$.

Exercice 4. *1 — La méthode de* double fausse position *pour résoudre $ax + b = cx + d$, consiste à prendre deux fausses positions x' et x'' produisant des "erreurs" : $e' = (ax' + b) - (cx' + d)$ et $e'' = (ax'' + b) - (xc'' + d)$. Alors la solution est*

$$x = \frac{x'e'' - x''e'}{e'' - e'}.$$

2 — Si l'on choisit $x'' = x' - 1$, alors $x = x' + \frac{e'}{e''-e'}$

Exercice 5. *1 — Il importe de bien réaliser que les méthodes de simple ou doubles fausses positions se justifient et s'appliquent bien avant l'invention de l'algèbre. Leur compréhension préalable directe à la manière ancienne sera un excellent point d'appui pour ensuite seulement s'introduire aux pratiques algébriques. À cet effet on fera l'exercice de lire le problème suivant et sa solution, par Reynaud (1810), et de comprendre sans algèbre.*

Un joueur, interrogé sur ce qu'il a dans sa bourse, répond que l'excès du quintuple de ses louis sur 30 est égal à l'excès du double de ces mêmes louis sur 6.

On se propose de découvrir le nombre des louis du joueur. Pour résoudre cette question nous donnerons une valeur arbitraire au nombre des louis ; si ce nombre satisfait à toutes les conditions du problème ; il en donnera la solution ; s'il n'y satisfait pas, il produira une certaine erreur, que nous détruirons ensuite à l'aide d'une seconde hypothèse. Voici le détail du calcul, suivi de l'explication.

En vertu de la 1ère hypothèse, si le nombre des louis était 20, l'excès de leur quintuple sur 30 serait 70, et l'excès de leur double sur 6 serait 34 ; or ce 2ème excès est au-dessous du 1er de 36, tandis qu'il devrait lui être égal ; l'hypothèse 20 louis produit donc une erreur de 36. Pour apercevoir comment on peut détruire cette erreur, nous diminuerons d'un le nombre 20 des louis, ce qui le réduira à 19 ; cette 2ème hypothèse, traitée comme la 1ère, donnera 33 pour 2ème erreur ; mais la 1ère erreur 36, était de 3 plus forte ; on dira donc : comme pour diminuer la 1ère erreur 36 de 3 il a fallu diminuer d'un la 1ère hypothèse 20, pour détruire cette 1ère erreur 36, ce qui revient à la diminuer de 36, ou de 12 fois 3, il faut diminuer de 12 fois 1 la 1ère hypothèse 20, ce qui la réduit à 8. Le joueur a donc 8 louis.

2 — Exprimer la résolution en utilisant l'algèbre pour suivre l'explication.

3 —Utiliser directement la formule de l'exercice précédent.

1.1.3 Premier exemple de rectangulation & pivots

Suivant l'esprit et la lettre de l'époque du *Jiuzhang suanshu*, Martzloff expose le cas suivant (Jiuzhang suanshu, problème 8), qui sera notre premier exercice :

Exercice 6. *Supposons que nous ayons 3 mesures de très bonne céréale, 2 de moyenne, et 1 de mauvaise, ce qui représente 39* dou *; supposons que nous ayons 2 mesures de très bonne céréale, 3 de moyenne, et 1 de mauvaise, ce qui représente 34* dou *; supposons que nous ayons 1 mesure de très bonne cérérale, 2 de moyenne, et 3 de mauvaise, ce* *qui représente 26* dou. *Question : combien de* dou *représentent 1 mesure de très bonne cérérale, 1 mesure de moyenne céréale, 1 mesure de mauvaise céréale, respectivement ?.*

Ici la procédure fangcheng va comme suit. D'abord on inscrit les coefficients (ici, pour rendre le texte plus aisé à lire, on utilise les chiffres arabes !) en un tableau comme ceci : $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$ où la colonne de droite correspond à la première condition, celle du milieu à la deuxième, et celle de gauche à la troisième. Ensuite, Liu Hui dit que l'on doit utiliser les céréales au sommet de la colonne de droite pour multiplier tous les termes de la colonne centrale, puis procéder à une succession de soustraction de la colonne de droite dans la colonne du centre que l'on vient de multiplier, jusqu'à élimination du terme au sommet. La suite des manipulations est donc :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}.$$

L'étape suivante est analogue, en vue d'éliminer le nombre au sommet de la colonne de gauche :

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 3 & & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}.$$

On continue en éliminant le nombre au sommet de la nouvelle colonne de gauche, à l'aide, cette fois, de la colonne centrale :

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 39 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}.$$

Alors le tableau étant réduit à cette forme triangulaire, on obtient la première des réponses comme valant $\frac{99}{36} = \frac{11}{4}$, et puis on trouve les secondes et troisièmes par substitutions successives : $\frac{24-1\frac{99}{36}}{5} = \frac{153}{36} = \frac{17}{4}$, et $\frac{39-2\frac{153}{36}-1\frac{99}{36}}{3} = \frac{333}{36} = \frac{37}{4}$.

De nos jours on poserait tb = prix ou nombre de dou d'une mesure de très bonnes céréales, m = prix des moyennes, M = prix des mauvaises, et on mettrait le problème en équations : $\begin{cases} 3tb + 2m + 1M = 39 \\ 2tb + 3m + 1M = 34 \\ 1tb + 2m + 3M = 26 \end{cases}$. La résolution consiste alors à remplacer la seconde équation par son produit par le coefficient de tb dans la première, qui est 3, et puis à retirer autant qu'on peut, soit 2 fois, la première équation à la nouvelle seconde. Alors dans la nouvelle seconde le coefficient de tb est devenu 0, et le système est $\begin{cases} 3tb + 2m + 1M = 39 \\ 0tb + 5m + 1M = 24 \\ 1tb + 2m + 3M = 26 \end{cases}$, etc. On aboutit au système triangulaire $\begin{cases} 3tb + 2m + 1M = 39 \\ 0tb + 5m + 1M = 24 \\ 0tb + 0m + 36M = 99 \end{cases}$. Alors la "règle de trois" donne $M = \frac{99}{36}$, et remontant la cascade des équations on reporte dans la précédente, ce qui donne $5m + \frac{99}{36} = 24$, d'où $m = \frac{1}{5}(24 - \frac{99}{36})$, etc. Autrement dit, afin de préparer l'application d'une succession de "règles de trois ", on use plusieurs fois du principe suivant (qui vient donc compléter la résolution de $ax + b = c$ par $x = \frac{c-b}{a}$) :

Proposition 3. *Soit à résoudre le système d'équations* $\begin{cases} ax + by + \cdots = c \\ a'x + b'y + \cdots = d \end{cases}$ *; on multiplie* $a'x + b'y + \cdots = c'$ *par* a*, ce qui donne* $aa'x + ab'y + \cdots = ac'$*, et l'on retire de cette dernière* a' *fois la première* $ax + by + \cdots = c$ *: il vient le nouveau système :* $\begin{cases} ax + by + \cdots = c \\ 0x + (ab' - a'b)y + \cdots = ac' - a'c \end{cases}$.

Ultérieurement, en exercice 1.44, p.32, on reprendra l'analyse de cet exemple et l'analyse des mouvements de résolution en terme de multiplication par des matrices élémentaires.

1.1.4 Le problème des bœufs du Soleil, d'Archimède

Il s'agit d'un problème qu'Archimède, au troisième siècle avant Jésus-Christ, aurait inventé et mis sous forme d'épigramme dans une lettre à Eratosthène de Cyrène. On ne connaît en fait ce texte que depuis 1773, publié par Gotthold Ephraim Lessing d'après un manuscrit grec de la bibliothèque Herzog August à Wolfenbüttel en Allemagne. Le voici en exercice, dans le texte figurant dans (*Les Œuvres complètes d'Archimèdes* (trad. de Paul Ver Eecke), éd. Vaillant-Carmanne S. A., tome II, p. 545-547).

Exercice 7. *Dans son* problème des bœufs du Soleil*, Archimède pose deux questions successives — que nous reproduisons ci-après, la seconde étant beaucoup plus difficile. On demande de traduire la première en langage algébrique moderne et de la résoudre, en valeurs entières posiitives. On montrera que le total des bovins est un multiple de* 50389082*. Pour la seconde question on demande de la traduire en langage algébrique, jusqu'à montrer qu'elle équivaut à résoudre en nombres entiers positifs l'équation* $y^2 - Cx^2 = 1$ *où* $C = 410286423278424$*. sans résoudre cette équation constater que si le problème d'Archimède a une solution, le nombre total de bovins est plus grand que* 10^{14}.

1 — Ami, si tu as la sagesse en partage, apporte grand soin à calculer à combien s'élevait la multitude des bœufs du Soleil qui, jadis, dans les plaines de l'île de la Sicile Thrinacienne, paissaient, répartis en quatre troupeaux de couleurs différentes, l'un blanc de lait, l'autre d'un noir luisant, le troisième brun et le quatrième tavelé. Il y avait dans chaque troupeau un nombre considérable de taureaux répartis dans les proportions suivantes : imagine, mon ami, que les blancs étaient en nombre égal à la moitié augmentée du tiers des taureaux noirs, et augmentée de tous les bruns, tandis que les noirs étaient en nombre égal aux quatrième et cinquième parties des tavelés, accrues de tous les bruns. Considère, d'autre part, que les tavelés, restants, étaient en nombre égal aux sixième et septième parties des blancs, accrues de tous les bruns. Les vaches étaient réparties de la manière suivante : Les blanches étaient en nombre précisément égal aux troisième et quatrième parties de tout le troupeau noir, tandis que les noires étaient de nouveau en nombre égal aux quatrième et cinquième parties des tavelées qui étaient toutes venues paître en compagnie des taureaux [c'est-à-dire en compagnie des taureaux tavelés ; donc le nombre des vaches noires est égal aux quatrième et cinquième parties de l'ensemble des vaches et des taureaux tavelés]. Les tavelées étaient, d'autre part, en nombre égal aux cinquième et sixième parties de tout le troupeau brun, tandis que les brunes étaient en nombre égal à la moitié de la troisième partie accrue de la septième partie du troupeau blanc.

Ami, si tu me dis exactement combien il y avait de bœufs du Soleil, quel était en particulier le nombre des taureaux gras et en particulier le nombre des vaches pour chacune des couleurs, on ne te qualifiera ni d'ignorant ni de malhabile en matière de nombres ;

2 — mais tu ne pourras cependant pas encore compter parmi les savants. Dès lors, observe encore les diverses manières dont les bœufs du Soleil étaient disposés : lorsque les taureaux blancs joignaient leur multitude aux noirs, ils se maintenaient en un groupe compact ayant la même mesure en profondeur qu'en largeur, et ce carré remplissait entièrement les immenses plaines de la Thrinacie. D'autre part, les bruns et les tavelés réunis, sans que les taureaux d'autres couleurs fussent présents ou sans qu'ils manquassent, étaient groupés de telle sorte que, le premier rang étant constitué par un seul, ils formaient graduellement une figure triangulaire.

Ami, si tu trouves toutes ces choses de pair, et si, en un mot, concentrant tes esprits, tu exprimes toutes les mesures de ces multitudes, va, te glorifiant d'avoir remporté la victoire, et persuadé que l'on te juge complètement consommé dans cette science.

La première question de l'énoncé fait intervenir, pour le dire et l'écrire en langage moderne, huit inconnues entières positives dans sept équations : soit B, N, B', T les nombres de taureaux blancs, noirs, bruns, tavelés, et soit b, n, b', t les nombres de vaches blanches, noires, brunes, tavelées. Les conditions exprimées se traduisent par le système :

$$\begin{cases} B = (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})N + B' \\ N = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})T + B' \\ T = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})B + B' \end{cases} \quad \& \begin{cases} b = (\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(N+n) \\ n = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(T+t) \\ t = (\frac{1}{5}+\frac{1}{6})(B'+b') \\ b' = (\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{7})(B+b) \end{cases} .$$

Ce problème admet une infinité de solutions en nombres entiers positifs, fonction d'un paramètre entier q, comme nous allons voir. Stricto sensu, pour faire l'exercice il suffit de connaître la règle de trois et son complément basique la méthode de rectangulation, et aussi la décomposition des nombres en facteurs premiers et le fait que si p est premier et si b et c sont des entiers tels que p divisebc et ne divise pas b, alors p divise c ; mais il faut aussi du temps et de l'attention pour calculer juste.

Il s'agit de résoudre *en entiers positifs* le système linéaire, qui s'écrit encore :

$$\begin{cases} +6B & -5N & -6B' & & & & & & = 0 \\ & 20N & -20B' & -9T & & & & & = 0 \\ -13B & & -42B' & +42T & & & & & = 0 \\ & -7N & & & +12b & -7n & & & = 0. \\ & & & -9T & & +20n & & -9t & = 0 \\ & & -11B' & & & & -11b' & +30t & = 0 \\ -13B & & & & -13b & & +42b' & & = 0 \end{cases}$$

Avec T comme paramètre provisoire, les trois premières équations s'écrivent $\begin{cases} +6B & -5N & -6B' & = 0 \\ & 20N & -20B' & = 9T \\ -13B & & -42B' & = -42T \end{cases}$.

On trouve, par exemple par rectangularisation, $B = \frac{1113}{790}T = \frac{3.7.53}{2.5.79}T$, $N = \frac{801}{790}T = \frac{3^2.89}{2.5.79}T$, $B' = \frac{891}{1580} = \frac{3^4.11}{2^2.5.79}T$, où les fractions sont bien irréductibles. Comme on veut des entiers il faut que T soit un multiple de 1580, soit $T = 1580k$, k entier positif quelconque, et alors on a $B = 2226k$, $N = 1602k$ et $B' = 891k$. On reporte ces valeurs dans les quatre dernières équations et il vient le système où k est donc un paramètre entier a priori quelconque, mais qui ensuite devra être tel que les solutions soit entières positives :

$$\begin{cases} +12b & -7n & & & = 7\times 1602k \\ & 20n & & -9t & = 9\times 1580k \\ & & -11b' & +30t & = 11\times 891k \\ -13b & & +42b' & & = 13\times 2226k \end{cases} .$$

Par substitutions successives : $b = \frac{7}{12}N + \frac{7}{12}n = \frac{7}{12}N + \frac{7}{12}(\frac{9}{20}T + \frac{9}{20}t) = \frac{7}{12}N + \frac{63}{240}T + \frac{63}{240}t = \frac{7}{12}N + \frac{63}{240}T + \frac{63}{240}(\frac{11}{30}B' + \frac{11}{30}b') = \frac{7}{12}N + \frac{63}{240}T + \frac{693}{7200}B' + \frac{693}{7200}b' = \frac{7}{12}N + \frac{63}{240}T + \frac{693}{7200}B' + \frac{693}{7200}(\frac{13}{42}B + \frac{13}{42}b)$, et donc $\left(1 - \frac{693\times 13}{7200\times 42}\right)b = \frac{7}{12}N + \frac{63}{240}T + \frac{693}{7200}B' + \frac{693\times 13}{7200\times 42}B$, soit $(7200\times 42 - 693\times 13)b = 7\times 42\times 600N + 63\times 42\times 30T + 693\times 42B' + 693\times 13B$, ce qui, compte tenu de ce que $7200\times 42 - 693\times 13 = 4657\times 63$, devient $4657b = 2800N + 1260T + 462B' + 143B$. Si l'on remplace N, T, B' et B par leurs valeurs, cela devient $b = \frac{7206360}{4657}k$, et, puisque 4657 est premier, pour que b soit entier il faut et il suffit que k soit un multiple de 4657, soit $k = 4657q$,et donc il vient $b = 7206360q$, q étant un entier quelconque. Ensuite, connaissant b, on trouve successivement n, t et b' : $n = \frac{12}{7}B - N = 4893246q$, $t = \frac{20}{9}n - T = 3515820q$, $b' = \frac{30}{11}t - B' = 5439213q$, et ces nombres sont bien entiers.

On a trouvé $B = 2226\times 4657q$, $\quad N = 1602\times 4657q$, $\quad B' = 891\times 4657q$, $\quad T = 1580\times 4657q$, donc on a :

$$B = 10366482q, \quad N = 7460514q, \quad B' = 4149387q, \quad T = 7358060q,$$

$$b = 7206360q, \quad n = 4893246q, \quad b' = 5439213q, \quad t = 3515820q.$$

et le total est : $50389082q$.

