Examen blanc MC2

(6 mai 2010, de 14h30 à 16h30, amphi 5C)

NB. Les calculettes et les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 — 1 — On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $u = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -4 \\ a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le triplet $\beta = (u, v, w)$ forme-t-il une base de R^3 ?

2 — Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ (en discutant sur $a, b \in \mathbb{R}$) : $\begin{pmatrix} a & 0 & -\frac{9}{2} \\ 1 & a & -4 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2– 1 — Calculer: a) $\int \frac{x+2}{x+1}\, dt$, b) $\int \tan x\, dx$, c) $\int xe^x dx$, d) $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\, dx$.

2 — Par le changement de variable $x = 2\tan z$ calculer $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

Exercice 3 — On considère la cycloïde d'équations paramétrées $\begin{cases} x = & t - \sin t \\ y = & 1 - \cos t \end{cases}$.

1) — Montrer que la longueur d'une arche s'exprime par l'intégrale $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt$.

2) — Calculer L.

Exercice 4 — 1 — Soit un point $P = (u, v)$, avec $u, v \geq 0$, sur l'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$. Donner l'équation de la tangente T_P à l'ellipse en ce point P.

2 — On note A et B les intersections de T avec les axes d'abscisses et d'ordonnées, et, avec $O = (0, 0)$, l'aire du triangle OAB. Déterminer P de sorte que l'aire de OAB soit minimale, et donner la valeur de cette aire minimale.

Exercice 5 — 1 — Soit $f(x, y) = x^3 + xy + 1$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$. En déduire que $(0, 0)$ n'est pas un point de minimum local de f.

2 — Montrer que f n'admet de minimum local en aucun point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 — Résoudre l'équation différentielle $2y - xy' = 0$ puis l'équation $2y - xy' = 2$.

Exercice 7 — 1) Soit l'équation différentielle $y'' + 3y' - 4y = 0 \quad [1]$. En donner la solution générale.

2) On considère l'équation diférentielle $y'' + 3y' - 4y = x^2 \quad [2]$

2-a) Chercher une solution particulière de [2] de la forme $y = Ax^2 + Bx + C$.

2-b) Donner la solution générale de [2].

2-c) Donner la solution $y_1(x)$ de [2] qui vérifie aussi $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$.