MC2 : 321 exercices *

incluant 11 sujets de partiels et examens

et 2 corrigés

PROGRAMME : Calcul des dérivées. Développements limités, formule de Taylor. Variations et graphes de courbes explicites $y = f(x)$.
Courbes paramétrées planes, tangente à une courbe, rebroussements, inflexions, courbure. Asymptotes.
Fonction de plusieurs variables à valeurs réelles, gradient, plan tangent à une surface. Calcul d'extrema à deux variables, libres ou liés.
Calcul intégral : calculs approchés d'intégrales, recherche des primitives. Longueurs de courbes, abscisse curviligne.
Familles de courbes. Notion d'enveloppe. Equation différentielles : équations du premier ordre linéaires réelles ou complexes, équations réelles à variables séparées ; équations linéaires réelles ou complexes à coefficients constants d'ordre 2.

APPROXIMATIONS, FORMULE DE TAYLOR, DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS, COURBES EXPLICITES $y = f(x)$

Exercice 1 *1 — On considère un cercle de centre O et de rayon 1, et sur ce cercle le côté AB d'un polygone régulier inscrit de n côtés, le côté AC d'un polygone régulier inscrit de $2n$ côtés, le milieu E de AB. On pose $c = AB$, $c' = AC$, $d = 2OE$. En considérant les triangles rectangles AEO et AEC exprimer c' en fonction de c.*
2 — En commençant par le cas $n = 4$ et donc $c = \sqrt{2}$, calculer les côtés et périmètres des polygones réguliers inscrits de 8 côtés, 16 côtés, 32 côtés, 64 côtés, 128 côtés. Quelles approximations de π en déduisez-vous ?

Exercice 2 *Montrer que la série $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots$ converge, et que sa limite e est approximée à la sixième décimale par $2 + \frac{54^2+41^2}{80^2}$.*

Exercice 3 *On considère la valeur de la "constante" (sic) g exprimée en m/s^2 en fonction de la latitude (exprimée en degrés) au niveau de la mer à la surface de la terre, donnée par : $g(0) = 9,780350$, $g(15) = 9,783800$, $g(30) = 9,793238$, $g(45) = 9,806154$, $g(60) = 9,819099$, $g(75) = 9,828593$, $g(90) = 9,832072$. Déterminer un polynôme de degré 6, soit $g(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5 + a_6\theta^6$, prenant aux points indiqués les valeurs indiquées.*

Exercice 4 *On veut montrer que, pour tout $x > 0, x \neq 1$, on a : $\frac{\ln x}{x^3-1} < \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^3+x}$.*
1 — On considère $f(x) = \frac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x} - 3\ln x$. Montrer que $f'(x) = \frac{x^6-3x^5+3x^4-2x^3+3x^2-3x+1}{(x^3+x)^2}$.
2 — Observer que le numérateur $p(x)$ de la fraction $f'(x)$ vérifie que $p(x) = x^6 p(\frac{1}{x})$, et peut donc s'écrire comme un polynôme du troisième degré en $x + \frac{1}{x}$, et montrer que $f'(x) = \frac{x^3}{(x^3+x)^2}\big((x+\frac{1}{x})^3 - 3(x+\frac{1}{x})^2 + 4\big)$.
3 — Montrer que $X^3 - 3X^2 + 4 = (X+1)(X-2)^2$, et $f'(x) = \frac{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)(x-1)^2}{x^2(x^2+1)^2}$. En déduire que $f'(x) > 0$ pour $x > 0$, que $f'(1) = 0$.
4 — Constater que $f(x)$ est strictement croissante pour $x > 0$, et en particulier que $f(x) > f(1)$ pour $x > 1$, soit $\frac{\ln x}{x^3-1} < \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^3+x}$ pour $x > 1$.
5 — Pour $0 < x < 1$, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans 4 —, obtenir $\frac{\ln x}{x^3-1} < \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^3+x}$ pour $0 < x < 1$.

*René Guitart, 12 mai 2008, version 4.

Exercice 5 *Revoir les formules suivantes :*

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+2})\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2})\\
(1+x)^b &= 1+bx+\frac{b(b-1)}{2!}x^2+\frac{b(b-1)(b-2)}{3!}x^3+\cdots\\
&\quad +\frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\\
a^x &= e^{x\ln(a)}=1+\frac{\ln^2(a)}{2!}x^2+\frac{\ln^3(a)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\ln^n(a)}{n!}x^n+o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)
\end{aligned}$$

Exercice 6 *Déterminer les développements limités suivants :*
1 — $f(x)=\tan x$ *à l'ordre 5 en* $x_0=0$.
2 — $f(x)=e^x\ln(1+x)$ *à l'ordre 3 en* $x_0=0$.

Exercice 7 *Déterminer les développements limités suivants :*
1 — $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-x+1}$ *à l'ordre 3 en* $x_0=0$.
2— $f(x)=\cos(\sin x)$ *à l'ordre 4 en* $x_0=0$.

Exercice 8 *1 — Donner le développement limité de* $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ *à l'ordre 2 en* $+\infty$.
2 — Que pouvez vous en déduire graphiquement ?

Exercice 9 *Dans les cas suivant montrer l'existence d'une asymptote oblique pour* (C) *courbe représentative de* f *et déterminer la position locale de* (C) *par rapport à son asymptote :*
1 — $f(x)=(x+1)e^{\frac{1}{x}}$.
2 — $f(x)=\frac{x^2-1}{2x}-x^2\ln(\frac{1+x}{x})$.