La seconde question de l'énoncé impose deux conditions supplémentaires :

$$\begin{cases} B + N = \text{nombre entier positif carré} = m^2 \\ B' + T = \text{nombre entier positif triangulaire} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \end{cases},$$

soit en reportant $B + N = 2226k + 1602k = 3828k = 3828 \times 4657q = 17826996q$, et $B' + T = 891k + 1580k = 2471k = 2471 \times 4657q = 11507447q$, les conditions : $\begin{cases} 17826996q = m^2 \\ 11507447q = \frac{n(n+1)}{2} \end{cases}$. Si on décompose en facteurs premiers $17826996 = 3 \times 11 \times 29 \times 4657$, la première condition $3 \times 11 \times 29 \times 4657q = n^2$ revient à $q = 3 \times 11 \times 29 \times 4657x^2$, et alors pour satisfaire aux deux il faut trouver x et n entiers tels que $11507447 \times 3 \times 11 \times 29 \times 4657x^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, soit : $102571605819606x^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, ou bien encore :

$$3 \times 7 \times 11 \times 29 \times 353 \times (4657)^2 x^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si l'on tient compte de ce que $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{8}((2n+1)^2 - 1)$, cette équation devient, en posant $2n + 1 = y$, entier impair : $8 \times 3 \times 7 \times 11 \times 29 \times 353 \times (4657)^2 x^2 = y^2 - 1$. Ainsi le problème se ramène, en posant

$$C = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 29 \times 353 \times (4657)^2 = 410286423278424,$$

à trouver deux entiers x et y tels que

$$y^2 - Cx^2 = 1.$$

Éventuellement on remarquera que $C = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 29 \times 353 \times (2 \times 4657)^2$, soit $C = 4729494(9314)^2$, et on aura une solution de $y^2 - Cx^2 = 1$ en cherchant une solution de $y^2 - 4729494x^2 = 1$ telle que x soit un multiple de 9314.

Si (x, y) est solution de $y^2 - Cx^2 = 1$, alors on prend $q = 17826996x^2$, et notamment le nombre total de bœufs est $50389082 \times 17826996x^2$. Sans même résoudre l'équation $y^2 - Cx^2 = 1$ on voit déjà que si le problème a une solution elle est plus grande que 10^{14}. En fait il y en a une, mais bien plus grande que cela ! mais pour l'instant nous retenons donc le résultat suivant :

Fin de l'exercice (conclusion provisoire du problème) : La solution minimal pour le nombre total de bœufs est $50389082 \times 17826996x^2$, où x est le plus petit entier tel qu'il existe un entier y avec $y^2 - 410286423278424x^2 = 1$.

En 1965 H. C. Williams, R. A. German, and C. R. Zarnke (Solution of the cattle problem of Archimedes, Mathematics of Computation, vol. XIX (1965), 671-674) ont annoncé une solution complète du problème, le résultat étant déposé sur les Unpublished Mathematical Table du journal. En 1981, Harry L. Nelson a publié (A solution to Archimedes cattle problem, Journal of recreational Mathematics, vol. 13 (1980-81), 162-176) la plus petite solution pour le nombre total de bœufs, soit un nombre "astronomique" dont l'écriture comporte 206545 chiffres et s'écrit 7760271406 . . . 9455081800. On peut donc *la voir* intégralement imprimée sur environs 70 pages. Pour *la dire* (en énoncer les chiffres) cela demanderait quelques jours. Et encore nous travaillons avec notre écriture décimale des nombres, dont ne disposait pas Archimède et ses contemporains. Même le système de notations des grands nombres d'Archimède semble peu praticable dans ces ordres de grandeurs. Et puis, sachant que la Sicile a une surface d'environ 25708 km^2, on pourra calculer la place laissée à chaque bœuf !

1.1.5 Exemples simples anciens et modernes

Voici, extrait encore du *Jiuzhang suanshu* par Pierre Gabriel (*Matrices, géométrie, algèbre linéaire*, Cassini, Paris, 2001, p. 607), un sujet de concours d'entrée à l'école mandarinale supérieure T'ai-hsueh de Xi'an (époque Han, 123 avant J.-C), avec 5 conditions pour 5 inconnues :

Exercice 8. *Les candidats devront résoudre : 9 boisseaux de chanvre, 7 de froment, 3 de haricots, 2 de fèves et 5 de millet coûtent 140 pièces de monnaie, 7 boisseaux de chanvre, 6 de froment, 4 de haricots, 5 de fèves et 3 de millet coûtent 128 pièces de monnaie, 3 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 7 de haricots, 6 de fèves et 4 de millet coûtent 116 pièces de monnaie, 2 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 3 de haricots, 9 de fèves et 4 de millet coûtent 112 pièces de monnaie, 1 boisseau de chanvre, 3 de froment, 2 de haricots, 8 de fèves et 5 de millet coûtent 95 pièces de monnaie. Combien coûte un boisseau de chaque denrée ?.*

Et voici un problème que l'on trouve dans l'*Arithmétique pratique* de Clavius de 1583 :

Exercice 9. *On cherche trois nombres tels que le premier, ajouté à 73, fasse le double des deux autres ; le second, avec 73, fasse le triple des deux autres, le troisième enfin, avec 73, fasse le quadruple des deux autres.*

On trouvera 7, 17 et 23.

On trouvera dans David C. Lay (*Algèbre linéaire. Théorie, exercices & applications*, de boeck, 2004) de nombreux problèmes linéaires concrets d'aujourd'hui qui fondamentalement demandent essentiellement la même procédure de rectangularisation. Voici des exemples simples en exercices.

Exercice 10. *On sait que, pour 100 g, le lait écrémé fournit 36 g de protéines, 52 g d'hydrates de carbone et 0 grammes de lipides, que la farine de soja fournit 51 g de protéines, 34 g d'hydrates de carbones et 7 g de lipides, que le petit-lait fournit 13 g de protéines, 74 g d'hydrates de carbone et* $1,1$ *g de lipides, on demande de déterminer une combinaison de lait écrémé, de farine de soja et de petit-lait qui fournissent les quantités requises par le régime basses calories dit "de Cambridge" (en vogue vers 1980), à savoir 33 g de protéines, 45 g d'hydrate de carbone, 3 g de lipides.*

On montrera qu'il faut $27,7$ *g de lait écrémé,* $39,2$ *g de farine de soja, et* $23,3$ *g de petit lait.*

Exercice 11. *Considérons l'économie de trois secteurs : charbon, électicité, acier, dans laquelle chaque secteurs distribue sa production ou "output" entre lui-même et les deux autres, et reçoit son "input" de lui-même et des deux autres : pour les outputs, le charbon fournit de sa production 0% au charbon, 60% à l'électricité, 40% à l'acier, l'électricité fournit de sa production 40% au charbon, 10% à l'électicité, 50% au charbon, et l'acier fournit de sa production 60% au charbon, 20% à l'electicité et 20% à l'acier ; quand aux inputs ou besoins, le charbon reçoit 0% de la production du charbon, 40% de la production de l'électricité, 60% de la production de l'acier, l'électicité re c coit 60% de la production du charbon, 10% de la production de l'électricté, 20% de la production de l'acier, et l'acier reçoit 40% de la production du charbon, 50% de la production de l'électricité, et 20% de la production de l'acier.*

On demande de déterrminer les prix des productions totales du charbon, de l'électricité et de l'acier qui permette l'équilibre du syst me, c'est-à-dire, pour chaque secteur l'égalité des recette et des dépenses.

On montrera que si le prix de la productions d'acier est 100 millions d'euros, alors le prix de la production de charbon doit être de 94 millions d'euros, et celui de la production d'électricité de 85 millions d'euros.

Exercice 12. *On sait que le propane* C_3H_8 *interagit avec l'oxygène* 0_2 *pour former du dioxyde de carbone* CO_2 *et de l'eau* H_2O*.*

1 — On demande de pondérer ou équilibrer l'équation de réaction combustion du propane : $aC_3H_8 + bO_2 \to cCO_2 + dH_2O$*, c'est-à dire de trouver les coefficients entiers a, b, c et d tels que figure dans chaque membre les mêmes nombre d'atomes de chaque corps purs C, H et O. On trouvera* $C_3H_8 + 5O_2 \to 3CO_2 + 4H_2O$*.*

2 — Équilibrer la réaction : $B_2S_3 + H_20 \to H_3BO_3 + H_2S$*.*

3 — Équilibrer la réaction : $Na_3PO_4 + Ba(NO_3)_2 \to Ba_3(PO_4)_2 + NaNO_3$*.*

1.2 Matrices de systèmes linéaires : opérations, partitions, inversions.

Un ouvrage de référence aujourd'hui sur les matrices est celui de F. R. Gantmacher (*The theory of matrices*, vol. I & II, Chelsea, 1959, 1960, 1977, translate from russian by K. A. Hirsch.), où l'on trouvera de plus les références de

67 livres ou monographies et de 296 articles sur le sujet, et une bonne idées des travaux sur le sujet jusqu'aux années 1960.

Le nom de *matrice* pour désigner un tableau rectangulaire de nombres, fut inventé en 1850 par James Joseph Sylvester [1814-1897] *Collected Math. Papers*, 1, 145-51, 1850. En 1855, Arthur Cayley [1821-1895] introduisit — idées décisives — les produits de matrices et les matrices inversibles (*Collected papers*, 2, p. 185-88, 1955, puis 2, 475-96, 1858.), et, par là, l'algèbre *abstraite* des matrices considérée *per se* et logiquement, en particulier en aval de la théorie des déterminants déjà bien développée à ce moment. Historiquement l'algèbre abstraite des matrices *couronne* la théorie des déterminants, et cette théorie des matrices sera elle-même ensuite comprise dans celle des *espaces vectoriels* et des *algèbres*.

Les problèmes qui reviendraient à la résolution de systèmes d"equations linéaires peuvent très bien se résoudre sans théorie des espaces vectoriels, et même sans algèbre matricielles, voir sans algèbre, sans notations littérales pour les inconnues, sans équations, comme nous venons de le voir dans la pratique chinoise. Mais pour celui à qui la notion d'inconnues et d'équations est familière, il est naturel d'en emprunter maintenant l'écriture. Le seul inconvénient aujourd'hui — dont on est donc bien prévenu — serait de croire, du coup, que la mathématique chinoise ancienne était déjà de l'algèbre au sens moderne, qu'ils avaient la notion d'équation d'aujourd'hui, etc ! Dans les années 1950, un moment crucial de la formation mathématique élémentaire en France était précisément celui où, après avoir appris les procédures arithmétiques et comptables à l'école primaire, on expliquait comment tout cela pouvait se faire aussi, plus uniformément et donc plus aisément, par l'algèbre, où par exemple les variétés de la règle de trois étaient repensées dans les transformations de l'équation $mx = b$. Avec les notations et les règles de constructions et calculs des matrices et équations matricielles, on arrive à une modification semblable à partir de la procédure fang-cheng, qui est repensé alors comme un algorithme pour transformer et résoudre les équations matricielles $MX = B$.

Un *système linéaire* de l équations à c inconnues à coefficients et données des nombres est un système de la forme :

$$\begin{array}{rl}
M_{1,1}X_1 + M_{1,2}X_2 + \ldots + M_{1,j}X_j + \ldots + M_{1,c}X_c & = B_1 \\
M_{2,1}X_1 + M_{2,2}X_2 + \ldots + M_{2,j}X_j + \ldots + M_{2,c}X_c & = B_2 \\
\ldots & \\
M_{i,1}X_1 + M_{i,2}X_2 + \ldots + M_{i,j}X_j + \ldots + M_{i,c}X_c & = B_i \\
\ldots & \\
M_{l,1}X_1 + M_{l,2}X_2 + \ldots + M_{l,j}X_j + \ldots + M_{l,c}X_c & = B_l
\end{array}$$

On considère les $B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_l$ comme des données, et les $X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_c$ comme des inconnues. Les nombres $M_{i,j}$ sont appellés les coefficients, et leur spécification simultanée s'appelle la *matrice* du système. Le problème est donc, les $M_{i,j}$ et les B_i étant connus, de trouver les X_j.

Exercice 13. *Constater que le problème ci-avant cité de l'école T'ai-hsueh (p. 12), s'écrit :*

$$\begin{array}{rcr}
9X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 2X_4 + 5X_5 & = & 140 \\
7X_1 + 6X_2 + 4X_3 + 5X_4 + 3X_5 & = & 128 \\
3X_1 + 5X_2 + 7X_3 + 6X_4 + 4X_5 & = & 116 \\
2X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 9X_4 + 4X_5 & = & 112 \\
1X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 8X_4 + 5X_5 & = & 95
\end{array}$$

1.2.1 Définition des matrices, colonnes, lignes, transposition, sommes, produit par scalaire

Définition 1. *On définit une* matrice *M à l lignes et c colonnes, ou de type $l \times c$, — pour l et c deux entiers —, comme une donnée d'un tableau rectangulaire de nombres $M_{i,j}$, — tableau ouvert et fermé par des parenthèses, comportant c colonnes et l lignes, avec, à la place (i, j), c'est-à-dire au point de concours de la ligne i et de la colonne j, le nombre*

$M_{i,j}$ *(le premier indice i est dit* indice de ligne *et le second est dit* indice de colonne*) — soit de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,c} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{l,1} & M_{l,2} & \dots & M_{l,c} \end{pmatrix}.$$

Quand on écrit effectivement le tableau, les indices i et j sont optionnels, pour rappeler donc la place du nombre $M_{i,j}$*.*
Vue comme une double liste, la matrice M sera aussi notée brièvement $M = (M_{i,j})_{1\le i\le l, 1\le j\le c}$*.*

Si $l = c = d$*, au lieu de parler de matrice de type* $d \times d$ *on dira plutôt* matrice carrée de dimension d.

Si besoin est on notera $l = \mathrm{lig}(M)$*,* $c = \mathrm{col}(M)$*,* $l \times c = \mathrm{type}(M)$*,* $d = \dim(M)$*.*

On trouve aussi pour les matrices la notation $\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,c} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{l,1} & M_{l,2} & \dots & M_{l,c} \end{bmatrix}$ ou encore $\begin{Vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,c} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{l,1} & M_{l,2} & \dots & M_{l,c} \end{Vmatrix}$.

Pour notre part nous réserverons les crochets à la description des constructions par blocs.

Ici Par exemple les matrices carrés de type 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 et 5×5 prennent les formes

$$\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ u & v & w & x & y \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. *Constater que la matrice des coefficients des inconnues du problème de l'école T'ai-hsueh ci-dessus est*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Définition 2. *Deux matrices M et N sont* égales *— et on écrit alors* $M = N$ *— si et seulement si elles ont le même type* $l \times c$ *et à chaque place* (i, j) *le même coefficient* $M_{i,j} = N_{i,j}$*.*

Définition 3. *Une matrice carré U de dimension d est dite* triangulaire supérieure *(soit en anglais* upper triangular*) [resp. est dite* triangulaire inférieure *(soit en anglais* lower triangular*] si et seulement si les termes sous la diagonale* $U_{1,1}U_{2,2}\dots U_{d,d}$ *soit les* $U_{i,j}$ *tels que* $i > j$ *sont nuls [resp. les termes au-dessus de la diagonale* $L_{1,1}L_{2,2}\dots L_{d,d}$ *soit les* $L_{i,j}$ *tels que* $i < j$ *sont nuls]; c'est dont une matrice de la forme*

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & \dots & U_{1,d} \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & U_{d-1,d} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & U_{d,d} \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad L = \begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{d,1} & \dots & \dots & \dots & L_{d,d-1} & L_{d,d} \end{pmatrix}.$$

Une matrice carrée qui est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure est dite diagonale*, et est donc de la forme*

$$D = \begin{pmatrix} D_{1,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & D_{d,d} \end{pmatrix}.$$

Si les termes diagonaux sont notés $d_i = D_{i,i}$, alors la matrice D est notée

$$D = \mathrm{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

Concernant les matrices quelconques, nous allons en considérer les colonnes, les lignes et la transposition.

Étant donnée une matrice M quelconque, on désigne par $M_{?,j}$ sa j-ième colonne, et par $M_{i,?}$ sa i-ième ligne, c'est-à-dire

$$M_{?,j} = \begin{pmatrix} M_{1,j} \\ M_{2,j} \\ \vdots \\ M_{l,j} \end{pmatrix}, \qquad M_{i,?} = \begin{pmatrix} M_{i,1} & M_{i,2} & \dots & M_{i,c} \end{pmatrix}.$$

Ce sont des matrices de type $l \times 1$ et $1 \times c$ que l'on appelle *matrice-colonnes* et *matrice-lignes*, ou simplement *colonnes* et *lignes* au sens suivant :

Définition 4. *Une matrice C de type $l \times 1$, soit*

$$C = C_{?,1} = \begin{pmatrix} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ \vdots \\ C_{l,1} \end{pmatrix},$$

de type $l \times 1$, et abrégée en $C = C_{?,1} = (C_{i,1})_{1 \le i \le l}$, est dite colonne *de hauteur l ; c'esr un cas particulier de matrice triangulaire inférieure.*

Et une matrice

$$L = L_{1,?} = \begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \dots & L_{1,c} \end{pmatrix},$$

de type $1 \times c$, et abrégée en $L = L_{1,?} = (L_{1,j})_{1 \le j \le c}$, est dite ligne *de longueur c ; c'est un cas particulier de matrice triangulaire supérieure.*

Dans une colonne seule, isolée, le second indice devient superflu, comme l'est le premier dans une ligne isolée ; on pourra les omettre, voire omettre même tout signe tel que le placement d'un " ?" permettant de connaître le type, et/ou la place dans une matrice plus vaste.

