# MC2, Examen 5 juin 2009

Durée de l'épreuve : 2h30
Documents et calculettes ne sont pas autorisés

**Exercice 1** — Soit la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ d'équation $\begin{cases} x(t) &= \sin^3 t - \sin t \\ y(t) &= \sin^4 t + \sin^2 t \end{cases}$.
Déterminer la tangente en $O = (0,0)$ (soit pour $t = 0$) à la courbe $\mathcal{C}$, et la nature du point $O$ sur cette courbe. Faire un dessin montrant l'allure de la courbe au voisinage de $O$.

**Exercice 2**. — On considère $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x-y}$.
1— Montrer que dans le premier quadrant ouvert $Q = \{(x,y); x > 0 \text{ et } y > 0\}$ le seul point $(x,y)$ où le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ soit horizontal est le point $(1,1)$.
2 — Donner le développement limité de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $f$ au point $(1,1)$. En déduire si le point $(1,1)$ est ou n'est pas un extremum local de $f$dans $Q$.
3 — Le point $(1,1)$ est-il un point d'extremum local de la fonction $f(x,y)$ sous la condition $x^2 + y^2 = 2$ ?

**Exercice 3**. — On considère la courbe $\begin{cases} x(t) &= \frac{t^2}{2} \\ y(t) &= \frac{1}{3}\left(\sqrt{2t+1}\right)^3 \end{cases}$.
1 — Exprimer l'élément de longueur $ds = \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}dt$ sur la courbe, en fonction de $t$.
2 — Calculer la longueur $s(t) = \int_0^t ds$ de l'arc de la courbe qui va du point $A = (0, \frac{1}{3})$ (associé à $t = 0$) au point $M(t) = (x(t), y(t))$ (associé à $t \geq 0$).
3 — Calculer le rayon de courbure $R(t)$ de la courbe au point $M(t)$.

**Exercice 4**. — 1 — Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$y' = \cos(x)y$$

2 — Résoudre

$$y' = \cos(x)y + e^{\sin(x)}.$$

**Exercice 5**. — 1 — Calculer les intégrales a) $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx$, b) $\int_0^1 x\cos^2 x\,dx$.
2— a) Par le changement de variable $t = \frac{u^2-3}{2u}$ calculer la primitive $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt$.
b) Par intégration par partie et en utilisant 2—a), calculer la primitive $\int_0^x \sqrt{t^2+3}\,dt$.
3 — a) Calculer la dérivée de $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ (on suppose $x \geq 1$).
b) Trouver $a$ et $b$ tels que, avec $t = au + b$ on ait $2t^2 + 2t - 1 = \frac{3}{2}(u^2 - 1)$, et en déduire, avec 3— a), la valeur de $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{2t^2+2t-1}}$.

**Exercice 6** – On se propose de trouver la fonction $y$ de $x$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$ et qui soit solution de l'équation différentielle

$$(E) : \; y'' - 3y' + 2y = 10\cos(x) + (6x+1)e^{-x}.$$

Pour cela, on considére les étapes suivantes :

1. Donner la solution générale $y_0$ de $(E1) : \; y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Donner une solution particulière $y_1$ de $(E2) : \; y'' - 3y' + 2y = 10\cos(x)$.
3. Donner une solution particulière $y_2$ de $(E3) : \; y'' - 3y' + 2y = (6x+1)e^{-x}$.
4. Montrer que $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $(E)$.
5. Donner la solution générale $y_4$ de $(E)$, puis conclure en trouvant la solution $y$ de l'équation différentielle $(E)$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.