Exercice 10 *Soit* $f(x)=x^2e^{\frac{x}{x^2-1}}$
1 — Déterminer l'ensemble de définition de f.
2 — Déterminer le développement limité de f*, et de* $\frac{f(x)}{x^2}$*, à l'ordre 3, au voisinage de* $\pm\infty$.
3 — En déduire que la courbe (C) *représentative de* f *admet une parabole asymptote* (P) *et préciser la position locale de* (C) *par rapport à* (P).

Exercice 11 *Etudier la forme à l'origine des courbes suivantes :*
1 — $y=2x-x\sin x$
2 — $y=x^3-6\sin x$

Exercice 12 *On pose* $f(x)=(x^4(x-1))^{\frac{1}{5}}$.
1 — Etudier sa forme au point $x=0$*, et au point* $x=\frac{4}{5}$.
2 — Comparer à l'infini à la droite $y=x-\frac{1}{5}$.
3 — Dessiner le graphe de f.

Exercice 13 *Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction* $(\tan(x))^2$.

Exercice 14 *Étudier la forme à l'origine de la courbe* $y = 2x - x\sin x$.

Exercice 15 *1 — Étudier la forme à l'origine de la courbe* $y = x^3 - 6\sin x$.
2 — Étudier la forme au point $x = 1$ *de la courbe* $y = (x-1)^3 - 6\sin(x-1)$.

Exercice 16 *1 — Calculer le développement limité au voisinage de* $\frac{\pi}{4}$ *à l'ordre 3 de la fonction* $\cos x - \sin x$.
2 — Donner la tangent au point $\frac{\pi}{4}$ *à la courbe* $y = \cos x - \sin x$, *et préciser la position localement de la courbe par rapport à cette tangente.*

Exercice 17 *On pose* $f(x) = (x^4(x-1))^{\frac{1}{5}}$. *Étudier sa forme au point* $x = 0$, *et au point* $x = \frac{4}{5}$. *Comparer à l'infini à la droite* $y = x - \frac{1}{5}$. *Dessiner le graphe de* f.

Exercice 18 *La fonction* $y = \arctan x$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *entier par :* $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}[$ *et* $x = \tan y$. *Sans calculs représenter la courbe avec ses asymptotes horizontales. Montrer que* $y' = \frac{1}{1+x^2}$, *et retrouver par le calcul la forme de cette courbe en* 0.

Exercice 19 *Étudier la fonction* $f(x) = x\arctan\frac{x}{x-1}$, *notamment en* 1 *(limites à droite et à gauche), en* 0 *(tangente et position locale par rapport à la tangente) et à l'infini (asymptote oblique et position par rapport à cette symptote).*

Exercice 20 *Montrer que la courbe* $y = \sqrt{x^4 - x^3}$ *est asymptotique à la parabole d'équation* $y = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$, *et qu'elle est sous cette parabole.*

Exercice 21 *Dessiner la parabole* $y = x^2 - x$ *et la courbe* $y = x^2 - x + \frac{\sin x}{x}$. *Constater qu'elles sont asymptotes l'une à l'autre.*

Exercice 22 [Théorème de Roche (1864)] *Soit* $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisfaisant aux hypothèses ci-dessus du théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre* n, *et soit* $g\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisfaisant aux hypothèses de Taylor-Lagrange à l'ordre* q, *et telle que sa dérivée d'ordre* $q+1$, $g^{(q+1)}(x)$, *ne s'annule pas sur* $[a,b]$. *Alors il existe un* $0 < \theta < 1$ *tel que*

$$\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f''a) - \cdots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}{g(b) - g(a) - (b-a)g''a) - \cdots - \frac{(b-a)^q}{q!}g^{(q)}(a)} = \frac{q!}{n!}(b-a)^{n-q}(1-\theta)^{n-q}\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(b-a)\big)}{g^{(q+1)}\big(a+\theta(b-a)\big)}.$$

Donc si $f(u+h) = P_{f,u,n}(u+h) + R_{f,u,n}(u+h)$, *avec* $P_{f,u,n}(u+h)$ *la partie régulière, soit* $P_{f,u,n}(u+h) = f(u) + f'(u)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!}h^n$, *pour tout choix de* $g\ : [u, u+h] \to \mathbb{R}$ *satisfaisant aux hypothèses de Taylor-Lagrange à l'ordre* q, *et telle que sa dérivée d'ordre* $q+1$, $g^{(q+1)}(x)$, *ne s'annule pas entre* u *et* $u+h$, *il existe un* $0 < \theta < 1$ *tel que, avec* $P_{g,u,q}(u+h) = g(u) + g'(u)h + \cdots + \frac{g^{(q)}(u)}{q!}h^q$, *et* $g(u+h) = P_{g,u,q}(u+h) + R_{g,u,q}(u+h)$, *on ait :* $R_{f,u,n}(u+h) = \frac{q!}{n!}h^{n-q}(1-\theta)^{n-q}\frac{f^{(n+1)}(u+\theta h)}{g^{(q+1)}(u+\theta h)}R_{g,u,q}(u+h)$.