Exercice 15. *Les matrice-colonnes des inconnues et des constantes aux seconds membres du problème de l'école T'ai-hsueh ci-dessus sont*

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 140 \\ 128 \\ 116 \\ 112 \\ 95 \end{pmatrix}.$$

Définition 5. *La* transposée *de la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leq i\leq l, 1\leq j\leq c}$, de type $l \times c$ est la matrice notée $M^\top$, de type $c \times l$, obtenue en échangeant les rôles des lignes et des colonnes de M, soit telle que $M^\top_{?,j} = M_{j,?}$ ou encore $M^\top_{i,?} = M_{?,i}$, et dont le coefficient à la place (i, j) est donc*

$$M^\top{}_{i,j} = M_{j,i}.$$

Cette transposée est donc le tableau

$$M^\top = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{2,1} & \dots & M_{l,1} \\ M_{1,2} & M_{2,2} & \dots & M_{l,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1,c} & M_{2,c} & \dots & M_{l,c} \end{pmatrix}.$$

Proposition 4. *Pour toute matrice M on a*

$$(M^\top)^\top = M.$$

On se gardera bien de confondre la matrice M avec la matrice $M^\top$.

Exercice 16. *Vérifier que pour la matrice A ci-dessus on a*

$$A^\top = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5. *Par transposition on passe des objets de type* ligne *aux objets de type* colonnes*, des matrices triangulaires* supérieures *aux matrices triangulaires* inférieures*, et réciproquement.*

Ainsi la condition $C = L^\top$ ou $(C_{i,1})_{1\leq i\leq l} = (L_{1,j})^\top_{1\leq j\leq c}$, ou $\begin{pmatrix} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ \vdots \\ C_{l,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \dots & L_{1,c} \end{pmatrix}^\top$, signifie que $l = c = d$ et que $C_{m,1} = L_{1,m}$ pour tout $m \leq d$. Au plan de la pratique typographique des écritures mathématiques, le signe "$\top$" nous permet d'indiquer *en ligne horizontale* un objet qui consiste d'une *colonne verticale*, ce qui permet souvent de sauver de la place.

Ensuite, dans un type $l \times c$ fixé, on considère, pour les matrices les opérations de somme (ou addition) et de multiplication par des scalaires éléments de K, dite, plus brièvement multiplication *scalaire*.

Définition 6. *La* somme *de deux matrices de même type $M = (M_{i,j})_{1\leq i\leq l, 1\leq j\leq c}$ et $N = (N_{i,j})_{1\leq i\leq l, 1\leq j\leq c}$ est la matrice notée $M + N$, de même type et dont le coefficient à la place (i, j) est*

$$(M + N)_{i,j} = M_{i,j} + N_{i,j}.$$

Donc avec $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,c} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{l,1} & M_{l,2} & \dots & M_{l,c} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \dots & N_{1,c} \\ N_{2,1} & N_{2,2} & \dots & N_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{l,1} & N_{l,2} & \dots & N_{l,c} \end{pmatrix}$, la somme vaut :

$$M + N = \begin{pmatrix} M_{1,1} + N_{1,1} & M_{1,2} + N_{1,2} & \dots & M_{1,c} + N_{1,c} \\ M_{2,1} + N_{2,1} & M_{2,2} + N_{2,2} & \dots & M_{2,c} + N_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{l,1} + N_{l,1} & M_{l,2} + N_{l,2} & \dots & M_{l,c} + N_{l,c} \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. *Constater que*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 7 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 7 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 15 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. *Étant donnée une matrice quelconque M on désigne par $M_{[!,j]}$ la matrice de même type ayant toutes ses colonnes nulles, sauf la j-ème égale à $M_{?,j}$. Alors on a*

$$M = M_{[!,1]} + \cdots + M_{[!,j]} + \ldots M_{[!,c]}.$$

Définition 7. *La* multiplication scalaire *de la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq c}$ par le nombre λ à gauche est la matrice notée λM, de même type que M et dont le coefficient à la place (i, j) est*

$$(\lambda M)_{i,j} = \lambda M_{i,j}.$$

Ce produit scalaire est donc le tableau

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda M_{1,1} & \lambda M_{1,2} & \ldots & \lambda M_{1,c} \\ \lambda M_{2,1} & \lambda M_{2,2} & \ldots & \lambda M_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda M_{l,1} & \lambda M_{l,2} & \ldots & \lambda M_{l,c} \end{pmatrix}.$$

On définit de même la multiplication scalaire $M\lambda$ de M par λ à droite. Comme nos produits de nombres sont commutatifs ($xy = yx$ pour tous nombres x et y), alors on a toujours $\lambda M = M\lambda$. On parle donc simplement de multiplication scalaire, sans avoir à préciser *à gauche* ou *à droite*.

Exercice 19. *Constater que*

$$9 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 7 & -4 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 7 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 35 & -8 \\ 23 & 112 & -47 \end{pmatrix}.$$

Avec la somme et la multiplication scalaire de matrices, on peut alors penser aux systèmes d'équations comme à une seule équation aux inconnues des nombres et à coefficients des matrices colonnes, et écrire un tel système ainsi :

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} \\ \vdots \\ M_{l,1} \end{pmatrix} X_1 + \begin{pmatrix} M_{1,2} \\ \vdots \\ M_{l,2} \end{pmatrix} X_2 + \ldots + \begin{pmatrix} M_{1,j} \\ \vdots \\ M_{l,j} \end{pmatrix} X_j + \ldots + \begin{pmatrix} M_{1,c} \\ \vdots \\ M_{l,c} \end{pmatrix} X_c = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_l \end{pmatrix},$$

ou bien, de façon plus compacte : $M_{?,1}X_1 + M_{?,2}X_2 + \ldots + M_{?,j}X_j + \ldots + M_{?,c}X_c = B$, si bien que

Proposition 6. *Résoudre un système de matrice M revient à trouver une écriture de la colonne B comme combinaison des colonnes de M de la forme*

$$X_1 M_{?,1} + X_2 M_{?,2} + \ldots + X_j M_{?,j} + \ldots + X_c M_{?,c} = B.$$

Proposition 7. *On a*

$$(\mu M + \nu N)^\top = \mu M^\top + \nu N^\top.$$

Proposition 8. *Toute matrice carré M se décompose de façon unique en une somme*

$$M = S + A,$$

où S e est symétrique *c'est-à-dire telle que $S^\top = S$ et où A est* antisymétrique *c'est-à-dire telle que $A^\top = -A$.*

En effet si $M = S + A$ alors $M^\top = (S + A)^\top = S^\top + A^\top = S - A$, et donc $M + M^\top = 2S$ et $M - M^\top = 2A$. On a donc $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$. On conclut en vérifiant que $S\ S^\top = \frac{1}{2}(M + M^\top)^\top = \frac{1}{2}(M^\top + (M^\top)^\top) = \frac{1}{2}(M^\top + M) = S$ et que $A^\top = \frac{1}{2}(M - M^\top)^\top = \frac{1}{2}(M^\top - (M^\top)^\top) = \frac{1}{2}(M^\top - M) = -S$.

Exercice 20. *Trouver S symétrique et A antisymétrique telles que $S + A = M$ pour*

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 3 & 20 & -1 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Produit de matrices, équations matricielles

Pour aller plus loin on considère une dernière opération nommée le produit ou la multiplication des matrices, qui jointes aux opérations précédentes permet de consid'erer les équations matricielles.

Produits de matrices

Définition 8. *Le* produit *de deux matrices M et N, la première M de type (q, p) et la seconde N de type (r, q), est la matrice notée $P = NM$, de type (r, p) et dont le coefficient à la place (i, j) est*

$$P_{i,j} = (NM)_{i,j} = N_{i,1}M_{1,j} + N_{i,2}M_{2,j} + \ldots + N_{i,q}M_{q,j} = \sum_{1\leq k\leq q} N_{i,k}M_{k,j}.$$

En particulier si M est carrée de type $q \times q$, on pose $M^0 = \mathbb{I}_q$, et, pour tout entier $n|eq0$, $M^{n+1} = (M^n)M$.

Le produit $NM = P$ *s'effectue* concrètement en disposant N à gauche sous M et on écrit le résultat dans l'espace sous M et à droite de N :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} M_{1,1} & \ldots & M_{1,j} & \ldots & M_{1,p} \\ M_{2,1} & \ldots & M_{2,j} & \ldots & M_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{q,1} & \ldots & M_{q,j} & \ldots & M_{q,p} \end{pmatrix} & = M \\ N = \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \ldots & N_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{i,1} & N_{i,2} & \ldots & N_{i,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{r,1} & N_{r,2} & \ldots & N_{r,q} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_{1,1} & \ldots & P_{1,j} & \ldots & P_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i,1} & \ldots & P_{i,j} & \ldots & P_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r,1} & \ldots & P_{r,j} & \ldots & P_{r,p} \end{pmatrix} & = P = NM \end{array}$$

En fait, cette disposition pratique pour faire le calcul généralise celle que l'on connaît pour les *tables de multiplication* (cas où $q = 1$). Et la matrice produit NM peut aussi être comprise comme la somme

$$NM = \sum_{1\leq k\leq q} N_{?,k}M_{k,?}$$

des q matrices $N_{?,k}M_{k,?}$, qui sont les tables de multiplication de la k-ième colonne de N par la k-ième ligne de M, pour k variant de 1 à q.

On ne confondra pas cette disposition pour faire pratiquement le calcul de P avec l'écriture de l'égalité explicite de $NM = P$ en juxtaposant en ligne les matrices N et M, dans cet ordre, comme ceci donc :

$$\begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \dots & N_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{i,1} & N_{i,2} & \dots & N_{i,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{r,1} & N_{r,2} & \dots & N_{r,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,j} & \dots & M_{1,p} \\ M_{2,1} & \dots & M_{2,j} & \dots & M_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{q,1} & \dots & M_{q,j} & \dots & M_{q,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,j} & \dots & P_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i,1} & \dots & P_{i,j} & \dots & P_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r,1} & \dots & P_{r,j} & \dots & P_{r,p} \end{pmatrix}.$$

Proposition 9. *La multiplication des matrices est* associative*, c'est-à-dire que si trois matrices L, M et N, sont de types respectifs $p \times o$, $q \times p$ et $r \times q$, de sorte que les deux composés $(NM)L$ et $N(ML)$ sont définis, on a*

$$(NM)L = N(ML).$$

En effet on calcule $((NM)L)_{i,k} = \sum_v (NM)_{i,v} L_{v,k} = \sum_v (\sum_u N_{i,u} M_{u,v}) L_{v,k} = \sum_v \sum_u (N_{i,u} M_{u,v}) L_{v,k}$, et puisque pour trois nombres a, b et c on a l'associativité $(cb)a = c(ba)$, cela devient $\sum_v \sum_u N_{i,u}(M_{u,v} L_{v,k}) = \sum_u \sum_v N_{i,u}(M_{u,v} L_{v,k}) = \sum_u N_{i,u}(\sum_v M_{u,v} L_{v,k}) = \sum_u N_{i,u}(ML)_{u,k} = (N(ML))_{i,k}$.

Proposition 10. *Si NM est défini, MN ne l'est pas nécessairement, et si c'est le cas, en général $MN \neq NM$ (la multiplication des matrices n'est pas* commutative*). Si NM est défini, alors $M^\top N^\top$ l'est aussi, et l'on a*

$$M^\top N^\top = (NM)^\top.$$

Pour toute matrice M les produits $M^\top M$ et $MM^\top$ sont bien définis, et ce sont des matrices carrées *symétriques* c'est-à-dire des matrices carrés C telles que $C = C^\top$.

Exercice 21. *Calculer pour la matrice A du problème de l'école T'ai-hsueh ci-dessus, le produit $B = A^\top A$ qui s'écrit :*

$$B = A^\top A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Observer que B est symétrique c'est-à-dire que $B^\top = B$, et expliquez pourquoi.

Proposition 11. *Si M et N sont des types convenables,*

$$\alpha(NM) = (\alpha N)M,$$

et la multiplication des matrices est bilinéaire*, c'est-à-dire que, toujours si les types sont convenables :*

$$(\lambda N + \lambda' N')M = (\lambda N)M + (\lambda' N')M,$$

$$N(\lambda M + \lambda' M') = N(\lambda N) + N(\lambda' N').$$

On va utiliser aussi, dans chaque type $l \times c$ ou $d \times d$, deux matrices très particulières, qui sont les matrices dont les coefficients à la place (i, j) sont

$$(\mathbb{O}_{l\times c})_{i,j} = 0,$$

$$(\mathbb{I}_d)_{i,j} = \begin{cases} 1, & si \ \text{i = j;} \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Ce sont donc : $\mathbb{O}_{l\times c} = \begin{pmatrix} 0_{1,1} & 0_{1,2} & \dots & 0_{1,c} \\ 0_{2,1} & 0_{2,2} & \dots & 0_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{l,1} & 0_{l,2} & \dots & 0_{l,c} \end{pmatrix}$ et $\mathbb{I}_d = \begin{pmatrix} 1_{1,1} & 0_{1,2} & \dots & 0_{1,d} \\ 0_{2,1} & 1_{2,2} & \dots & 0_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{d,1} & 0_{d,2} & \dots & 1_{d,d} \end{pmatrix}$.

Définition 9. *Les matrices* $\mathbb{O}_{l\times c}$ *sont appelées matrices* nulles*, et les matrices* $\mathbb{I}_d$ *(cas* $l = c = d$*) sont dites matrices* identités*. Si* $l = c = d$*, alors* $\mathbb{O}_{l\times c}$ *sera noté simplement* $\mathbb{O}_d$*. Si les types en jeu sont clairs, on écrira même simplement* $\mathbb{O}$ *et* $\mathbb{I}$*.*

Proposition 12. *Les matrices* $\mathbb{I}$ *sont neutres pour le produit, c'est-à-dire que si* M *est une matrice de type* $l \times c$*, alors on a*

$$\mathbb{I}_l M = M = M\mathbb{I}_c.$$

Les matrices $\mathbb{O}$ *sont nulles pour le produit, c'est-à-dire que si* M *est une matrice de type* $l \times c$*, alors on a*

$$\mathbb{O}_l M = \mathbb{O}_{l\times c} = M\mathbb{O}_c.$$

Équations linéaires comme équations matricielles.

Bien que Cayley ait défini le produit de matrices en référence explicite avec la composition des transformations linéaires — nous y reviendrons —, on peut aussi soutenir que la multiplication des matrices est ad hoc, qu'elle est définie comme elle l'est justement pour permettre de présenter un système d'équations linéaires sous forme matricielle. D'ailleurs les deux points de vue se rejoindrons quand on comprendra le rapport entre transformations linéaires et systèmes d'équations linéaires.

En effet, un système linéaire s'exprime aussi, d'une part, on l'a vu, en une équation vectorielle

$$M_{?,1}X_1 + M_{?,2}X_2 + \ldots + M_{?,j}X_j + \ldots + M_{?,c}X_c = B;$$

et, d'autre part, en notant donc $M_{i,?}$ la i-ème ligne de M, en le système des l équations

$$M_{1,?}X = B_1,\ M_{2,?}X = B_2,\ \ldots, M_{i,?}X = B_i,\ , M_{l,?}X = B_l.$$

Sous une forme où l'on ne choisit plus de privilégier les colonnes ou les lignes, le système s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \ldots & M_{1,c} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \ldots & M_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{l,1} & M_{l,2} & \ldots & M_{l,c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_j \\ \vdots \\ B_c \end{pmatrix},$$

ou encore, forme ultime la plus ramassée, avec X et B des matrices colonnes :

$$MX = B.$$

Exercice 22. *Constater que le problème de l'école T'ai-hsueh (p. 12) se laisse écrire matriciellement sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 128 \\ 116 \\ 112 \\ 95 \end{pmatrix},$$

soit, sous forme compacte :

$$AX = B.$$

Quand à la question de trouver M tel que $NM = P$, elle équivaut à la conjonction pour tous les j des systèmes $N(M_{?,j}) = P_{?,j}$ qui sont chacun du genre $NX_j = B_j$ avec des matrices colonnes $X_j = M_{?,j}$ et $B_j = P_{?,j}$. Si donc maintenant on considère N et P deux matrices de type $r \times q$ et $r \times p$, et X une matrice inconnue de type convenable, soit de type $q \times p$, on voit qu'une équation matricielle $NX = P$ est encore un système de systèmes d'équations linéaires, soit en fin de compte un système d'équations linéaires. On pose donc

Définition 10. *Si N et P sont de types $r \times q$ et $r \times p$, une solution de l'* équation matricielle linéaire *$NX = P$ est une matrice $X = M$ de type $q \times p$ telle que*

$$NM = P.$$

Proposition 13. *La résolution de l'équation matricielle linéaire $NX = P$* est linéaire, *en ce sens que si P est une combinaison linéaire $P = \alpha' Q' + \alpha'' Q''$ et si M' et M'' sont respectivement des solutions de $NX = Q'$ et $NX = Q''$, alors la combinaison linéaire $M = \alpha' M' + \alpha'' M''$ est solution de $NX = P$.*

Premières équations polynomiales à inconnues matricielles, nombres complexes.

