Examen MC2

(19 mai 2010, de 15h30 à 18h30, amphi 5C et 13E)

NB. Les calculettes et les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 — 1 — On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $u = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le triplet $\beta = (u, v, w)$ forme-t-il une base de R^3 ?

2 — Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ (en discutant sur $a, b \in \mathbb{R}$) : $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice 2 — Calculer les primitives :
1— $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$,
2 — $\int x^2 \sin x\,dx$.
3 — $\int \cos x\, e^x\,dx$.
4 — $\int \sqrt{1-\cos x}\,dx$.
5 —$\int \frac{1}{x^2+7x+6}\,dx$.

Exercice 3 — On considère la spirale d'Archimède d'équations paramétrées

$$\begin{cases} x = & t\cos t \\ y = & t\sin t \end{cases}$$

et sur cette spirale le point $O = (0,0)$ et le point $A = (2\pi, 0)$.
1 — Montrer que la longueur L de l'arc OA s'exprime par l'intégrale $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt$.
2 — On pose $g(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer $g'(x)$.
3 — Calculer L.

Exercice 4 — Soit dans $\mathbb{R}^3$ le paraboloïde elliptique

$$z = -\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}\right),$$

et soit sur ce paraboloïde un point $P = (u, v, w)$.
1 — Donner l'équation du plan tangent T_P au paraboloïde en ce point P.
2 — Trouver le lieu des points P tels que T_P passe par le point $Q = (0, 0, 2)$.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^2$ on considère la parabole

$$z = 1 - x^2,$$

un point $M = (u, 1-u^2)$ sur cette parabole, avec $u \in [0,1]$, et Δ_M la tangente en M à la parabole.
1 — Déterminer l'équation de la tangente Δ_M, et les points $A = (a,0)$ et $B = (0,b)$ où Δ_M rencontre les axes de coordonnées. Avec $O = (0,0)$, soit $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab$ l'aire du triangle OAB. Exprimer a, b et $\mathcal{A}$ en fonction de u.
2 — Montrer que $\mathcal{A}$ admet un minimum local lorsque $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
3 — Quelle est la valeur minima de $\mathcal{A}$ lorsque u parcourt $[0,1]$?

Exercice 6 — Soit

$$f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y),$$

pour $x > 0$ et $y > 0$.
1 — Montrer que parmi les points (x,y) avec $x > 0$ et $y > 0$, le seul point qui puisse être un extrema local est le point $K = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.
2 — Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $K = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. En déduire que K est un point de maxima local de f.

Exercice 7 — 1 —Trouver la solution générale de l'équation différentielle :

$$y' + \sin(2x)y = 0 \qquad [1]$$

2 — Par variation de la constante, donner une solution particulière de :

$$y' + \sin(2x)y = e^{(\cos x)^2} \qquad [2]$$

3 — Donner la solution générale de [2].

Exercice 8 — Soit les équations différentielles

$$y'' + y' - 2y = 0 \qquad [1]$$

$$y'' + y' - 2y = 1 - x^2 \qquad [2]$$

1 — Donner la solution générale de [1].
2 — Chercher une solution particulière de [2] de la forme $y = Ax^2 + Bx + C$.
3 — Donner la solution générale de [2].
4 — Donner la solution $y_1(x)$ de [2] qui vérifie aussi $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$.