Exercice 23 *Si* $f^{(n+1)}(x)$ *ne s'annule pas entre* u *et* $u+h$, *montrer en choisissant* q *et* g *dans le théorème de Roche, que le reste dans la formule de Taylor pour* f *entre* u *et* $u+h$ *s'écrit* $R_{f,u,n}(u+h) = \frac{h^n(1-\theta)^n}{n!}\big[f^{(n)}(u+h) - f^{(n)}(u)\big]$. *Ce reste est donc alors majoré en valeur absolue par* $\frac{h^n}{n!}\big|f^{(n)}(u+h) - f^{(n)}(u)\big|$. *Cela vaut pour la fonction* e^x *entre* 0 *et* h.

COURBES PARAMETREES, REBROUSSEMENTS, INFLEXIONS, ASYMPTOTES, COURBURES

Exercice 24 *On considère la droite Δ_1 passant par $A = (0,1)$ et $B = (-2,7)$, la droite Δ_2 perpendiculaire à Δ_1 et passant par $C = (1,1)$, le cercle Γ_1 passant par A, B et C, le cercle Γ_2 de centre $D = (9,-5)$ et rayon 8.*
1 — Écrire les équations implicites de Δ_1, Δ_2, Γ_1, Γ_2.
2 — Écrire des équations paramétrées de Δ_1, Δ_2, Γ_1, Γ_2.
3 — Déterminer les intersections des droites et cercles Δ_1, Δ_2, Γ_1, Γ_2.
4 — Faire un dessin.

Exercice 25 *Soit les cercles Γ et Γ' d'équations $x^2+y^2-6x = 0$ et $x^2+y^2-2x-2y-3 = 0$.*
1 — Déterminer les points communs P et Q à Γ et Γ'.
2 — Donner l'équation de la droite passant par P et Q, d'une part grâceà la détermination explicite de ces points trouvée en 1 —, et d'autre part directement, par simple combinaison des équations de Γ_1 et Γ'.
3 — Trouver l'équation de la courbe du second degré constituée des deux tangentes extérieures communes T_1 et T_2 à Γ et Γ'.
4 — Faire un dessin.

Exercice 26 *1 — Dessiner les deux cercles $(x-1)^2+y^2 = 1$ et $x-6)^2+y^2 = 1$, et leurs quatre tangentes communes, dont deux extérieures T_1 et T_2 et deux intérieures T_3 et T_4.*
2 — Donner l'équation de $G_e = T_1 \cup T_2$, et l'équation de $G_i = T_3 \cup T_4$.
3 — Déterminer $G_e \cap G_i$.

Exercice 27 *1 — On considère une courbe plane définie par* $\begin{cases} x & = f(u,v) \\ y & = g(u,v) \\ F(u,v) & = 0 \end{cases}$, *avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la tangente à cette courbe à son point courant.*
2 — Faire le calcul dans le cas où $x = u^2+v^2, y = 2uv, u^3+v^3-C = 0$, avec C un paramètre donné.

Exercice 28 *Soit γ la courbe plane paramétrée* $\begin{cases} x(t) & = \sqrt{\frac{1+2t^2}{1+t^2}} \\ y(t) & = t\sqrt{\frac{1+2t^2}{1+t^2}} \end{cases}$.
1 — Montrer que l'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$) est une asymptote verticale de γ, quand $t \to \pm\infty$.
2 — On considère le point fixe $A = (-1,0)$, le point $M(t) = (x(t), y(t))$ variable sur γ, la droite $AM(t)$ et son intersection $Q(t)$ avec l'asymptote $x = 0$. Montrer que la longueur $Q(t)M(t)$ est constante. En déduire une construction géométrique de γ.

Exercice 29 *1 — On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ de centre $O = (0,0)$, de foyers $F_1 = (-c,0)$ et $F_2 = (c,0)$ et demi-grand axe a, soit le lieu des points $M = (x,y)$ tels que $MF_1 + MF_2 = 2a$. Montrer que les points $A = (a,0)$, $A' = (-a,0)$, $B = (0,b)$, $B' = (0,-b)$, avec $b = \sqrt{a^2-c^2}$ sont sur $\mathcal{E}$. Former l'équation cartésienne de $\mathcal{E}$.*
2 — Montrer que la tangente au point (x_0,y_0) a pour équation $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$.
3 — Montrer qu'une droite $Ax+By+C = 0$ est une tangente à l'ellipse si l'on a $A^2a^2+B^2b^2-C^2 = 0$.

Exercice 30 *Énoncer dans quelles circonstances un point d'une courbe paramétrée plane est non-stationnaire ou stationnaire, régulier sans inflexion ou avec inflexion, de rebroussement de 1ère ou 2ème espèce. Faire des dessins des quatre formes. Donner explicitement des exemples simples.*

Exercice 31 *Trouver les points d'inflexions de* $\begin{cases} x(t) & = 2t + \frac{1}{2t+1} \\ y(t) & = t^2 - \frac{1}{2t+1} \end{cases}$.