Définition 11. *Soit $n > 1$ et $A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, A_0$ des matrices de type $r \times q$. Une solution de l'* équation matricielle *$A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \cdots + A_1 X + A_0 = \mathbb{O}_{r\times q}$ est une matrice carrée $X = M$ de type $q \times q$ telle que*

$$A_n M^n + A_{n-1} M^{n-1} + \cdots + A_1 M + A_0 = \mathbb{O}_{r\times q}.$$

Proposition 14. *Pour toute matrice carrée de type 2×2, soit $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a l'identité :*

$$C^2 - (a + d)C + (ad - bc)\mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2.$$

Proposition 15. *La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$ vérifie*

$$C^2 + a_1 C + a_0 \mathbb{I}_2 = 0.$$

Proposition 16. *Si a et b sont deux nombres, on forme le* nombre complexe *$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Avec $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $z = a\mathbb{I} + b\mathbb{J}$, et en posant $\mathbb{I} = 1$ et $\mathbb{J} = i$, on a $z = a + bi$. La considération de la transposition et des composantes symétriques et antisymétriques des matrices donne, dans le cas des complexes, la conjugaison $\bar{z} = z^\top = a - bi$, la partie réelle $\Re z = \frac{1}{2}(z + z^\top) = a$, et la partie imaginaire pure $\Im z = \frac{1}{2}(z - z^\top) = bi$. Si $\Im z = 0$, z est dit* réel, *et $z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est "assimilé" au nombre a.*

On a $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}$, soit $i^2 = -1$, et donc le produit des complexes se fait en développant :

$$z'z = (a' + b'i)(a + bi) = (a'a - b'b) + (a'b + b'a)i.$$

Le produit des complexes est commutatif c'est-à-dire que $zz' = z'z$.

On a $z\bar{z} = \bar{z}z = a^2 + b^2$, $z + \bar{z} = 2a$, et les nombres complexes $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi$ et $\bar{z} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a + bi$ vérifient

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0.$$

Le complexe $z = a + bi$ admet un inverse — soit un complexe z^{-1} tel que $z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$ — si et seulement si $a^2 + b^2 \neq 0$, et alors z^{-1} est unique est vaut $z^{-1} = \frac{2a-z}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$.

Exercice 23. *Soit $\alpha = u + vi$ et $\beta = p + qi$ deux nombres complexes. Interpréter l'équation $\alpha z = \beta$, où l'inconnue z est un nombre complexe $z = a + bi$ comme un système linéaire aux inconnues a et b. Résoudre.*

Proposition 17. *Pour tout nombre complexe $\lambda = a + bi \neq 0$ il existe deux* racines carrées *parmi les complexes c'est-à-dire deux nombres complexes $z = u + vi$ tel que $z^2 = \lambda$. Si $b = 0$ et $a \geq 0$, on a $v = 0$ et $u = \pm\sqrt{a}$, et $z = \pm\sqrt{a}$; si $b = 0$ et $a < 0$ alors $u = 0$, $v = \pm\sqrt{-a}$ et $z = \pm\sqrt{-a}i$; et dans les autres cas on a : $v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)}$, $v \neq 0$ et $u = \frac{b}{2v}$, soit $z = \pm\left[\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)}i\right]$.*

Exercice 24. *Déterminer les racines carrées complexes des complexes : -2, i, $1+i$, $47 - 49i$.*

Proposition 18. *Soit trois complexes $\alpha = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = p + qi$, $\beta = \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} = r + si$ et $\gamma = \begin{pmatrix} t & -u \\ u & t \end{pmatrix} = t + ui$, et soit l'équation où l'inconnue est une matrice $X = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ de type 2×2, et où les coefficients sont donc aussi des matrices de type 2×2 :*

$$\alpha X^2 + \beta X + \gamma \mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2,$$

c'est-à-dire, en détaillant les matrices :

$$\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & -u \\ u & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire encore le système de quatre équations du second degré aux inconnues les nombres w, x, y, z et aux coefficients les nombres p, q, r, s, t, u :

$$\begin{cases} pw^2 + pxy - qyw - qzy + rw - sy + t = 0 \\ qw^2 + qxy + pyw + pzy + sw + ry + u = 0 \\ pwx + pxz - qyx - qz^2 + rx - sz - u = 0 \\ qwx + qxz + pyx + pz^2 + sx + rz + t = 0 \end{cases}.$$

Cette équation admet toujours au moins une solution où $z = w$ et $x = -y$, soit de la forme $X = \begin{pmatrix} w & -y \\ y & w \end{pmatrix}$, c'est-à-dire donnée par un nombre complexe $Z = w + yi$, car on se ramène à la détermination d'une racine carrée d'un complexe via l'identité

$$\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma = \alpha\Big((Z + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\Big).$$

En fait l'équation admet au plus deux solutions complexes. Mais elle peut évidemment admettre d'autres solutions X parmi les matrices 2×2.

Exercice 25. *Résoudre parmi les complexes l'équation $Z^2 + iZ - 1 = 0$.*

Proposition 19. *Pour toute matrice carrée de type 3×3, soit $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a l'identité :*

$$C^3 - (a + e + i)C^2 + (ae + ai + ei - fh - bd - gc)C - (aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg)\mathbb{I}_3 = \mathbb{O}_3.$$

Proposition 20. *La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$ vérifie*

$$C^3 + +a_2C^2 + a_1C + a_0\mathbb{I}_3 = 0.$$

Exercice 26. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = A + \mathbb{I}_3$, et en déduire que $A^4 = A^2 + A$, que $A^5 = A^2 + A + \mathbb{I}_3$, $A^6 = (A^3)^2 = A^2 + 2A + \mathbb{I}_3$.*

1.2.3 Partitions de matrices en blocs

Définition 12. *Pour $i = 1,2$ et $j = 1,2$ soit $B_{i,j}$ une matrice de nombres de type $l(i) \times c(j)$. On constitue alors une matrice A de nombres de type $(l(1) + l(2) \times (c(1) + c(2))$ en plaçant — débarrassées de leurs parenthèses — $B_{1,2}$ à droite de $B_{1,1}$, $B_{2,1}$ sous $B_{1,1}$ et $B_{2,2}$ à droite de $B_{2,1}$ et sous $B_{1,2}$, ce que l'on note ainsi*

$$A = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}.$$

On dit que A est construite par blocs *$B_{i,j}$, et que* les *$B_{i,j}$* forment une partition de *A en 2×2 blocs. et nous réservons donc les crochets pour la description de cette construction par blocs.*

Définition 13. *On définit une partition en $q \times p$ blocs comme une matrice M obtenues par* juxtaposition de matrices *$M_{i,j}$ sous la forme*

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,j} & \dots & M_{1,p} \\ M_{2,1} & \dots & M_{2,j} & \dots & M_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{q,1} & \dots & M_{q,j} & \dots & M_{q,p} \end{bmatrix},$$

où pour chaque k donné quand j varie toutes les $M_{k,j}$ ont le même nombre de lignes et, pour chaque j donné quand k varie toutes les $M_{k,j}$ ont le même nombre de colonnes.

Définition 14. *Un cas particulier important de partition est celui d'une matrice de type $2l \times 2c$ décomposée en blocs de types 2×2 de la forme "nombre complexe" $M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,j} & -b_{i,j} \\ b_{i,j} & a_{i,j} \end{pmatrix} = z_{i,j}$. On considère alors que l'on a une* matrice à coefficients complexes *de type $l \times c$ notée*

$$M = \begin{bmatrix} z_{1,1} & \dots & z_{1,j} & \dots & z_{1,c} \\ z_{2,1} & \dots & z_{2,j} & \dots & z_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{l,1} & \dots & z_{l,j} & \dots & z_{l,c} \end{bmatrix}.$$

Proposition 21. *Une partition peut toujours être considérée comme obtenue par étapes emboîtées comme par exemple*

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Exercice 27. *Constater que si $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 9 & 9 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 22. *Supposons que les deux matrices M et M' soient partitionnées sous la forme $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ et $M' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$, et ceci de sorte que le nombre de colonnes de A' et C' soit le nombre de lignes de A et B, et que le nombre de colonnes de B' et D' soit le nombre de lignes de C et D. Alors on a :*

$$M'M = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'A + B'C & A'B + B'D \\ C'A + D'C & C'B + D'D \end{bmatrix}.$$

Proposition 23. *Supposons que les deux matrices M et M' soient de la forme $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $M' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, avec a, b, c, d et a', b', c', d' des nombres complexes. Alors on a :*

$$M'M = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{bmatrix}.$$

Proposition 24. *Étant donnés quatre nombres x, X, Y, Z, ou bien les complexes $A = x + Zi$ et $B = X + Yi$, on peut former le* quaternion *associé soit sous la forme d'une matrice* 4×4 *de nombres, soit sous la forme d'une matrice* 2×2 *de complexes :*

$$Q = \begin{pmatrix} x & -Z & X & -Y \\ Z & x & Y & X \\ -X & -Y & x & Z \\ Y & -X & -Z & x \end{pmatrix}, \quad \text{ou bien} \quad q = \begin{bmatrix} x + Zi & X + Yi \\ -X + Yi & x - Zi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix},$$

et alors on peut indifféremment effectuer les sommes et produits de quaternions sous la forme "réelle" 4×4 *ou sous la forme "complexe"* 2×2 *(cf. p. 21).*

La considération de la transposition et des composantes symétriques et antisymétriques des matrices 4×4 *donne, dans le cas des quaternions, la conjugaison $\bar{Q} = Q^\top$, soit $\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -B \\ \bar{B} & A \end{bmatrix}$, la partie réelle $\Re Q = \frac{1}{2}(Q + Q^\top) = x\mathbb{I}_4 = R$, et la partie (imaginaire) pure $\Im Q = \frac{1}{2}(Q - Q^\top) = \begin{pmatrix} 0 & -Z & X & -Y \\ Z & 0 & Y & X \\ -X & -Y & 0 & Z \\ Y & -X & -Z & 0 \end{pmatrix} = P$, et on écrit $Q = \Re Q + \Im Q = R + P$.*

Sous forme complexe cela devient $q = r + p$ avec $r = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ et $p = \begin{bmatrix} Zi & X + Yi \\ -X + Yi & -Zi \end{bmatrix}$, ce qui se décompose en

$$q = r + p = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = xU + XI + YJ + ZK,$$

avec donc

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Par suite, par distribution linéaire des facteurs, la multiplication des quaternions est complètement connues si l'on connaît les produits entre elles des matrices U, I, J, K, qui sont en fait

$$UU = U, UI = IU = I, UJ = JU = J, UK = KU = K,$$

$$I^2 = -U, IJ = -JI = K, J^2 = -U, JK = -KJ = I, K^2 = -U, KI = -IK = J.$$

On notera bien que la multiplication des quaternions n'est pas commutative.

Exercice 28. *1 — Résoudre dans les complexes l'équation $z^2 = -3$.*

2 — Montrer que parmi les quaternions l'équation $q^2 = -3$ admet pour solutions $\pm\sqrt{3}I$, $\pm\sqrt{3}J$, $\pm\sqrt{3}K$.

Montrer que si $a^2 + b^2 = 3$ alors les quaternions $aI + bJ$ sont aussi des solutions.

Montrer que sont aussi solutions $q = \pm(I + J + K)$, soit en notation de type 4×4, $Q = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 25. *Soit M une matrice quelconque de type $l \times c$ de lignes les $M_{i,?}$ et colonnes les $M_{?,j}$. On a alors les partitions suivantes de M de type $l \times 1$ ou en lignes, et de types $1 \times c$ ou en colonnes :*

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,?} \\ \vdots \\ M_{i,?} \\ \vdots \\ M_{l,?} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{?,1} & \dots & M_{?,j} & \dots & M_{?,c} \end{bmatrix}.$$

Proposition 26. *Considérons deux matrices M et N partitionnées en matrices $N_{i,k}$ et $M_{k,j}$, où donc pour chaque i donné quand k varie toutes les $N_{i,k}$ ont le même nombre de lignes et, pour chaque k donné quand i varie toutes les $N_{i,k}$ ont le même nombre de colonnes, et où de même pour chaque k donné quand j varie toutes les $M_{k,j}$ ont le même nombre de lignes et, pour chaque j donné quand k varie toutes les $M_{k,j}$ ont le même nombre de colonnes :*

$$N = \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \dots & N_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{i,1} & N_{i,2} & \dots & N_{i,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{r,1} & N_{r,2} & \dots & N_{r,q} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,j} & \dots & M_{1,p} \\ M_{2,1} & \dots & M_{2,j} & \dots & M_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{q,1} & \dots & M_{q,j} & \dots & M_{q,p} \end{bmatrix},$$

de sorte que pour tout i, j, k le nombre de colonne de la matrice $N_{i,k}$ soit égale au nombre de ligne de $M_{k,j}$ (on dira alors que les partitions de N et M sont adaptées à la composition de N à gauche de M*).*

Alors le produit NM est en effet bien défini, c'est-à-dire que le nombre de colonne de N est égale au nombre de lignes de M, et ce produit NM est partitionné en

$$NM = P = \begin{bmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,j} & \dots & P_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i,1} & \dots & P_{i,j} & \dots & P_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r,1} & \dots & P_{r,j} & \dots & P_{r,p} \end{bmatrix},$$

avec, pour tout i, j, la matrice $P_{i,j}$ donnée par

$$P_{i,j} = \sum_k N_{i,k} M_{k,j}.$$

Proposition 27. *Si le nombre de colonnes c de N est égale au nombre l de lignes de M, alors le produit NM s'obtient, en partitionnant N en colonnes et M en lignes sous la forme*

$$NM = \begin{bmatrix} N_{?,1} & \dots & N_{?,j} & \dots & N_{?,c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1,?} \\ \vdots \\ M_{i,?} \\ \vdots \\ M_{l,?} \end{bmatrix}.$$

Définition 15. *Pour $r \leq c$, $r \leq l$, nous posons*

$$R^{(r)}_{l\times c} = R^{(r,0)}_{l\times c} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{r\times(c-r)} \\ \mathbb{O}_{(l-r)\times r} & \mathbb{O}_{(l-r)\times(c-r)} \end{bmatrix}, \qquad R^{(0,s)}_{l\times c} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{(l-s)\times(c-s)} & \mathbb{O}_{(l-s)\times s} \\ \mathbb{O}_{s\times(c-s)} & \mathbb{I}_{s\times s} \end{bmatrix}.$$

En particulier on retrouve comme cas spéciaux les matrices nulles et identités $R^{(0)}_{l\times c} = \mathbb{O}_{l\times c}$ et $R^{(d)}_{d\times d} = \mathbb{I}_d$.

Proposition 28. *Si les partitions sont adaptées aux compositions indiquées on a*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} R^{(r)}_{l\times c} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{r\times(c-r)} \\ \mathbb{O}_{(l-r)\times r} & \mathbb{O}_{(l-r)\times(c-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & \mathbb{O} \end{bmatrix}.$$

Si les partitions sont adaptées aux compositions indiquées on a

$$R^{(r)}_{l\times c} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{r\times(c-r)} \\ \mathbb{O}_{(l-r)\times r} & \mathbb{O}_{(l-r)\times(c-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

Exercice 29. *Soit* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. *Précisez exactement l'adaptation nécessaires des nombres de lignes et colonnes supposée pour A, B, C et D quand on écrit l'expression* $MR^{(0,s)}_{l\times c} - R^{(0,s)}_{l\times c}M$, *et calculer alors ladite expression.*

1.2.4 Inverses de matrices carrées, calculs en dimension 2 et 3, calculs par blocs.

Définition 16. *Si C est une matrice carré de dimension d, on appelle* inverse *de C une matrice D de dimension d telle que*

$$DC = \mathbb{I}_d, \quad \mathbb{I}_d = CD.$$

Proposition 29. *Si C admet une inverse D, alors D est unique, et on la note* C^{-1}, *et l'inverse de* C^{-1} *est C, soit* $(C^{-1})^{-1} = C$. *En fait si* $CD = \mathbb{I}_d$ *et* $D'C = \mathbb{I}_d$, *alors* $D = D'$.

En effet on a : $D' = D'\mathbb{I}_d = D'(CD) = (D'C)D = \mathbb{I}_d D = D$.

