MC2, Examen du 24 juin 2009

Durée de l'épreuve : 2h30
Documents et calculettes ne sont pas autorisés

Exercice 1. — Soit la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ d'équation $\begin{cases} x(t) & = t^3 - t\sin t \\ y(t) & = t^2 + \sin^2 t \end{cases}$.

1 — Déterminer la tangente en $O = (0,0)$ (soit pour $t = 0$) à la courbe $\mathcal{C}$, et la nature du point O sur cette courbe.
2 — Faire un dessin montrant l'allure de la courbe au voisinage de O.

Exercice 2. — On considère $f(x,y) = x^2 + 3y^2$.
1 — Montrer que $(0,0,0)$ est le seul point où le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ est horizontal.
2 — Donner le développement limité de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f au point $(0,0)$. En déduire si le point $(0,0)$ est ou n'est pas un extremum local de $f$dans $\mathbb{R}^2$.
3 — Déterminer les extrema locaux de f sous la condition $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 3. — 1 — Montrer que pour $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ on a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{dt}{\tan t} = \ln(\sin x) - k$, où k est une constante que l'on précisera.
2 — Montrer que pour $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier $n > 1$ on a

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{dt}{(\tan t)^n} = -\frac{1}{(n-1)}\left[\frac{1}{(\tan x)^{n-1}} - 1\right] - \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{dt}{(\tan t)^{n-2}}.$$

3 — Montrer que pour $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ on a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{dt}{(\tan t)^2} = -\frac{1}{\tan x} - x + 1 + \frac{\pi}{4}$.
4 — Calculer $\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{dt}{(\tan t)^3}$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{dt}{(\tan t)^4}$.
5 (Cette question ne figurait pas dans l'examen du 24 juin 2009 ; elle est ajoutée ici pour compléter et conclure l'exercice) — Soit $\frac{1}{\tan x} = \cot x$ et pour tout $n > 0$:

$$g_{2n}(x) = -\frac{\cot^{2n-1} x}{2n-1} + \frac{\cot^{2n-3} x}{2n-3} - \frac{\cot^{2n-5} x}{2n-5} + \cdots - (-1)^{n-1} \cot x + (-1)^{n-1} x,$$
$$g_{2n+1}(x) = -\frac{\cot^{2n} x}{2n} + \frac{\cot^{2n-2} x}{2n-2} - -\frac{\cot^{2n-4} x}{2n-4} + \cdots + (-1)^n \frac{\cot^2 x}{2} + (-1)^n \ln\sin x.$$

Exprimer à l'aide de ces fonctions les intégrales $\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{dt}{(\tan t)^{2n}}$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{dt}{(\tan t)^{2n+1}}$.

Exercice 4. — 1 — Calculer les intégrales a) $\int_1^2 \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$, b) $\int_0^1 e^x \cos(2x)\,dx$.
2 — Calculer la primitive $\int_0^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$.

Exercice 5. — 1 — Trouver a et b tels que, pour tout x sauf x = 0 et $x = -1$ on ait $\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$.
2 — Trouver y fonction de $x > 0$ qui soit solution générale de $y' = \frac{x+2}{x(x+1)}y$,
3 — Trouver y fonction de $x > 0$ qui soit solution de $y' = \frac{x+2}{x(x+1)}y + \frac{2x}{x(x+1)}$.

Exercice 6. — 1 — Exprimer la solution générale de $y'' + 10y' + 24y = 0$.
2 — Donner une solution particulière de $y'' + 10y' + 24y = e^x + \cos x$.
3 — Donner la solution générale de $y'' + 10y' + 24y = e^x + \cos x$.
4 — Trouver la fonction y de x qui soit solution de $y'' + 10y' + 24y = e^x + \cos x$, et qui soit telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.