Exercice 32 *Préciser quand une courbe paramétrée admet des droites asymptotes verticales, horizontales, obliques. Donner des exemples.*

Exercice 33 *Démontrer que pour la courbe* $M(t) = (x(t), y(t))$ *le rayon de courbure* $R(t)$ *et le centre de courbure* $C(t) = (X_C(t), Y_C(t))$ *au point courant* $M(t)$ *sont liés par*

$$\vec{MC}.\vec{M}' = \vec{0}, \quad \vec{MC}.\vec{M}'' = \vec{M}'^2,$$

et qu'ils sont donc respectivement :

$$\begin{aligned} C(t) &= \left(x + \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x''y' - x'y''}, y - \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x''y' - x'y''} \right) \\ R(t) &= \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x''y' - x'y''|} \end{aligned}$$

Exercice 34 *1 — Montrer que la parabole* $x = t, y = \frac{1}{2}t^2$ *admet pour développée (lieu de ses centres de courbures) la courbe paramétrée* $\begin{cases} x & = -t^3 \\ y & = \frac{3}{2}t^2 + 1 \end{cases}$.
2 — Montrer que cette développée admet un point de rebroussement.

Exercice 35 *Soit* Γ *la courbe* $\begin{cases} x(t) = & a\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y(t) = & b\frac{2t}{1-t^2}, \end{cases}$, *et soit* Δ *la courbe d'équation implicite* $x^2 - xy + 2y^2 + 1 = 0$.
1 — Reconnaître les courbes Γ *et* Δ.
2 — Déterminer les points d'intersections de Γ *et* Δ.

Exercice 36 *Soit la courbe paramétrée* $\begin{cases} x(t) = & \cos t \\ y(t) = & \sin t \end{cases}$.
1 — Donner l'ensemble de définition ainsi que le domaine le mieux adapté.
2 — Etudier le(s) éventuel(s) point(s) stationnaire(s).
3 — Etudier le sens de variation des fonctions coordonnées.
4 — Tracer la courbe.

Exercice 37 *Soit la courbe paramétrée* $\begin{cases} x(t) = & \cos t \\ y(t) = & \sin t \end{cases}$. *Reparamétrer cette courbe de sorte que les points* $(0, 1)$ *et* $(0, -1)$ *soient des points stationnaires.*

Exercice 38 *Soit la courbe paramétrée* $\begin{cases} x(t) = & \cos t \\ y(t) = & \sin t \end{cases}$. *En écrivant* $\cos t$ *et* $\sin t$ *en fonction de* $u = \tan \frac{t}{2}$, *obtenir une* paramétrisation rationnelle *de cette courbe, soit une paramétrisation de la forme* $\begin{cases} x(u) = & \frac{A(u)}{Q(u)} \\ y(u) = & \frac{B(u)}{Q(u)} \end{cases}$, *avec* $A(u)$, $B(u)$ *et* $Q(u)$ *des polynômes en* u *à coefficients rationnels.*

Exercice 39 *On considère la courbe paramétrée* $\begin{cases} x(t) = & \frac{2}{1+t^2} \\ y(t) = & \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$, *où* $t \in \mathbb{R}$.
1 — Calculer les dérivées et les variations de $x(t)$ *et* $y(t)$.
2 — Déterminer les points à tangentes verticales ou horizontales.
3 — Trouver une équation implicite de la courbe
4 — Dessiner la courbe.

Exercice 40 *Soit (avec* $a, b > 0$*) la courbe paramétrée :* $\begin{cases} x(t) = & a\cos t \\ y(t) = & b\sin t \end{cases}$ *avec* $t \in [0, 2\pi]$.
De quelle courbe s'agit-il ? Faire un dessin.

Exercice 41 *1 — Former une équation implicite de la courbe* $\begin{cases} x & = x_0 \pm a\cosh t \\ y & = y_0 \pm b\sinh t \end{cases}$.

Exercice 42 *Soit la courbe paramétrée d'équations* $\begin{cases} x(t) = & 2t + t^2 \\ y(t) = & 2t - \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$.
Étudier sa forme à l'origine $t = 0$.

Exercice 43 *Soit la courbe paramétrée d'équations* $\begin{cases} x(t) = & 2t + t^2 \\ y(t) = & 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$.
1 — Montrer qu'elle admet une parabole asymptote quand $t \to \pm\infty$.
2 — Déterminer les points doubles.

Exercice 44 *Étudier* $\begin{cases} x(t) = & \cos t \\ y(t) = & \frac{\sin^2 t}{2+\sin t} \end{cases}$.

Exercice 45 *On considère la courbe paramétrée* $\begin{cases} x(t) = & \sin\frac{t}{3} \\ y(t) = & \sin\frac{t}{2} \end{cases}$.
1 — Déterminer les périodes de $x(t)$ *et* $y(t)$*, leurs parité ou imparité, leurs variations.*
2 — Montrer que $(0, 0$ *est un point double, et déterminer les tangentes en ce point.*
3 — Déterminer les deux autres points doubles avec leurs tangentes.
4 — Déterminer les quatre points à tangentes verticales, les six points à tangentes horizontales.
5 — Dessiner la courbe.

Exercice 46 *1 — Étudier la courbe paramétrée dite* cissoïde de Dioclès. $\begin{cases} x(t) = & \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = & \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$.
2 — Calculer rayon de courbure et centre de courbure au point courant $M(t) = (x(t), y(t))$.

Exercice 47 *Montrer que le rayon de courbure au point courant* (x_0, y_0) *de l'hyperbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *vaut* $R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b\neg 4}\right)^{\frac{3}{2}}$. *Montrer que la courbure maximale est aux sommets, où elle vaut* $\frac{b^2}{a}$.