Exercice 30. *Soit* $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que C est inversible, et calculer l'inverse* C^{-1}. *Trouver aussi* C^{-1} *en observant que C "représente" le nombre complexe* $1 + i$ *et en inversant ce nombre complexe.*

Exercice 31. *Montrer que* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Proposition 30. *Considérons la matrice* $C = R^{(r)}_{d\times d} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{r\times(d-r)} \\ \mathbb{O}_{(d-r)\times r} & \mathbb{O}_{(d-r)\times(d-r)} \end{bmatrix}$. *Alors les quatre faits suivants sont équivalents :*

1. *Il existe D telle que* $CD = \mathbb{I}_d$
2. *Il existe D telle que* $DC = \mathbb{I}_d$
3. *Il existe D tel que* $CD = \mathbb{I}_d = DC$
4. $r = d$

En effet on a $r \leq d$, et supposant le premier point, partitionnons $D = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ de façon adapté au produit CD : alors $CD = \begin{bmatrix} E & F \\ \mathbb{O}_{d-r} & \mathbb{O}_{d-r} \end{bmatrix}$ ce qui ne peut être égale à $\mathbb{I}_d$ que si $r = d$. Le premier point implique donc le quatrième, lequel évidemment implique le premier. De même le second point équivaut au quatrième. Par suite le quatrième impliquant évidemment le troisième, les quatre sont bien équivalents.

Proposition 31. *En fait pour C et D deux matrices carrées de dimension d on a*

$$DC = \mathbb{I}_d, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{I}_d = CD,$$

si bien que pour que D soit inverse de C il faut seulement vérifier ou bien $DC = \mathbb{I}_d$ *ou bien* $\mathbb{I}_d = CD$, *l'autre étant alors automatiquement assurée.*

Pour démontrer cette proposition, nous considérons d'abord le cas où $C = R^{(r)}_{d\times d}$: la preuve est alors faite par la proposition précédente, car si $CD = \mathbb{I}_d$ alors $r = d$ donc $C = \mathbb{I}_d$ et donc $D = I_d$, et on a bien aussi $DC = \mathbb{I}_d$. Considérons ensuite deux matrices inversibles U et V et la matrice $C = UR^{(r)}_{d\times d}V$. Si $CD = \mathbb{I}_d$, alors $UR^{(r)}_{d\times d}VD = \mathbb{I}_d$, donc en multipliant à gauche par U^{-1} puis à droite par U il vient $R^{(r)}_{d\times d}VD = U^{-1}$, $R^{(r)}_{d\times d}VDU = \mathbb{I}_d$, et donc $r = d$ et $VDUR^{(r)}_{d\times d} = \mathbb{I}_d$ puis $VDUR^{(r)}_{d\times d}V = V$ et $DUR^{(r)}_{d\times d}V = \mathbb{I}_d$, soit $DC = \mathbb{I}_d$. Pour établir le résultat pour toute matrice C il reste donc à savoir que toute matrice C peut se mettre sous la forme $C = UR^{(r)}_{d\times d}V$, avec U et V inversibles, ce que nous prouverons plus loin, ce sera l'objet même du développement de la méthode d'échelonnement.

Définition 17. *On dit qu'une matrice M de type $l \times c$ admet D pour* inverse à droite *si $MD = \mathbb{I}_l$ et G pour* inverse à gauche *si $GM = \mathbb{I}_c$.*

Proposition 32. *La matrice $R^{(r)}_{l\times c}$ admet une inverse à droite D, telle que donc $R^{(r)}_{l\times c}D = \mathbb{I}_l$, si et seulement si $r = l \leq c$, et une inverse à gauche G, telle que donc $GR^{(r)}_{l\times c} = \mathbb{I}_c$, si et seulement si $r = c \geq l$. Et donc $R^{(r)}_{l\times c}$ admet une inverse à droite et une inverse à gauche si et seulement si $r = c = l$.*

Proposition 33. *Une matrice quelconque M de type $l\times c$ ne peut admettre une inverse à droite et une inverse à gauche que si $l = c$, c'est-à-dire si elle est carrée, et alors elle est inversible.*

En effet on se ramène au cas de $R^{(r)}_{l\times c}$, sachant que toute matrice M peut se mettre sous la forme $C = UR^{(r)}_{l\times c}V$, avec U et V inversibles, comme nous allons le prouver en faisant l'échelonnement.

Exercice 32. *Soit* $A = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 19 & -8 & -4 \\ 4 & 16 & -13 \\ 8 & 11 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{21} & \frac{-8}{21} & \frac{-4}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{16}{21} & \frac{-13}{21} \\ \frac{8}{21} & \frac{11}{21} & \frac{16}{21} \end{pmatrix}$*. Calculer le produit $A^\top A$, et en déduire A^{-1}.*

Exercice 33. *Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ *n'admet pas d'inverse.*

Proposition 34. *Si A et B sont deux matrices carrées de même type $d\times d$ inversibles, alors le produit AB est inversible et l'on a :*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Si c est un nombre non-nul, c'est-à-dire inversible d'inverse c^{-1} alors on résoud l'équation numérique $cx = b$ ainsi : de $cx = b$ on déduit $c^{-1}(cx) = c^{-1}b$, soit $(c^{-1}c)x = c^{-1}b$, $(1)x = c^{-1}b$, $x = c^{-1}b = \frac{b}{c}$ qui est donc l'unique solution.

Eh bien, pour résoudre une sytème linéaire de la forme $CX = B$ où C est une matrice carrée inversible de type $d \times d$, on fait exactement de même, sauf pour l'écriture finale comme fraction : de $CX = B$ on déduit $C^{-1}(CX) = C^{-1}B$, soit $(C^{-1}C)x = C^{-1}B$, $(\mathbb{I}_d)X = C^{-1}B$, $X = C^{-1}B$. On a donc $CX = B$ si et seulement si $X = C^{-1}B$. On fera attention de ne pas confondre $C^{-1}B$ et BC^{-1}. On a donc établit :

Proposition 35. *Pour C et D deux matrices carrées de type $d \times d$, on a les equivalences logiques*

$$D = C^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \forall X, Y \ \ (CX = Y \Leftrightarrow X = DY),$$

où les X, Y sont des matrices de types adéquates.

Proposition 36. *Pour C et D deux matrices carrées de type $d \times d$, on a les equivalences logiques*

$$D = C^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \forall X, Y \ \ (XC = Y \Leftrightarrow X = YD),$$

où les X, Y sont des matrices de types adéquates.

Ainsi pour résoudre un système $CX = B$ avec C carrée, la première idée est de chercher si C est inversible, et, si c'est le cas, de trouver effectivement cette inverse C^{-1} ; le système est alors résolu par $X = C^{-1}B$. Mais pour savoir si C a une inverse et trouver ladite inverse, il faut résoudre $DC = \mathbb{I}_d$ et $\mathbb{I}_d = CD$ où D est l'inconnue, ce qui constitue un système linéaire. Mais puisque $DC = \mathbb{I}_d$ équivaut à $CD = \mathbb{I}_d$, il suffit de résoudre au choix l'un des deux.

Exercice 34. *L'inverse* $D = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ *d'une matrice* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est donnée, si elle existe, par les p, q, r et s solutions de l'un des systèmes équivalents d'équations*

$$\begin{cases} ap + br = 1 \\ cp + dr = 0 \\ aq + bs = 0 \\ cq + ds = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} ap + cq = 1 \\ ar + cs = 0 \\ bp + dq = 0 \\ br + ds = 1 \end{cases}.$$

Exercice 35. *Calculer la matrice inverse de* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 36. *On veut calculer* $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{100}$. *Montrer que* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, *que* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, *et en déduire que* $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 2.5^{100} - 3^{100} & 5^{100} - 3^{100} \\ 2.3^{100} - 2.5^{100} & 2.3^{100} - 5^{100} \end{pmatrix}$.

Proposition 37. *Pour toute matrice* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *on a l'identité*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc C est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$*, l'inverse étant alors*

$$C^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Proposition 38. *Pour toute matrice* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *inversible on a*

$$C^{-1} = [ad - bc]^{-1}\left[(a + d)\mathbb{I}_2 - C\right].$$

Proposition 39. *Pour toute matrice* $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *on a l'identité :*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix} = \left(aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc C est inversible si et seulement si $aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \neq 0$*, l'inverse étant alors*

$$C^{-1} = \frac{1}{aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}\begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}.$$

Cela se reformule en termes de solution de systèmes :

Proposition 40. *Pour des nombres fixés* $a, b, c, d, e, f, g, h, i$*, posons* $\delta = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$*, et supposons que* $\delta \neq 0$*. Alors quelques soient u,v et w et quelques soient x, y et z on a l'équivalence logique :*

$$\begin{cases} ax + by + cz = u \\ dx + ey + fz = v \\ gx + hy + iz = w \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{ei-fh}{\delta}u + \frac{ch-bi}{\delta}v + \frac{bf-ce}{\delta}w \\ y = \frac{fg-di}{\delta}u + \frac{ai-cg}{\delta}v + \frac{cd-af}{\delta}w \\ z = \frac{dh-eg}{\delta}u + \frac{bg-ah}{\delta}v + \frac{ae-bd}{\delta}w \end{cases}$$

Proposition 41. *Pour toute matrice* $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *inversible on a*

$$C^{-1} = [aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg]^{-1} \left[(ae + ai + ei - fh - bd - gc)\mathbb{I}_3 - (a + e + i)C + C^2\right].$$

Exercice 37. *Si elle existe calculer l'inverse de la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$ *et résoudre le système d'équations*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 29 \\ 7x + 11y + 13z = 31 \\ 17x + 19y + 23z = 37 \end{cases}.$$

Exercice 38. *Montrer que pour toute valeur réel du paramètre m la matrice*

$$\begin{pmatrix} 12 & -5 & m \\ -1 & m & 8 \\ -9 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

est inversible, et exprimer ladite inverse.

Proposition 42. *Soit A une matrice carrée quelconque de type $d \times d$ telle qu'il existe des nombres $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ tels que*

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots a_1 A + a_0 \mathbb{I}_d = \mathbb{O}_d.$$

Alors A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = -a_0^{-1}(a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots a_1 A).$$

Exercice 39. *Soit A une matrice carré de type 3×3 telle que $A^3 - A - \mathbb{I}_3 = \mathbb{O}_3$. Montrer que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = A^2 - \mathbb{I}_3$.*

Proposition 43. *Soit M une matrice carrée de dimension d décomposée en blocs,* $M = \begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B \end{bmatrix}$*, avec $\mathbb{O}$ le bloc nul de dimension $d - m$, A carrée de dimension m et B carrée de dimension $d - m$. Alors A et B sont inversibles si et seulement si M est inversible, et l'inverse de M s'écrit*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

En effet partitionnons convenablement l'inverse éventuelle N de M, soit $N = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$. Alors $\mathbb{I}_d = NM$ s'écrit $\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{d-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & HB \end{bmatrix}$, soit $EA = \mathbb{I}_m$ et $HB = \mathbb{I}$, ce qui signifie que $E = A^{-1}$ et $H = B^{-1}$, et $GA = \mathbb{O}$ et $FB = \mathbb{O}$, d'où l'on tire, en multipliant à droite par A^{-1} et par B^{-1}, que $G = \mathbb{O}$ et $F = \mathbb{O}$. La même preuve donne la proposition que voici :

Proposition 44. *Soit M une matrice carrée de dimension d décomposée en blocs,* $M = \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbb{O} & B \end{bmatrix}$*, avec $\mathbb{O}$ le bloc nul de dimension $d - m$, A carrée de dimension m et B carrée de dimension $d - m$. Alors A et B sont inversibles si et seulement si M est inversible, et l'inverse de M s'écrit*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbb{O} & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ \mathbb{O} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

Exercice 40. *Inverser la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & c \\ 3 & 5 & b & d \\ 0 & 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *et résoudre le système* $\begin{cases} x - 2y + az + ct = e \\ 3x + 5y + bz + dt = f \\ 8z - 6t = g \\ z + t = h \end{cases}$.

Proposition 45. *Soit M une matrice carrée de dimension d décomposée en blocs, $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, avec A carrée inversible d'inverse A^{-1}. Alors, avec $X = CA^{-1}$, $Y = A^{-1}B$ et $S = D - CA^{-1}B$, on a :*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ X & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & Y \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix},$$

Comme $\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ X & \mathbb{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ -X & \mathbb{I} \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} \mathbb{I} & Y \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -Y \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$, *la matrice M est inversible si et seulement si* $\begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & S \end{bmatrix}$ *l'est, ce qui équivaut à ce que S le soit, et alors l'inverse de M est*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -Y \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ -X & \mathbb{I} \end{bmatrix},$$

soit

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Exercice 41. *1 — Soit M une matrice dont le premier terme $a = M_{1,1}$, celui placé en première ligne et première colonne, est non-nul, et M partitionnée sous la forme $M = \begin{bmatrix} a & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Montrer que M est inversible si et seulement si $D - a^{-1}CB$ est inversible.*

2 — Soit une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de type 2×2 telle que $a \neq 0$. Montrer que M est inversible si et seulement $d - a^{-1}cb \neq 0$.

3 — Soit une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de type 3×3 telle que $a \neq 0$. Montrer que M est inversible si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} e - a^{-1}db & f - a^{-1}dc \\ h - a^{-1}gb & i - a^{-1}gc \end{pmatrix}$ est inversible.

4 — Montrer que si $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ est inversible et si $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ est inversible, alors $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $i - a^{-1}gc - (e - a^{-1}db)^{-1}(f - a^{-1}dc)(h - a^{-1}gb) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $(ia - gc)(ea - db) \neq (fa - dc)(ha - gb)$.

1.3 Modifications linéaires de matrices par produits par matrices élémentaires.

1.3.1 Calcul des positions, lignes et colonnes

Définition 18. *On introduit, dans chaque type $l \times c$, les matrices particulières que l'on dira* indicatrices de positions *ou simplement* positions, *que l'on note $\mathbb{P}^{u,v}_{l \times c}$, — ou simplement $\mathbb{P}^{u,v}$ si le type est clair — et définies par*

$$((\mathbb{P}^{u,v}_{l \times c})_{i,j} = \begin{cases} 1, & si\ i = u\ et\ j = v; \\ 0, & sinon. \end{cases}.$$

On considère la "base canonique" des positions $\mathbb{P}^{u,v}_{l\times c}$ ci-dessus dans des cas particuliers.

Dans l'espace des colonnes de hauteur l, on note $\mathbb{P}^{u,1}_{l\times 1} = e^u_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, avec un 1 en ligne u.

Dans l'espace des lignes de longueur c, on note $\mathbb{P}^{1,v}_{1\times c} = e^{v\top}_c = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, avec un 1 en colonne v.
Si les valeurs de l ou c sont claires d'après le contexte, on notera simplement $e^u_l = e^u$ ou $e^{v\top}_c = e^{v\top}$.

On peut analyser une matrice M en colonnes ou en lignes, c'est-à-dire la voir comme juxtapositions de ses matrice-colonnes écrites sans leurs parenthèses, ou comme juxtaposition de ses matrice-lignes, écrites sans leurs parenthèses. Soit $M = \begin{pmatrix} M_{?,1} & M_{?,2} & \dots & M_{?,c} \end{pmatrix}$, et $M = \begin{pmatrix} M_{1,?} \\ \vdots \\ M_{l,?} \end{pmatrix}$. Par exemple on a $\mathbb{I}_c = \begin{pmatrix} e^1 & e^2 & \dots & e^c \end{pmatrix}$, et $\mathbb{I}_l = \begin{pmatrix} e^{1\top} \\ \vdots \\ e^{l\top} \end{pmatrix}$. *Pour toute matrice M, les colonnes $M_{?,j}$ et les lignes $M_{i,?}$ s'extraient par produit suivant :*

$$M = M\mathbb{I}_c = M\begin{pmatrix} e^1 & \dots & e^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Me^1 & \dots & Me^c \end{pmatrix}, \qquad Me^j = M_{?,j},$$

$$M = \mathbb{I}_l M = \begin{pmatrix} e^{1\top} \\ \vdots \\ e^{l\top} \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} e^{1\top}M \\ \vdots \\ e^{l\top}M \end{pmatrix}, \qquad e^{i\top}M = M_{i,?}.$$

On a $= M_{i,?}e^j = e^{i\top}M_{?,j} = e^{i\top}Me^j = (M_{i,j})$, la matrice de type 1×1 ayant pour unique coefficient le nombre $M_{i,j}$. Si on veut être plus précis sur les types on écrira $e^{i\top}_l Me^j_c = (M_{i,j})$, ou encore $\mathbb{P}^{i,1}_{l\times 1}{}^\top M\mathbb{P}^{j,1}_{c\times 1} = (M_{i,j})$, ou $\mathbb{P}^{1,i}_{1\times l}M\mathbb{P}^{j,1}_{c\times 1} = (M_{i,j})$.

Une matrice se décompose sous forme d'une somme $M = M_{[!,1]} + \dots + M_{[!,j]} + \dots M_{[!,c]}$,, soit comme juxtaposition de ses colonnes, ou bien de même sous forme d'une somme $M = M_{[1,!]} + \dots + M_{[i,8]} + \dots M_{[l,!]}$, comme juxtaposition de ses lignes, avec $M_{[!,j]} = M\mathbb{P}^{j,j}_{c\times c}$ et $M_{[i,!]} = \mathbb{P}^{i,i}_{l\times l}M$. Par suite la matrice de type $l\times c$ ayant pour seul composante non-nulle celle de la place (i,j) et celle-ci valant $M_{i,j}$, soit $M_{i,j}\mathbb{P}^{i,j}_{l\times c}$, vaut aussi le produit $\mathbb{P}^{i,i}_{l\times l}M\mathbb{P}^{j,j}_{c\times c}$.

