Examen MC2

(28 juin 2010, 12h à 15h, amphis 2A et 5C)

NB. Les calculettes et les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 — 1 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B = A^{-1}$.

Exercice 2 — 1 — On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $u = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le triplet $\beta = (u, v, w)$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$?

2 — Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ (en discutant sur $a, b \in \mathbb{R}$) : $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice 3 — Calculer les primitives :
1— $\int \frac{x+1}{x-1}\, dx$,
2 — $\int x \sin 2x\, dx$.
3 — $\int \cos x\, e^x\, dx$.
4 — $\int \sqrt{1 - \sin x}\, dx$.
5 —$\int \frac{1}{x^2+x-2}\, dx$.

Exercice 4 — On considère la fonction $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \cos(2\pi xy)$, et la surface Σ d'équation $z = f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1 — Donner l'équation du plan tangent à Σ au point $A = A(u, v) = (u, v, f(u, v))$, sous la forme $px + qy + rz + s = 0$ avec donc p, q, r, s des fonctions de u et v que l'on précisera.

2 — Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(1, 1)$ de la fonction f. Ce point est-il un point d'extremum local de f ?

Exercice 5 — On considère l'équation différentielle $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$. Trouver la solution générale par séparation des variables. Mettre cette solution sous la forme $y = \frac{x+C}{1-Cx}$, où C est une constante.

Exercice 6 — 1 — Donner la solution générale de l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ $(E1)$, puis une solution de $y'' + 4y = \sin x$ $(E2)$, puis la solution générale de$(E2)$, et donner la solution y_2 de $(E2)$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$.

2 — Donner la solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$ $(E3)$, puis une solution de $y'' + y = \sin x$ $(E4)$, puis la solution générale de $(E4)$, et donner la solution y_4 de $(E4)$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$.

3 — Montrer que lorsque $x \to +\infty$ l'amplitude $|y_2|$ des oscillations de la solution y_2 de $(E2)$ déterminée en 1 —, reste bornée, tandis que l'amplitude $|y_4|$ des oscillations de la solution y_4 de $(E4)$ déterminée en 2 —, augmente indéfiniment (phénomène de résonance).