Exercice 48 *Trouver les points d'inflexions de* $\begin{cases} x(t) = & 2t + \frac{1}{2t+1} \\ y(t) = & t^2 - \frac{1}{2t+1} \end{cases}$.

Exercice 49 *Étudier la* cycloïde $\begin{cases} x(t) = & t - \sin t \\ y(t) = & 1 - \cos t \end{cases}$.

Exercice 50 *Étudier la* cardioïde $\begin{cases} x(t) = & \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \\ y(t) = & \frac{4t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$.

Exercice 51 *Étudier* $\begin{cases} x(t) = & \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = & \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$.

Exercice 52 *Soit* $\begin{cases} x(t) = & \sin t \\ y(t) = & \frac{\cos^2 t}{2-\cos t} \end{cases}$.
Montrer que $M"(\frac{\pi}{2}) = (-1, 2)$, *que* $M^{(3)}(\frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{2})$. *Nature du point* $M(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 53 *On considère la courbe paramétrée donnée par* $\begin{cases} x(t) = & \frac{t^2+4t+4}{2(t+1)} \\ y(t) = & \frac{t^2+4t+12}{4(t+3)} \end{cases}$.
1 — Donner l'ensemble de définition.
2 — Donner les développement limités de x et y en 0 à l'ordre 3.
3 — En déduire les valeurs de $x(0)$, $x'(0)$, $x'''(0)$ et $x'''(0)$. Même chose pour les valeurs de y et de ses 3 premières dérivées en 0.
4 — Faire l'étude des points stationnaires et asymptotes s'ils existent.
5 — Faire l'étude et tracer la courbe.

Exercice 54 *1 — Donner les coordonnèes du centre de courbure $C(t)$ à l'ellipse au point courant $M(t) = (a\cos t, b\sin t)$.*
2 — Déterminer si la développée de l'ellipse (le lieu de ses centres de courbure) possède des points de rebroussement.

Exercice 55 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit Γ_λ la courbe paramétrée d'équations* $\begin{cases} x(t) = & t^2 + \lambda \\ y(t) = & t^3 + 3\lambda t \end{cases}$.
1 — Discuter, suivant λ, de l'existence de points de rebroussements et de points d'inflexions sur Γ_λ. 2 — Donner des équations paramétrées de l'ensemble J des points du plan qui sont points d'inflexion d'une courbe Γ_λ. Tracer J.

Exercice 56 *On pose $x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, y(t) = t^2 + \frac{2}{t-2}$. Étudier la forme de la courbe au voisinage du point de paramètre $t = 1$.*

Exercice 57 *On considère la courbe plane paramétrée $M(t) = \left(x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{(t-2)^2}{t^2-1}\right)$. Montrer qu'elle admet la droite $y = 1$ pour asymptote pour t au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et la droite $x = -\frac{1}{2}$ pour t au voisinage de -1. En calculant $\lim_{t\to 1} \frac{x(t)}{y(t)}$ et puis $\lim_{t\to 1} \left(y(t) - \frac{1}{2}x(t)\right)$, montrer que la droite $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$ est une asymptote oblique pour t au voisinage de $+1$. Montrer que le point $M(2)$ est un point de rebroussement de première espèce. Montrer que la pente au point $M(2)$ est $\frac{1}{3}$. Dessiner la courbe.*

Exercice 58 *Déterminer la courbure au sommet et en un point de la parabole $y = ax^2$.*

Exercice 59 *On considère l'ellipse $M(t) = (a\cos t, b\sin t)$, et l'on pose $a^2 - b^2 = c^2$. Montrer que le centre de courbure au point $M(t)$ est $C(t) = (\frac{c^2}{a}\cos^3 t, \frac{-c^2}{b}\sin^3 t)$.*

Exercice 60 *Montrer que la courbe plane $M(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$ est la trajectoire d'un point fixé sur un cercle qui roule sur une droite fixe. On l'appelle la* cycloïde. *Déterminer ses points de rebroussement. Déterminer sa courbure en chaque point. Montrer que le lieu de ses centres de courbures est une autre cycloïde.*

Exercice 61 *Déterminer les points multiples de la courbe $M(t) = (t^2-2t, t^2+t^{-2})$.*

Exercice 62 *Trouver le centre de symétrie de la courbe d'équation $x(t) = t^3-3t^2+2t$, $y(t) = 2t^3-6t^2+13t+11$.*

Exercice 63 *Soit Δ la courbe paramétrée de point courant $D(t) = (t, \frac{1}{t})$ et Γ la courbe paramétrée de point courant $C(t) = (\frac{3t^4+1}{2t^3}, \frac{t^4+3}{2t})$.*
1 — Monter que la droite $D(t)C(t)$ est normale à Δ en $D(t)$ et tangente en Γ en $C(t)$.
2 — Quel est le rayon de courbure $R(t)$ de Δ au point $D(t)$?
3 — Monter que $C(t)$ est le centre de courbure de Δ en $D(t)$.