Proposition 46. *Toute matrice M de type $l\times c$ a une unique écriture de la forme*

$$M = \sum_{u,v} M_{u,v}\mathbb{P}^{u,v}_{l\times c} = \sum_{u,v} \mathbb{P}^{u,u}_{l\times l}M\mathbb{P}^{v,v}_{c\times c}.$$

En effet on prend, justement, pour $M_{u,v}$ l'élément de M situé en place (u,v), c'est-à-dire à la croisée de la ligne u et de la colonne v. On dit que les $\mathbb{P}^{u,v}_{l\times c}$ forment la base canonique des positions, et que la formule $M = \sum_{u,v} M_{u,v}\mathbb{P}^{u,v}_{l\times c}$ est l'écriture de M sur la "base canonique" des positions, les $M_{u,v}$ étant les coordonnées de M sur cette base.

Proposition 47. *Soit M une matrice de type $l\times c$. Alors $\mathbb{P}^{u,v}_{l\times l}M$ est la matrice de type $l\times c$ obtenue en plaçant en ligne u la ligne v de M, et en complétant toutes les autres lignes par* 0. *Et $M\mathbb{P}^{u,v}_{c\times c}$ est la matrice de type $l\times c$ obtenue en plaçant en colonne v la colonne u de M, et en complétant les autres colonnes par* 0.

1.3.2 Transvections, transpositions, dilatations

Définition 19. *On appelle matrice de* transvection *de dimension l une matrice carrée de la forme*

$$\mathbb{V}^{u,v}_{l;\lambda} = \mathbb{I}_{l\times l} + \lambda\mathbb{P}^{u,v}_{l\times l}, \quad u \neq v.$$

Proposition 48. *La matrice $\mathbb{V}^{u,v}_{l;\lambda}M$ s'obtient à partir de M en ajoutant à la ligne u la ligne v. Et la matrice $M\mathbb{V}^{u,v}_{c;\lambda}$ s'obtient à partir de M en ajoutant à la colonne v la colonne u. La matrice $\mathbb{V}^{u,v}_{l;\lambda}$ est inversible, d'inverse*

$$(\mathbb{V}^{u,v}_{l;\lambda})^{-1} = \mathbb{V}^{u,v}_{l;-\lambda}.$$

Définition 20. *On appelle matrice de* transposition *de dimension l une matrice carrée de la forme*

$$\mathbb{T}_l^{u,v} = \mathbb{P}_{l\times l}^{u,v} + \mathbb{P}_{l\times l}^{v,u}, \quad u \neq v.$$

Proposition 49. *La matrice $\mathbb{T}_l^{u,v}M$ s'obtient à partir de M en échangeant la ligne u et la ligne v. Et la matrice $M\mathbb{T}_{c;\lambda}^{u,v}$ s'obtient à partir de M en échangeant la colonne v et la colonne u. La matrice $\mathbb{T}_l^{u,v}$ est inversible, d'inverse*

$$(\mathbb{T}_l^{u,v})^{-1} = \mathbb{T}_l^{v,u}.$$

Définition 21. *On appelle matrice de* dilatation *de dimension l une matrice carrée de la forme*

$$\mathbb{D}_{l;k}^{u} = (k-1)\mathbb{P}_{l\times l}^{u,u} + \mathbb{I}_l, \quad k \neq 0.$$

Proposition 50. *La matrice $\mathbb{D}_{l;k}^{u}M$ s'obtient à partir de M en multipliant la ligne u par k. Et la matrice $M\mathbb{D}_{c;k}^{u}$ s'obtient à partir de M en multipliant la colonne u par k. La matrice $\mathbb{D}_{l;k}^{u}$ est inversible, d'inverse*

$$(\mathbb{D}_{l;k}^{u})^{-1} = \mathbb{D}_{l;k^{-1}}^{u}.$$

Définition 22. *Une* matrice élémentaire *en dimension l est une matrice de transvection $\mathbb{V}_{l;\lambda}^{u,v}$, une matrice de transposition $\mathbb{T}_l^{u,v}$, ou une matrice de dilatation $\mathbb{D}_{l;k}^{u}$. Un mouvement élémentaire sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice M de type $l \times c$ est un qui se réalise par multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice élémentaire en dimension l (resp. en dimension c).*

Proposition 51. *La transposée de toute matrice élémentaire est encore une matrice élémentaire, et précisément :*

$$(\mathbb{V}_{l;\lambda}^{u,v})^{\top} = \mathbb{V}_{l;\lambda}^{v,u}, \quad (\mathbb{D}_{l;k}^{u})^{\top} = \mathbb{D}_{l;k}^{u}, \quad (\mathbb{T}_l^{u,v})^{\top} = \mathbb{T}_l^{v,u}.$$

Exercice 42. *Montrer qu'en faisant seulement des transpositions de lignes ou des transpositions de colonnes, on ne peut transformer la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qu'en trois autres matrices, et qu'on ne peut pas la transformer en $\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$.*

Exercice 43. *Si $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ puis $E = \begin{pmatrix} i & g & h \\ c & a & b \\ f & d & e \end{pmatrix}$, trouver deux matrices inversibles P et Q chacune composées de produit de matrices de transpositions telles que $D = PC$ et $E = DQ$.*
Montrer qu'en faisant uniquement des transpositions de lignes et des transpositions de colonnes, on ne peut pas transformer C en $F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix}$,

Exercice 44. *Exprimer les mouvements de la résolution de l'exercice 1.6, p.7 par produits par matrices élémentaires. En l'occurrence constater que la manipulation qui fait passer du système $\begin{cases} 3tb + 2m + 1M = 39 \\ 2tb + 3m + 1M = 34 \\ 1tb + 2m + 3M = 26 \end{cases}$ au système triangulaire $\begin{cases} 3tb + 2m + 1M = 39 \\ 0tb + 5m + 1M = 24 \\ 0tb + 0m + 36M = 99 \end{cases}$ peut se réaliser en multipliant à gauche la matrice des coefficients $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ par successivement $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, et décomposer chacune de ces 4 matrices en un produit de deux matrices élémentaires.*

1.3.3 Matrices spéciales, permutations chargées

Définition 23. *Une matrice carrée est dite* spéciale *si elle peut s'obtenir par produit de transvections.*

Proposition 52. *Les matrices* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$*, pour* $u \neq 0$ *sont* spéciales*, car elles s'écrivent :*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u^{-1} - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 53. *Toute matrice carrée* unipotente supérieure *M, soit telle que $M_{i,j} = 0$ pour tous les $i > j$ et que $M_{i,i} = 1$ pour tous les i, est spéciale. Et de même pour toute matrice* unipotente inférieure.

En effet on a, disons en dimension 3 : $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Définition 24. *On appelle* permutation *sur n éléments une matrice carrée $(P_{i,j})_{i\leq n, j\leq n}$, de type $n \times n$ telle que chaque ligne et chaque colonne ait tous ses termes nulles sauf un de valeur 1. Pour chaque j il existe donc un unique i tel que $P_{i,j} = 1$, et ce i est noté $\sigma(j)$, et pour chaque i il existe un unique j tel que $P_{i,j} = 1$, et ce j est noté $\sigma^{-1}(j)$, Alors P est exactement déterminée par la fonction $\sigma : j \mapsto \sigma(j) = i$ qui à chaque j associe la valeur $\sigma(j) = i$, et que l'on appelera la* bijection *de la permutation. On écrira $P = [\sigma]$, et $\sigma = \sigma_P$. On a donc*

$$P_{i,j} = [\sigma]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma(j) = i \\ 0 \text{ si } \sigma(j) \neq i \end{cases}.$$

On a donc

$$P = [\sigma] = \sum_{j\leq n} \mathbb{P}_{\sigma(j),j}.$$

Les transpositions sont donc des cas particuliers de permutations, la transposition $\mathbb{T}_l^{u,v}$ correspondant donc à la fbijection σ définie par $\sigma(j) = \begin{cases} j \text{ si } j \neq u, v \\ v \text{ si } j = u \\ u \text{ si } j = v \end{cases}$*. Cette σ sera notée (u, v), et donc par suite $\mathbb{T}_l^{u,v} = [(u, v)]$.*

Proposition 54. *1 — Si $[\sigma]$ et $[\tau]$ sont deux permutations sur n éléments, alors*

$$[\tau][\sigma] = [\tau \circ \sigma],$$

en notant $\tau \circ \sigma$ la fonction composée $j \mapsto \tau(\sigma(j))$ qui consiste à appliquer σ à j, ce qui donne $\sigma(j) = i$, puis à appliquer τ au résultat i, ce qui donne donc $\tau(\sigma(j))$.

Toute permutation $[\sigma]$ est inversible, et on a

$$[\sigma]^{-1} = [\sigma^{-1}].$$

Ainsi la composition des bijections est bien représentée par la multiplication matricielle desz permutation.

Définition 25. *On appelle* permutation chargée *un couple $(\delta, [\sigma])$ formée d'une permutation $[\sigma]$ et d'une matrice diagonale $\delta = \mathrm{diag}[d_1, \ldots, d_n]$; le produit $\delta[\sigma]$ est alors une matrice telle que chaque ligne et chaque colonne ait tous ses termes nulles sauf au plus un.*

Proposition 55. *Si $(\delta, [\sigma])$ est une* permutation chargée*, alors l'effet de la multiplication à gauche par $\delta[\sigma]$ sur une matrice M permute les lignes de M suivant σ, replaçant la ligne de niveau j au niveau $i = \sigma(j)$, puis multiplie chaque nouvelle ligne de niveau i par le coefficient d_i.*

1.4 Échelonnement de matrices et résolution de systèmes linéaires généraux

1.4.1 Échelonnement, rang, équivalence de matrices

Nous avons déjà une méthode pour résoudre explicitement certains systèmes linéaires carrés en dimension 2 ou 3, ceux qui sont inversibles, que l'on sait reconnaître. Mais pour les systèmes non-inverrsibles, ou de dimension plus que 3, ou non-carrés, l'usage des matrices inverses est dénué de sens. En revanche nous allons voir que dans tous les cas la vieille méthode fang-cheng par mouvements élémentaires, qui reviennent au niveau matriciel à des multiplications par des matrices élémentaires, peut toujours conduire à une résolution et discussion complète.

Nous considérons, comme exemple suffisamment riche pour expliquer la procédure en général, le problème de résoudre et discuter le système de 4 équations linéaires à 6 *inconnues* X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6, où les B_1, B_2, B_3 et B_4 sont 4 *paramètres donnés* :

$$\begin{array}{cl} 0X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 6X_4 + 0X_5 + 2X_6 & = B_1 \\ 0X_1 + 1X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 3X_5 + frac12X_6 & = B_2 \\ 0X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 7X_4 + 1X_5 + 2X_6 & = B_3 \\ 0X_1 + 1X_2 + 2X_3 + 5X_4 + 3X_5 + \frac{4}{3}X_6 & = B_4 \end{array}$$

Le système est noté $SX = B$ — où S est dite la matrice du système — soit, de façon détaillée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}.$$

La démarche vise à modifier S en une matrice E de la forme dite *échelonnée*, au sens précis suivant : Une matrice $M = (M_{i,j})$ étant donnée, de type $l \times c$, on associe à la i-ième ligne l'entier noté $\mathrm{pnzl}(i)$ (lire : premier non zéro de la ligne) qui vaut $c + i$ si tous les termes $M_{i,j}$ de la i-ième ligne sont nuls, et qui, sinon, vaut le premier j tel que $M_{i,j}$ soit non nul. La matrice M est dite *échelonnée* si, d'abord, la fonction $\mathrm{pnzl}(i)$ est strictement croissante, de $i = 1$ à $i = l$, et si, de plus, pour tout i, quand la i-ème ligne est non nulle, alors la $\mathrm{pnzl}(i)$-ième colonne comporte un 1 en la place $(i, \mathrm{pnzl}(i))$, et 0 partout ailleurs.

Dans notre cas la matrice S va être transformée en une matrice échelonnée de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & a & 0 & 0 & a' \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où donc on a : $\mathrm{pnzl}(1) = 2, \mathrm{pnzl}(2) = 4, \mathrm{pnzl}(3) = 5, \mathrm{pnzl}(4) = 10$.

On procède par une suite de *m modifications par combinaisons de lignes* — dans le cas explicite considéré on aura $m = 11$ —, que l'on effectue sur la matrice S du système, et simultanément sur la matrice $\mathbb{I}_4$, pour amener S à la forme échelonnée, pendant que $\mathbb{I}_4$ sera amenée, par la même suite de modifications donc, à une matrice notée U. Si M_i est la matrice 4×4 qui *code* l'opération i-ème, c'est-à -dire qui est telle que cette opération soit équivalente à la multiplication à gauche par M_i, on a donc, en posant $U_0 = \mathbb{I}_4$ et $S_0 = S$, que pour tout $0 \leq i \leq m$, avec ici $m = 11$, $U_{i+1} = M_i U_i$, $S_{i+1} = M_i S_i$, et on pose, à la fin : $M_{11}M_{10}M_9M_8M_7M_6M_5M_4M_3M_2M_1 = U_{11} = U$, $US = S_{11} = E$. Le système $SX = B$ devient donc $USX = UB$, soit $EX = UB$. En fait, comme on aura pris soin de n'effectuer que des opérations inversibles, le composé U sera une matrice inversible, et le nouveau système $EX = UB$ est rigoureusement équivalent au premier.

Expliquons les opérations sur trois exemples. L'opération de *transvection* M_1 consiste à ajouter à la deuxième ligne $-\frac{1}{2}$ fois la première, et l'opération inverse serait d'ajouter à la deuxième ligne $\frac{1}{2}$ fois la première ; on l'effectue pour annihiler dans S le coefficient 1 en position $(2,2)$. L'opération de *transposition* M_4 consiste à échanger les deuxième et troisième lignes, et l'opération inverse est la même ; on l'effectue pour faire remonter le coefficient non nul -2 en position $(3,4)$ et faire descendre à sa place le coefficient 0 en position $(2,4)$. L'opération de *dilatation* M_7 consiste à multiplier la troisième ligne par $\frac{1}{3}$, et l'opération inverse serait de multiplier la troisième ligne par 3 ; on l'effectue pour normaliser à la valeur 1 le coefficient 3 en position $(3,5)$. Etc. On dispose les calculs comme suit.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&1&2&3&3&\frac{1}{2}\\0&3&6&7&1&2\\0&1&2&5&3&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-1}{2}&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-1}{2}&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&0&3&\frac{-1}{2}\\0&3&6&7&1&2\\0&1&2&5&3&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\qquad M1 : L'2 \leftarrow L2 + \tfrac{-1}{2}L1.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{-3}{2}&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-1}{2}&1&0&0\\\frac{-3}{2}&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&0&3&\frac{-1}{2}\\0&0&0&-2&1&-1\\0&1&2&5&3&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\qquad M2 : L'3 \leftarrow L3 + \tfrac{-3}{2}L1.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-1}{2}&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-1}{2}&1&0&0\\\frac{-3}{2}&0&1&0\\\frac{-1}{2}&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&0&3&\frac{-1}{2}\\0&0&0&-2&1&-1\\0&0&0&2&3&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\qquad M3 : L'4 \leftarrow L4 + \tfrac{-1}{2}L1.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-3}{2}&0&1&0\\\frac{-1}{2}&1&0&0\\\frac{-1}{2}&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&-2&1&-1\\0&0&0&0&3&\frac{-1}{2}\\0&0&0&2&3&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\qquad M4 : L'2 \leftarrow L3 \;\&\; L'3 \leftarrow L2.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-3}{2}&0&1&0\\\frac{-1}{2}&1&0&0\\-2&0&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&-2&1&-1\\0&0&0&0&3&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0&4&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}\qquad M5 : L'4 \leftarrow L4 + L2.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&\frac{-4}{3}&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-3}{2}&0&1&0\\\frac{-1}{2}&1&0&0\\\frac{-4}{3}&\frac{-4}{3}&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&-2&1&-1\\0&0&0&0&3&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M6 : L'4 \rightarrow L4 + \tfrac{-4}{3}L3.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-3}{2}&0&1&0\\\frac{-1}{6}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{-4}{3}&\frac{-4}{3}&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&-2&1&-1\\0&0&0&0&1&\frac{-1}{6}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M7 : L'3 \leftarrow \tfrac{1}{2}L3.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{-4}{3}&\frac{-1}{3}&1&0\\\frac{-1}{6}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{-4}{3}&\frac{-4}{3}&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&-2&0&\frac{-5}{6}\\0&0&0&0&1&\frac{-1}{6}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M8 : L'2 \leftarrow L2 - L3.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{-1}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{-1}{2}&0\\\frac{-1}{6}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{-4}{3}&\frac{-4}{3}&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&0&0&1&0&\frac{5}{12}\\0&0&0&0&1&\frac{-1}{6}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M9 : L'2 \leftarrow \tfrac{-1}{2}L2.$$

$$\begin{pmatrix}1&-6&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-3&-1&3&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{-1}{2}&0\\\frac{-1}{6}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{-4}{3}&\frac{-4}{3}&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&4&0&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0&1&0&\frac{5}{12}\\0&0&0&0&1&\frac{-1}{6}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M10 : L'1 \leftarrow L1-6L2.$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{3}{2}&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{-1}{2}&0\\\frac{-1}{6}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{-4}{3}&\frac{-4}{3}&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&2&0&0&\frac{-1}{4}\\0&0&0&1&0&\frac{5}{12}\\0&0&0&0&1&\frac{-1}{6}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M11 : L'1 \leftarrow \tfrac{1}{2}L1.$$

Chacun des mouvements de lignes Mi indiqués est réalisé par multiplication à gauche par une matrice, indiquée ici dans la colonne de gauche, et que nous noterons aussi Mi. Dans la colonne du centre figure les résultats de la succession des mouvements considérés appliqués dans l'ordre à la matrice $\mathbb{I}_4$, et dans la colonne de droite les résultats de la succession des mouvements considérés appliqués dans l'ordre à la matrice S. On est donc arrivé à la forme *échelonnée* voulue $US = E$ soit

$$\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&4&6&0&2\\0&1&2&3&3&\frac{1}{2}\\0&3&6&7&1&2\\0&1&2&5&3&\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2&0&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&0&\frac{5}{12}\\0&0&0&0&1&-\frac{1}{6}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

avec d'ailleurs $U = (M11)(M10)(M9)(M8)(M7)(M6)(M5)(M4)(M3)(M2)(M1)$.