Exercice 64 *Soit la courbe* $\begin{cases} x &= t+\frac{1}{t} \\ y &= t-\frac{1}{t}+5 \end{cases}$.
1 — Déterminer les points à tangente verticale, et les points situés sur l'axe des x.
2 — Déterminer les asymptotes.
3 — Montrer que la courbe a pour équation implicite $(x+y-5)(x-y-5) = 4$. Retrouver les asymptotes.
4 — Dessiner la courbe.
5 — Reprendre les questions 1 — à 4 — pour la courbe $\begin{cases} x &= t+\frac{m}{t} \\ y &= t-\frac{n}{t}+5 \end{cases}$, *en discutant éventuellement en raison des valeurs des paramètres m et n.*

Exercice 65 *Soit γ une courbe paramétrée plane de la forme* $\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases}$. *On introduit les deux courbes $\gamma_{\pm a}$ d'équations* $\begin{cases} x &= f(t) \pm \frac{ag'(t)}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}} \\ y &= g(t) \mp \frac{af'(t)}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}} \end{cases}$, *qui sont dites parallèles à γ à la distance a.*
1 — Montrer, sans calculs, en raisonnant sur le fait que le cercle osculateur approxime la courbe au second ordre, que le rayon de courbure $R_{\pm a}$ de $\gamma_{\pm a}$ au point $M_{\pm a}(t)$ de paramètre t en fonction de celui R de γ au point $M(t)$ de paramètre t et de a vaut $R_a = R \pm a$, que $\gamma_{\pm a}$ admet en $M_{\pm a}(t)$ le même centre de courbure que γ au point $M(t)$.
2 — Démontrer le résultat du 1 — par un calcul direct, éventuellement allégé du fait d'utiliser les formules de Frenet.

Exercice 66 *1 — Soit $\mathcal{E}_{a,b}$ l'ellipse d'équations paramétrées* $\begin{cases} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= b\sin t \end{cases}$, *avec $a, b \in \mathbb{R}$. Dessiner les deux courbes $\mathcal{E}_{a,b}$ et $\mathcal{E}_{b,a}$, leurs points communs, et expliquer comment on passe de l'une à l'autre.*
2 —Soit $\mathcal{E}_{a,b;\lambda,p,q}$ la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= a\cos\lambda\cos t - b\sin\lambda\sin t + p \\ y(t) &= a\sin\lambda\cos t + b\cos\lambda\sin t + q \end{cases}$, *avec a, b, $\lambda, p, q \in \mathbb{R}$ des paramètres fixés. Montrer que $\mathcal{E}_{a,b;\lambda,p,q}$ est une ellipse, et que toute ellipse s'obtient ainsi, pour des valeurs convenables des a, b, λ, p, q.*
3 — Soit $m = (u, v)$ un point du plan, extérieur à $\mathcal{E}_{a,b}$, soit T' et T'' les tangentes à $\mathcal{E}_{a,b}$

menées de m, touchantes en K' et K'', et soit $\pi = \pi_{\mathcal{E}}(m)$ la droite passant par K et K', appelée la polaire *de m par rapport à $\mathcal{E}_{a,b}$. Déterminer T', T'', K', K'' et $\pi_{\mathcal{E}}(m)$.*
4 — Observer que les formules trouvées pour $\pi_{\mathcal{E}}(m)$ ont un sens sans supposer que m soit extérieur à $\mathcal{E}_{a,b}$; on décide donc de prendre ces formules pour définition analytique de $\pi = \pi_{\mathcal{E}}(m)$ y compris lorsque m n'est pas extérieur à $\mathcal{E}_{a,b}$.
5 — Déduire de 3 — et 4 — la détermination de la polaire $\pi_{\mathcal{E}}(m)$ de m par rapport à toute ellipse spécifiée sous la forme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{a,b;\lambda,p,q}$.

Exercice 67 *1 — Soit $\mathcal{H}_{a,b}$ l'hyperbole d'équations paramétrées $\begin{cases} x(t) &= a\cosh t \\ y(t) &= b\sinh t \end{cases}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Dessiner les deux courbes $\mathcal{H}_{a,b}$ et $\mathcal{H}_{b,a}$, leurs points communs, et expliquer comment on passe de l'une à l'autre.*
2 —Soit $\mathcal{H}_{a,b;\lambda,p,q}$ la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= a\cos\lambda\cosh t - b\sin\lambda\sinh t + p \\ y(t) &= a\sin\lambda\cosh t + b\cos\lambda\sinh t + q \end{cases}$, avec $a, b, \lambda, p, q \in \mathbb{R}$ des paramètres fixés. Montrer que $\mathcal{H}_{a,b;\lambda,p,q}$ est une hyperbole, et que toute hyperbole s'obtient ainsi, pour des valeurs convenables des a, b, λ, p, q.
3 — Déterminer le centre et les asymptotes de $\mathcal{H}_{a,b;\lambda,p,q}$.

Exercice 68 *1 — Vérifier que l'on a en $x = 0$ les développements limités à l'ordre 3 : $u(t) := \sin t\cos t = t - \frac{2}{3}t^3 + t^3\epsilon_1(t)$ et $v(t) := \ln(2\cos t + \sin t) = \ln 2 + \frac{1}{2}t - \frac{5}{8}t^2 + \frac{5}{24}t^3 + t^3\epsilon_2(t)$.*
2 — Donner le développement à l'ordre 3 en $t = 0$ de la courbe $\begin{cases} x &= u(t) \\ y &= v(t) \end{cases}$.
3 — Dessiner la courbe au voisinage de $t = 0$.

Exercice 69 *Si l'on considère une courbe Γ d'équations paramétrées $\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases}$, les deux branches Γ_{-k} et Γ_k de* courbes parallèles *à la distance k sont $\begin{cases} x &= f \pm \frac{kg'}{\sqrt{f'^2/g'^2}} \\ y &= \mp\frac{kf}{\sqrt{f'^2+g'^2}} \end{cases}$.*
1 — Dessiner les courbes parallèles à un cercle, à une ellipse.
2 — Calculer la courbure au point courant d'une courbe parallèle $\Gamma_{\pm k}$ en fonction de la courbure au point correspondant de Γ.

Exercice 70 *Étudier la cardioïde $\rho = a(1+\cos\theta)$ en passant par une paramétrisation cartésienne $\begin{cases} x &= a\cos t(1+\cos t) = \frac{a}{2} + a\cos t + \frac{a}{2}\cos 2t \\ y &= a\sin t(1+\cos t) = a\sin t + \frac{a}{2}\sin 2t \end{cases}$.*

Exercice 71 *Dessiner la courbe $y^2 = a^2(x^4 - x^6)$.*

COORDONNEES POLAIRES

Exercice 72 *1 — On considère en coordonnées polaires la courbe Γ d'équation $\rho = r(\theta)$, autrement dit donnée par : $M(\theta) = (r(\theta)\cos\theta; r(\theta)\sin\theta)$. Montrer que le rayon de courbure est*

$$R(\theta) = \frac{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}.$$

2 — Montrer que le centre de courbure C au point M de coordonnées polaires $[\rho, \theta]$ a pour coordonnées cartésiennes

$$x_C = rcos\theta - \frac{(r'\sin\theta + r\cos\theta)(r'^2 + r^2)}{r^2 - rr'' + 2r'^2}, \qquad y_C = r\sin\theta + \frac{(r'\cos\theta - r\sin\theta)(r'^2 + r^2)}{r^2 - rr'' + 2r'^2}.$$

Exercice 73 *Soit* $\rho(\theta) = \sin 3\theta$
1 — Donner l'ensemble de définition et la période.
2 — Trouver les symétries et les rotations éventuelles et restreindre l'ensemble d'étude de la courbe.
3 — Calculer $\rho'(\theta)$ *et donner le tableau de variation de* ρ.
4 —Tracer la courbe.

Exercice 74 *Soit* $\rho(\theta) = 2a(1 + \cos\theta)$
1 — Donner l'ensemble de définition, la période et les symétries éventuelles. Restreindre l'ensemble d'étude de la courbe.
2 — Calculer $\rho'(\theta)$ *et donner le tableau de variation de* ρ.
3 — Montrer que le pôle est un point stationnaire, en faire l'étude.
4 — Déterminer le vecteur tangent en $\theta = 0$.
5 — Tracer la courbe.

Exercice 75 *Soit* $\rho(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}$
1 — Donner l'ensemble de définition, la période et les symétries et rotations éventuelles. Restreindre l'ensemble d'étude de la courbe.
2 — Calculer $\rho'(\theta)$ *et donner le tableau de variation de* ρ.
3 — Faire l'étude au pôle et en $\theta = \pi/4$.
4 — Montrer que le rayon de courbure au point courant $C(\theta) = \frac{a^2}{3\rho(\theta)}$.
5 — Tracer la courbe.

Exercice 76 *Soit* $\rho(\theta) = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}$
1 — Donner l'ensemble de définition, la période et les symétries et rotations éventuelles. Restreindre l'ensemble d'étude de la courbe.
2 — Calculer $\rho'(\theta)$ *et donner le tableau de variation de* ρ.
3 — Faire l'étude au pôle et en $\theta = \pi/2$.
4 — Déterminer les asymptotes éventuelles.
5 — Tracer la courbe.

Exercice 77 *Montrer que la* lemniscate *de Bernouilli d'équation polaire* $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ *a pour rayon de courbure en un point où* $\rho \neq 0$ $R = \frac{a}{3\rho}$. *Montrer que l'origine est un point double, et y déterminer les deux tangentes. Dessiner la courbe.*

Exercice 78 *On considère la* cardioïde *d'équation polaire* $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$. *Quelle est la nature du point 0 ? Dessiner la courbe.*

SURFACES ET EXTREMA A DEUX VARIABLES

Exercice 79 *Soit* $\Sigma = \{M(x, y) = (X(x, y); Y(x, y); Z(x, y)), (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$ *une surface paramétrée. Montrer que le vecteur* $N(u, v) = \frac{\partial M}{\partial x}(u, v) \wedge \frac{\partial M}{\partial y}(u, v)$ *est normale à* Σ *en* $M(u, v)$*, et que le plan tangent à* Σ *en* $M(u, v)$ *est d'équation* $N(u, v) \cdot \vec{M_0 M} = 0$, *où* $M_0 = (X(u, v); Y(u, v); Z(u, v))$ *et* $M = (X; Y; Z)$