On peut encore peaufiner le travail, pour aller vers une forme *bi-échelonnée*, en faisant une suite de *modifications par combinaisons de colonnes*, que l'on effectue sur la matrice E du système $EX = UB$, et, simultanément sur la matrice $\mathbb{I}_6$. Ces modifications seront *codées* par des matrices N_j, de type 6×6, au sens où l'effet de la j-ème modification sera équivalent à la multiplication à droite par la matrice N_j. Le composé $N_1'N_2' = V$ nous donne alors $EV = R^{(3)}{}_{4\times 6} = R$ qui est la représentation du *rang* 3 dans le type 4×6. Pour pouvoir disposer nos calculs dans une succession verticale de multiplications à gauche, nous manipulerons plutôt les matrices transposées des matrices en jeu.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-1}{4}&\frac{5}{12}&\frac{-1}{6}&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-1}{4}&\frac{5}{12}&\frac{-1}{6}&0\end{pmatrix}$$

Ici donc on procède à une permutation de lignes dans $E^\top$ (soit des colonnes dans E), composée de 5 transpositions, et noté $N_1'^\top$: $M12-16 : L'1, L'2, L'3, L'4, L'5 \leftarrow L2, L4, L5, L3, L6$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\-2&0&0&1&0&0\\\frac{1}{4}&\frac{-5}{12}&\frac{1}{6}&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&-2&1&0&0&0\\0&\frac{1}{4}&0&\frac{-5}{12}&\frac{1}{6}&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ici nous avons un composé de 3 transvections élémentaires, noté $N_2'^\top$, à savoir $M17-19 : L'5 \leftarrow \frac{1}{4}L1 - \frac{5}{12}L2 + \frac{1}{6}L3$.

On est donc arrivé pour S, en 11+ 8 = 19 étapes élémentaires, en passant par la forme *échelonnée* $US = E$, à une forme $EV = R$, soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec d'ailleurs $V = (N'1)(N'2)$.

On a donc $USV = R$, une forme de matrice du type que nous appelons *représentation de rang* ou *bi-échelonnée* $R = R^{(3)}_{4\times 6}$, avec

$$R^{(3)}_{4\times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_{3\times 3} \\ \mathbb{O}_{1\times 3} & \mathbb{O}_{1\times 3} \end{bmatrix}.$$

Nous venons en fait de montrer, sur un exemple significatif, une procédure de décomposition qui vaut en toute généralité :

Proposition 56. *Pour toute matrice S de type $l \times c$ il existe une matrice inversible U de type $l \times l$ composée de matrices de transpositions, de transvections et de dilatations, il existe une matrice inversible V de type $c \times c$ composé de matrices de transpositions et de transvections, et il existe une matrice $R^{(r)}_{l\times c}$ bi-échelonnée, telles que*

$$USV = R^{(r)}_{l\times c}.$$

Et en fait r est unique, c'est-à-dire que si $USV = R^{(r)}_{l\times c}$ et $U'SV' = R^{(r')}_{l\times c}$, avec U, V, U' et V' inversibles, alors $r = r'$. .

Le reste étant déjà établi, prouvons que $r = r'$. Des hypothèses on tire $R^{(r')}_{l\times c} = U'SV' = U'U^{-1}R^{(r)}_{l\times c}V^{-1}V'$, et donc, avec $U'' = U'U^{-1}$ et $V'' = V^{-1}V'$ deux matrices inversibles, $R^{(r')}_{l\times c} = U''R^{(r)}_{l\times c}V''$.

Exercice 45. *Appliquer la méthode d'échelonnement pour réduire à la forme $R^{(r)}_{3\times 3}$, pour un r convenable, à la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & -15 & \frac{1}{1} \\ -1 & \frac{-5}{3} & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Définition 26. *Pour toute matrice S de type $l \times c$, le* rang $\operatorname{rg} S$ *est le nombre de lignes non-nulles dans la forme échelonnée E de S, autrement dit l'unique r tel que $USV = R^{(r)}_{l\times c}$, pour des U et V inversibles (lesquelles U et V ne sont pas uniques).*

Définition 27. *Deux matrices A et B de même type sont dites* équivalentes *si et seulement s'il existe deux matrices inversibles U et V telles que $UAV = B$*

Proposition 57. *Deux matrices A et B de même type sont équivalentes si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.*

Proposition 58. *Soit C une matrice carrée. Alors $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} C^\top$, et donc il existe des matrices inversibles A et B telles que $C^\top = BCA$.*

Exercice 46. *Trouver deux matrices inversibles A et B telles que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A$.*

1.4.2 Calcul d'inverses par échelonnement

Pour les matrices carrées S de type 2×2 et 3×3 nous avons vu un calcul direct de l'inverse — quand elle existe — par des formules explicites. Nous comprendrons plus loin ces formules et les généraliserons en termes de déterminants (p. **??**). Nous savons aussi trouver l'inverse d'une matrices carrée quelconque de type $d \times d$ si l'on connaît des coefficients $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n$ tels que l'on ait une identité $a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots a_1 A + a_0 \mathbb{I}_d = \mathbb{O}_d$., ce qui est notamment le cas on l'a vu lorsque $d = 2$ ou $d = 3$. Nous verrons plus tard que c'est toujours possible (théorème de Cayley-Hamilton, p. **??**). Nous avons compris aussi que la recherche de l'inverse revient à la résolution d'un certain système linéaire, et nous savons maintenant en principe résoudre tous les systèmes linéaires, par échelonnement, et donc trouver les inverses de matrices quelconques.

En fait la mise en œuvre de l'échelonnement de S fournit toujours l'inverse de S si S est inversible :

Proposition 59. *La matrice S de type $d \times d$ est inversible si et seulement si son rang est* $\mathrm{rg}\, S = d$*, et alors l'échelonnement $USV = \mathbb{I}_d$ fournit l'inverse de S, à savoir*

$$S^{-1} = VU.$$

Notamment une matrice S est inversible si et seulement si elle est composée comme produit de matrices élémentaires.

Lorsque S n'est pas inversibles, voire même non-carrée, alors la procédure au lieu de fournir l'inverse fournit ce qu'on appelle une *quasi-inverse*, ce que nous examinerons plus loin (p. 39).

1.4.3 Discussion d'un système et conclusion en forme d'inversion

Reprenons alors le fil de la résolution de notre exemple, et poursuivons la discussion. Le système à résoudre et à discuter $SX = B$, qui est devenu d'abord équivalent à $EX = UB$, avec $US = E$, revient maintenant, avec $EV = R$, et en posant $Y = V^{-1}X$, à

$$RY = UB, \quad \text{et} \quad X = VY,$$

soit, dans notre cas explicite :

$$\begin{array}{rcrrrr}
Y_1 & = & -\frac{3}{2}B_1 & -\frac{1}{2}B_2 & +\frac{3}{2}B_3 & +0B_4 \\
Y_2 & = & +\frac{2}{3}B_1 & +\frac{1}{6}B_2 & -\frac{1}{2}B_3 & +0B_4 \\
Y_3 & = & -\frac{1}{6}B_1 & +\frac{1}{3}B_2 & +0B_3 & +0B_4 \\
0 & = & -\frac{4}{3}B_1 & -\frac{4}{3}B_2 & +1B_3 & +1B_4
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcrrrrrr}
X_1 & = & +0Y_1 & +0Y_2 & +0Y_3 & +0Y_4 & +0Y_5 & +1Y_6 \\
X_2 & = & +1Y_1 & +0Y_2 & +0Y_3 & -2Y_4 & +\frac{1}{4}Y_5 & +0Y_6 \\
X_3 & = & +0Y_1 & +0Y_2 & +0Y_3 & +1Y_4 & +0Y_5 & +0Y_6 \\
X_4 & = & +0Y_1 & +1Y_2 & +0Y_3 & +0Y_4 & -\frac{5}{12}Y_5 & +0Y_6 \\
X_5 & = & +0Y_1 & +0Y_2 & +1Y_3 & +0Y_4 & +\frac{1}{6}Y_5 & +0Y_6 \\
X_6 & = & +0Y_1 & +0Y_2 & +0Y_3 & +0Y_4 & +1Y_5 & +0Y_6
\end{array}$$

On voit que le système proposé est résoluble si et seulement si $0 = -\frac{4}{3}B_1 - \frac{4}{3}B_2 + B_3 + B_4$; on peut par exemple en extraire $B_4 = \frac{4}{3}B_1 + \frac{4}{3}B_2 - B_3$, considéré alors comme 1 *paramètre donné superflu*, les trois autres B_1, B_2 et B_3 étant maintenant considérés comme 3 *paramètres donnés essentiels et indépendants*. Et quand le système est résoluble, la solution n'est pas unique, sa forme générale dépend de 3 *paramètres auxiliaires arbitraires indépendants* Y_4, Y_5 et Y_6, une expression possible étant donnée par :

$$\begin{array}{rcll}
X_1 & = & & +Y_6 \\
X_2 & = & [-\frac{3}{2}B_1 - \frac{1}{2}B_2 + \frac{3}{2}B_3] & -2Y_4 + \frac{1}{4}Y_5 \\
X_3 & = & & +Y_4 \\
X_4 & = & [\frac{2}{3}B_1 + \frac{1}{6}B_2 - \frac{1}{2}B_3] & -\frac{5}{12}Y_5 \\
X_5 & = & [-\frac{1}{6}B_1 + \frac{1}{3}B_2 + 0B_3] & +\frac{1}{6}Y_5 \\
X_6 & = & & +Y_5
\end{array}$$

ou encore, en combinaison de colonnes :

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\\X_6\end{pmatrix} = B_1\begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\0\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}\\0\end{pmatrix} + B_2\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} + B_3\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix} + Y_4\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + Y_5\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\\0\\-\frac{5}{12}\\\frac{1}{6}\\1\end{pmatrix} + Y_6\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure, écrivant en composés de matrices : le système proposé est résoluble si et seulement si

$$(B_4) = \begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix},$$

et alors la solution générale s'écrit, en fonction des trois premiers paramètres donnés B_1, B_2, B_3 et en fonctions de trois autres paramètres arbitraires indépendants Y_4, Y_5, Y_6, soit en fonction de Z, en posant

$$Z_1 = B_1,\ Z_2 = B_2,\ Z_3 = B_3,\ Z_4 = Y_4,\ Z_5 = Y_5,\ Z_6 = Y_6\ ;$$

elle s'écrit sous la forme $X = PZ$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\\X_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{4}&0\\0&0&0&1&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&0&-\frac{5}{12}&0\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0&0&\frac{1}{6}&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\Y_4\\Y_5\\Y_6\end{pmatrix},$$

ce qui est donc l'inverse de $Z = QX$:

$$\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\Y_4\\Y_5\\Y_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}024602\\01233\frac{1}{2}\\036712\\001000\\000001\\100000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\\X_6\end{pmatrix}.$$

On vérifierait que $PQ = \mathbb{I}_6$ et que $QP = \mathbb{I}_6$, mais cela serait superflu. En effet on a bien établit que pour X et Z de types 6×1 quelconques on a $X = PZ$ si et seulement si $Z = QX$, de sorte que, pour tout X on a $X = PQX$, et que pour tout Z on a $Z = QPZ$. En prenant pour X successivement les 6 colonnes de la matrice $\mathbb{I}_6$, et en regroupant les 6 égalités obtenues, on obtient $\mathbb{I}_6 = PQ$; et de même, en faisant varier Z, on a $\mathbb{I}_6 = QP$.

1.5 Résolution des systèmes linéaires par quasi-inversion

En fait, on peut aussi considérer la résolution et la discussion que nous savons faire par échelonnement de façon un peu plus abstraite, autour de la notion fondamentale de *quasi-inverse*, qui élargit convenablement la problématique de l'inversion.

Proposition 60. *1 — Pour toute matrice S de type $l \times c$ il existe au moins une matrice S' de type $c \times l$* quasi-inverse *de S, c'est-à-dire telle que*

$$SS'S = S.$$

2 — Pour une S donnée, toutes les S' possibles s'obtiennent, à partir de l'une quelconque d'entre elles notée S'_0, sous la forme $S' = S'_0SS'_0 + Y - S'_0SYSS'_0$, où Y est quelconque de type $c \times l$.

3 — Pour une S donnée, il n'existera une unique S' que si et seulement si S est inversible — ce qui implique que $l = c$ —, et en fait alors $S' = S^{-1}$, c'est-à-dire que la quasi-inverse est l'inverse.

Avec la propriété de bi-échelonnement on a U et V inversibles telles que $USV = R^{(r)}{}_{l\times c}$. La condition $SS'S = S$ revient, puisque U et V sont inversibles, à $USS'SV = USV$, et si l'on prend $S' = VR^{(r)}{}_{c\times l}U$, cela devient $USVR^{(r)}{}_{c\times l}USV = USV$, soit $R^{(r)}{}_{l\times c}R^{(r)}{}_{c\times l}R^{(r)}{}_{l\times c} = R^{(r)}{}_{l\times c}$, ce qui se vérifie immédiatement. On remarque pour le S' choisi ici, que l'on a aussi $S'SS' = S'$. Pour produire comme indiqué toutes les quasi-inverses de S, on utilise la proposition ci-après, pour l'équation $SXS = S$.

Enfin, pour l'unicité éventuelle, d'une part si S est inversible alors de $SS'S = S$ on tire $S' = S^{-1}SS^{-1} = S^{-1}$, et d'autre part, d'après la forme générale, si l'on a l'unicité, on a donc, pour tout Y, $S'_0 = S'_0SS'_0 + Y - S'_0SYSS'_0$. Comme on voit en faisant $Y = 0$, puis en reportant dans l'expression à Y quelconque, cela est équivalent aux deux conditions : $S'_0 = S'_0SS'_0$ et, pour tout Y, $Y = S'_0SYSS'_0$. La deuxième condition se reformule encore ainsi : pour tout Y et pour tout Z, on a $S'_0SY = Z$ si et seulement si $Y = ZSS'_0$, ce qui dit que les opérations de multiplication à gauche par S'_0S et de multiplication à droite par SS'_0 sont inverses l'une de l'autre, et sont donc, chacunes, inversibles ; et ainsi les matrices S'_0S et SS'_0 sont, chacunes, inversibles. Alors pour tout Z il existe un et un seul Y tel que $SY = Z$. En effet, d'une part, un tel Y existe, à savoir $Y = S'_0(SS'_0)^{-1}Z$; et, d'autre part, l'unicité est assurée par le fait que $SY_1 = SY_2$ signifie que $S(Y_1-Y_2) = 0$, d'où $S'_0S(Y_1-Y_2) = 0$, puis $Y_1-Y_2 = \mathbb{I}_c(Y_1-Y_2) = (S'_0S)^{-1}(S'_0S)(Y_1-Y_2) = (S'_0S)^{-1}0 = 0$, soit $Y_1 = Y_2$. Pour $Z = \mathbb{I}_l$, il vient une unique matrice D de type $c \times l$ telle que $SD = \mathbb{I}_l$. Comme, par un raisonnement analogue, pour tout Z' il existe un et un seul Y' tel que $Y'S = Z'$, on obtient aussi une unique matrice G de type $c \times l$ telle que $GS = \mathbb{I}_c$. On conclut alors de $SS'_0S = S$ que $SS'_0SD = SD$, soit $SS'_0 = \mathbb{I}_l$, et que $GSS'_0S = GS$, soit $S'_0S = \mathbb{I}_c$. Avec l'unicité, on a donc finalement $D = S'_0 = G$. Ainsi S'_0 est bien une véritable inverse à droite et à gauche de S. Ce qui n'est possible en fait que si $l = c$, comme on le voit à partir du bi-échelonnement $USV = R^{(r)}_{l\times c}$: comme U et V sont inversibles, S est inversible si et seulement si $R^{(r)}{}_{l\times c}$ l'est, ce qui n'a lieu que si $l = c = r$. En effet sinon cette matrice $R^{(r)}_{l\times c}$ comporte au moins une ligne ou une colonne nulle, ce qui implique que, pour toute matrice G ou bien toute matrice D $GR^{(r)}_{l\times c}$ comporte une colonne nulle ou bien $R^{(r)}_{l\times c}D$ comporte une ligne nulle : les deux ne peuvent donc pas être en même temps l'une $\mathbb{I}_c$ et l'autre $\mathbb{I}_l$.

Proposition 61. *On considère l'équation matricielle*

$$SXT = B,$$

où les types des matrices connues et inconnues sont tels que la composition et l'égalité aient un sens. On choisit une quasi-inverse quelconque S' de S et une quasi-inverse quelconque T' de T, soit — ce qui est toujours possible — des matrices S' et T' telles que $SS'S = S$ et $TT'T = T$. Alors :

1 — L'équation $SXT = B$ a au moins une solution si et seulement si $S'BT'$ en est une, soit :

$$SS'BT'T = B.$$

2 — Si l'équation $SXT = B$ a au moins une solution, alors la solution générale s'écrit sous la forme

$$X = S'BT' + Y - S'SYTT',$$

où Y est une matrice quelconque du type convenable pour que la composition et l'égalité aient un sens.

Premièrement, si la condition est satisfaite, alors il y a une solution, à savoir $S'BT'$; et réciproquement, s'il existe une solution X, alors on a $B = SXT = SS'SXTT'T = SS'BT'T$. Deuxièmement, si X est de la forme indiquée, alors c'est bien une solution, car $SXT = S(S'BT'+Y-S'SYTT')T = SS'BT'T+SYT)SS'SYTT'T = B+SYT-SYT = B$; et réciproquement si X est solution, soit $SXT = B$, alors $X = S'BT' + X - S'SXTT'$, et cela est bien de la forme prescrite, en prenant $Y = X$.

Bibliographie

[1] Amiot A., *Éléments de géométrie*, éditions Dezobry, E. Magdeleine et Cie, Paris, (1859).

[2] Ampère, *Essai sur la Philosophie des Sciences*.

[3] Apollonius, *Les coniques d'Apollonius de Perge*, traduction de Paul Ver Eecke, 1921, Blanchard, (1963).

[4] Archimède, *Les uvres complètes d'Archimède*, tome I et II, Vaillant-Carmanne S. A., 1960.

[5] Argand J.-R., *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, (1806) Paris, Gauthiers-Villars, (1874).

[6] Aristote, *Metaphysique*,

[7] Aristote, *Organon, III, Les premiers analytiques*,

[8] Arnaudiès J.-M., Bertin J.*Groupes, algèbres er géométrie, 1, 2 et 3*, Ellipses, (1993, 1995, 2001).

[9] Axler S., *Linear Algebra Done Right*, Springer, (1997) .

[10] Backes F., *La méthode du pentasphère oblique mobile et quelques-unes de ses applications*, Acad. Royal Belgique, Mémoires (sciences), tome XXVI, Fasc. 2 (1951).

[11] , Barbarin P.,*La géométrie non-euclidienne*,

[12] Barbin E., *Méthode et invention du courbe au 17ème siècle*, Thèse d'habilitation, Université de Lille I, (1997).

[13] Barbin E., *La révolution mathématique du XVIIème siècle*, Ellipses, 2006.

[14] Baucry J.-M., Que vivent les cas d'égalités des triangles, emt Repères-irem, 5, octobre 1991,éd. Topiques, Pont-à-Mousson, pp.43-49.

[15] Beckman F.S. and Quarles Jr D.A., On isometries of Euclidean spaces, *Proc. Amer. Soc.* 4, 810-815, (1953).

[16] Bellavitis G., *Exposition de la méthode des équipollences*, Gauthier-Villars, Paris, (1874), (publié en italien en 1854).

[17] de Berg M., van Kreveld M., Overmars M., Schwarzkopf O., *Computational geometry (Algorithms ans applications)*, Springer, (1997).

[18] Al-Biruni, *Le livre de la détermination des cordes*, achevé vers 1027.

[19] Al-Biruni-Suter, *Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abul-Raihan Muh. el-Biruni*, traduit par H. Suter, Bibliotheca mathematica 11 (1910), pp.11-78.

[20] Blumenthal K., *Distance geometry*, 2ème éd., Chelsea, (1970).

[21] Bonola R., *Non-euclidean geometry*, trad. anglaise de 1911, par H.S. Carslaw, Dover (1955).

[22] Borsuk et Szmielew,

[23] Blumenthal L. M., *A modern view of geometry*, Dover, (1961).

[24] Bouteloup J., *Calcul matriciel*, Que sais-je ? 92, PUF (1961).

[25] Brannan D. A., Esplen M. F., Gray J. J., *Geometry*, cambridge U. P., (1999).

[26] , Cauchy, Sur les mouvements que peut prendre un système invariable libre, ou assujetti à certaines conditions, *Œuvres complètes*, 2ème série, t. VII.

[27] Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1889, 1ère édition (1837).

[28] Chasles M., Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques, présenté à la Société Philomathique en 1829, et imprimé dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (1878).

[29] Chatelet A., *Arithmétique et algèbre moderne I, II, III*, PUF (1966).

[30] Campbell R., *La trigonométrie*, Que sais-je ? 692, PUF (1963).

[31] Coolidge J. L., *A history of the conic sections and quadric surfaces*, Clarendon press, Oxford, (1945).

[32] Cox D., Little J. et O'Shea D., *Ideals, Varieties, and Algorithms (An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra)*, Springer, (1992)

[33] Dahan-Dalmedico et Peiffer J., *Une histoire des mathématiques*, 2ème édition, Le Seuil, (1986).

[34] Dedron P. et Itard J., *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, (1959).

[35] Delachet A., *Calcul vectoriel et calcul tensoriel*, Que sais-je ? 418, PUF (1950).

[36] Delachet A., *La géométrie analytique*, Que sais-je ? 1047, PUF (1963).

[37] Delachet A., *Le calcul tensoriel*, Que sais-je ? 1336, PUF (1969).

[38] Dingeley F. et Fabry E. *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliqué*, Volume 3 - Géométrie plane, fasc. 1, 25 juin 1911, III-17, fasc. 2, 3 août 1915, III-18, Coniques, Systèmes de coniques, réedition Gabay, (1992).

[39] Dieudonné J., *Abrégé d'histoire des mathématiques*, 2 vol., Hermann, Paris, (1978).

[40] Escofier J.-P., *Toute l'algèbre de la licence*, Dunod, (2006).

[41] Efimov N., *Formes quadratiques et matrices*, Ed. Mir (1976).

[42] Efimov N., *Éléments de géométrie analytique*, Ed. Mir (1976).

[43] Euclide, *Les Œuvres d'Euclide*, traduites littéralement par F. Peyrard, 1819, nouveau tirage Ed. Albert Blanchard, Paris,1966.

[44] Euclide, *Les éléments*, éd. bilingue, trad. Kayas G. J., 2 vol., Editions du CNRS, 1978.

[45] Euclide, *Les éléments*, trad. Vitrac B., PUF (1990, 1994, 1998, 2001).

[46] Euclide, *The thirteen Books of the Elements*, traduction de Heath Thomas, Cambridge University Press, 1908, reprint Dovern, vol. I. (1963).

[47] Eutocius, *Commentaire sur le traité de la sphère et du cylindre*, publié en suite dans l'édition française par Paul Ver Eecke des œuvres d'Archimède, édition Vaillant-Carmanne, tome II, p. 610 et 603, (1960).

[48] F. G.-M., *Exercices de géométrie*, éditions mame et Fils à Tours, Gigord à Paris, 6ème édition, 1920 (1ère édition en 1875), réédition Gabay, (1991).

[49] Fourrey E., *Curiosités Géométriques*, Vuibert, (1ère éd. Paris 1907), augmentée d'une étude d'Évelyne Barbin, (1994).

[50] Fresnel J., *Algèbre des matrices*, Hermann, (1997).

[51] Fresnel J., *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens*, Hermann, (1999).

[52] Fuhrmann W., *Synthetische beweise Planimetrischer Sätze*, Berlin, (1890).

[53] Fujiwara M., Eine satz über konvexe geschlossene Kurven, *Sci. Rept. Tôhoku Univ.*, vol. 9, PP. 289-294, (1920)

[54] Gabriel P., *Matrices, géométrie, algèbre linéaire*, Cassini, (2001).

[55] GaußC. F., *Œuvres, en 1811 (Werke, 8, 90-92), en 1831 (Werke, 2, 95-148).*

[56] Gergonne J. D., (éditeur), *Annales de Mathématiques*, vol. 4 (1813-1814) et vol. 5 (1814-1815).

[57] Gramain A., *Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris, (1997).

[58] Greenberg M., *Euclidean and Non-Euclidean geometries*, W.H. Freeman and Company, (1974).

[59] Guitart R., *La pulsation mathématique*, L'Harmattan, (1999).

[60] Hauchecorne B. et Suratteau D., *Des mathématiciens de A à Z*, Éllipses, (1996).

[61] Herodote,

[62] Herz-Fischler R., *A Mathematical History of the Golden number*, Dover (1998).

[63] Hilbert D., *Les fondements de la géométrie*, édition critique par Paul Rossier, de 1899, Dunod, (1971).

[64] Hirakawa, On a characteristic Property of the Circle, *Tôhoku Math. J.*, vol. 37, pp. 175-178, (1933).

[65] Hombu, Notes in Closed Convexes Curves, *Tôhoku Math. J.*, vol. 33, pp. 72-77, (1930).

[66] Huntington E. V., A set of postulates for abstract geometry exposed in terms of the simple relation of inclusion, *math. Ann.*, LXXIII (1916), 522-559.

[67] Irem (Commission Histoire et épistémologie), *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Ellipses, (1993).

[68] Iversen B., *Hyperbolic Geometry*, CUP, (1992).

[69] Jaouiche K., *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Vrin, 1986.

[70] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford U. P., (1972).

[71] Kojima, On the Curvature of the Closed Convex Curve, *Tôhoku Math. J.*, vol. 21, pp. 15-20, (1922).

[72] Kubota, Notes in Closed Convexes Curves, *Tôhoku Math. J.*, vol. 21, pp. 21-23, (1922)

[73] Lagrange, Sur les Pyramides, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, (1773).

[74] Lancaster P., *Lambda-matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, (1966), reprint Dover (2002).

[75] Lay D. C, *Alèbre linéaire. Théorie, exercices & applications*, De Boeck, (2004).

[76] Legendre, *Éléments de Géométrie*, 12ème éd., Didot, Paris, (1823).

[77] Lespinard V. et Pernet R., *Géométrie*, éditions André Desvigne, Paris, (1963).

[78] Lloyd G. E. R., *Une histoire de la science grecque*, Points Sciences S92, La Découverte, (1990).

[79] Loomis E. S., *The pythagorean proposition*, The national Council of teachers of Mathematics, (1972).

[80] McWeeny R., *Symmetry*, Pergamon Press (1963), reprint Dover (2002).

[81] Mannheim A., *Nouvelles Annales de mathématiques*, numéro 6, p. 419, (1850).

[82] Mannheim A., *Principes et développements de Géométrie Cinématique*, Gauthier-Villars et fils, Paris, (1894).

[83] J.-C. Martzloff J.C., *A History of Chinese Mathematics*, Springer, (1997).

[84] Mehta M. L., *Matrix Theory, Selected Topics ans Useful results*, Les ditions de physique, Hindustan P. C., (1989).

[85] Menger K., Untersechungen über allgemeine Metrik, *Math. Annalen*, 100 (1928), 75-163

[86] Miquel, *Journal de Liouville*, (1844).

[87] Modenov P. S., A.S. Parkhomenko A. S., *Geometric Transformations, vol. 1*, Acad. Press, (1965),

[88] Negrepontis S., *The anthyphairetic nature of Plato's dialectics.*

[89] Neugebauer O., *Les sciences exactes dans l'antiquité*, Actes Sud, 1990.

[90] Pappus d'Alexandrie, La collection mathématique, trad. paul Ver Eecke, Albert Blanchard, 2 vol., (1982).

[91] Pascal B., Œuvres complètes, Seuil, 1963.

[92] Penrose R., *À la découverte des lois de l'univers* , Odile Jacob, (2007).

[93] Petersen , *Problèmes de constructions géométriques*, Gauthiers-Villars, 1880, réédition Jacques Gabay, (1990).

[94] Pettofrezzo A. J., *Matrices and transformations* , Prentice-hall (1966), reprint Dover (1978).

[95] Pichot A., *La naissance de la science*, folio 154 et 155, Gallimard, (1991).

[96] Pieri M., La geometria elementere instituita sulle nozione di *punto* e *sfer*, memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie terza, XV (1908), 345-450.

[97] Plane H., *Démontrer avec les aires*, fascicule 1, IREM des Pays de Loire, Centre du Mans, octobre (2000)

[98] Pont J.-C., *L'aventure des parallèles*, Hermann, Peter Lang (1986).

[99] Postnikov M., *Leçons de géométrie I. Gómétrie analytique*, Ed. Mir (1981).

[100] Postnikov M., *Leçons de géométrie II. Algèbre linéaire et géométrie différentielle*, Ed. Mir (1981).

[101] Pouzergues R.,

[102] Proclus de Lycie, *Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide*, traduction (avec introduction et notes) de Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, (1948).

[103] Ptolémée, *Almageste*, IIème Siècle après J.-C.

[104] Rashed R. (sous la direction de) *Histoire des sciences arabes*, 3 vol., Seuil, (1997).

[105] Rey A., *L'apogée de la science technique grecque, l'essor de la mathématique*, Albin Michel, 1948.

[106] Roberval, Observation sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1666-99, t. VI,, pp. 1à 70, (1730).

[107] Rouché et Comberousse, *Traité de géométrie, première partie.*

[108] Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte.*

[109] Schoenflies A., *La géométrie du mouvement*, Gauthier-Villars, Paris, (1893).

[110] Serenus d'Antinoë, *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône*, traduction de Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, (1929).

[111] Serre D., *Les Matrices, Théorie et pratique*, Dunod, (2001).

[112] Sommerville D. M. Y., emt Bibliography of Non-Euclidean Geometry, London, Harrison and son, 1911.

[113] Spain B., *Analytical Conics* , Pergamon Press, (1957), reprint Dover (2007).

[114] , Struik D. J., *Lectures on Analytic ans Projective Geometry*, Addison-Wesley, (1953).

[115] Tarski A., Les fondements de la géométrie des corps, Krakow, 1929, republié dans A. Tarski, *Logique, Sémantique, Métamathématique*, 1923-1944, tome 1, pp. 27-34, Armand Colin, Paris, (1972).

[116] Tannery P., *La géométrie grecque*, Gauthier-Villars, Paris, 1887, Jacques Gabay, Paris, (1988).

[117] Toth I., *Palimpseste, Propos avant un triangle*, PUF, (2000).

[118] Turnbull H. W., *The theory of Determinants, Matrices, and invariants*, .

[119] Turnbull H. W. and Aitken A. C., *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Blackie & Son limited, (1932).

[120] Valentine A. , A Characteristic Property of the Circle in the Minkowski Plane, *Am. Math. Monthly*,vol. 58, pp. 485-487, (1951).

[121] Valentine A., *Convex sets*, McGraw-Hill, (1964).

[122] Velpry C., *Euclide l'africain ou la géométrie restituée*, 2001, 67 p.

[123] Wessel C., *Sur la représentation analytique de la direction : un essai*, Mémoires de l'Académie Royale du Danemark, (1799).

[124] Wu-Teh Hsiang, Another Characterization of Circles, *Am. Math. Monthly*, vol. 69, pp. 142-143, (1962).

[125] Wu Wen-Tsün, On the Decision Problem and the Mechanization of Theorem Proving in Elementary Geometry, *Scientia Sinica*, 21 (1978), 157-179.

[126] Yale P. B., *Geometry and Symmetry* , Holden-Day Inc, (1968), reprint Dover (1988).

[127] Yanagihara,On Some Properties of Simply Closed Convex Curves and Surfaces, *Sci. Rept. Tôhoku Univ.*, vol. 4, pp. 65-77, (1917).

[128] G. M. Ziegler G. M., *Lectures on polytopes*, Springer, (1995).