Exercice 80 *1 — On appelle* surface de Veronese *le sous-ensemble* $\mathcal{V}$ *de* $\mathbb{R}^6$ *constitué des points* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ *où* $x_1 = au^2$, $x_2 = av^2$, $x_3 = aw^2$, $4 = avw$, $x_5 = awu$, $x_6 = auv$, *avec* $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. *Montrer que cette surface est en bijection avec le* plan projectif réel $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ *c'est-à-dire avec la sphère de dimension 2 quotientée par la relation d'antipodie (c'est-à-dire où pour chaque paire de points antipodiques les deux points en*

questions sont identifiées).
2 — Montrer que la projection $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_2 - x_1, x_4, x_5, x_6)$ *détermine, composée avec l'injection* $\mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{V}$ *une injection de* $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}^4$.
3 — Si l'on compose $\mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{V}$ *avec la projection* $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_4, x_5, x_6)$, *on obtient comme image une surface dans* $\mathbb{R}^3$ *appelée* surface romaine *de Steiner, qui présente des points doubles. Déterminer le plan tangent (ou les plans tangents) en un point de cette surface.*
4 — Si l'on compose $\mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{V}$ *avec la projection* $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_4, x_5, x_3 - x_1)$, *on obtient comme image une surface dans* $\mathbb{R}^3$ *appelée* bonnet croisé *qui présente des points doubles. Déterminer le plan tangent (ou les plans tangents) en un point de cette surface.*

Exercice 81 *Soit* S *la surface* $S = \{M(x, y) = (x, y, z), z = f(x, y)\}$. *Montrer que le vecteur* $N(u, v) = (-\frac{\partial f}{\partial x}(u, v), -\frac{\partial f}{\partial y}(u, v), 1)$ *est normal en (u,v) à* S, *et que le plan tangent à* S *en* (u, v) *est d'équation*

$$z - f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, v)(x - u) + \frac{\partial f}{\partial y}(u, v)(y - v)$$

Exercice 82 *Montrer que le plan tangent à* $S = \{M(x, y) = (x, y, z), z = f(x, y)\}$ *est horizontal (ou que la normale est verticale) si* $\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = 0$

Exercice 83 *Équation du plan tangent en* $(u, v) = (1/2; 1/2)$ *à la surface d'équation* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Exercice 84 *On considère la surface* Σ *d'équation* $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 3$. *Existe-t-il des points où le plan tangent à* Σ *soit horizontal ?*

Exercice 85 *1 — Soit* Σ *la surface* $z = xy$. *Donner l'équation du plan tangent en* (u, v, uv), *et un vecteur direction de la normale en* $M = (u, v, uv)$. *Montrer que la droite* $N_{u,v}$ *normale en* $M = (u, v, uv)$ *a pour équation paramétrée (par* $t \in \mathbb{R}$*) :* $\begin{cases} x &= u - vt \\ y &= v - ut \\ z &= uv + t \end{cases}$.

2 — On considère Γ *la surface paramétrée (avec* $u, v \in \mathbb{R}$*) :* $\begin{cases} x &= u - \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ y &= v - \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ z &= uv + \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \end{cases}$. *Montrer qu'au point de paramètres* (u, v) *de* Γ *la normale est* $N_{u,v}$. *Expliquer en quoi l'on peut dire que les surfaces* Σ *et* Γ *sont parallèles à la distance* 1.

Exercice 86 *Soit* Σ *la surface paramétrée de point courant* $M(x, y) = (x^2, xy, y^2)$. *Déterminer l'equation de son plan tangent au point* $M(u, v)$.

Exercice 87 *Soit la surface* Σ *d'équation* $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$. *Trouver s'ils existent les maximums et minimums locaux de* z *quand* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *varie.*

Exercice 88 *Soit la surface* Σ *d'équation* $z = f(x, y) = 3x + 5y - 1$. *Trouver s'ils existent les maximums et minimums locaux de* f *sur la courbe* $(\mathcal{M})$ *d'équation* $xy = 15$.

Exercice 89 *Soit la surface* Σ *d'equation* $z = f(x, y) = 2xy$. *Trouver s'ils existent les maximums et minimums locaux de* f *sur la courbe* $(\mathcal{M})$ *d'équation* $2x + 3y = 6$.

Exercice 90 *Soit la surface* Σ *d'équation* $z = f(x,y) = 2xy + y - x$. *Trouver s'ils existent les maximums et minimums locaux de* f *sur la droite d'équations* $x = 2t$ *et* $y = t - 1$

Exercice 91 *Soit la surface* Σ *d'équation* $z = xy(4 - x - y)$ *et* $(\mathcal{C}_R)$ *le cercle d'équation* $x^2 + y^2 = R^2$.
1 — Montrer qu'il y a quatre points à plan tangent horizontal, puis montrer que seul le point $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ *est un point d'extremum local, et que c'est un point de maximum local.*
2 — Déterminer en fonction de R *les extremums de* f *sur* $(\mathcal{C}_R)$. *On pourra remarquer que sous la condition* $x^2 + y^2 = R^2$, *et pour* $x > 0$ *et* $y > 0$, *la quantité* z *dont on cherche les extremums se reécrit* $z = 4u - Ru\sqrt{R^2 + 2u}$, *avec* $u = xy$, *et résoudre* $\frac{dz}{du} = 0$.

Exercice 92 *1 — Pour* $a > 0$, $c > 0$, $b^2 > ac$, *on considère le maximum sur le cercle trigonométrique de* $ax^2 + 2bxy + cy^2$, *soit* $M = \max_{x^2+y^2=1}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$. *Montrer que* M *est un nombre réel fini bien déterminé.*
2 — On considère $f(\theta) = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta$. *Montrer que* $M = \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} f(\theta)$.
3 — Montrer, avec $\tan\alpha = \frac{a-c}{2b}$, *que* $f(\theta) = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\sin(2\theta + \alpha)$.
4 — Montrer que M *est atteint quand* $\sin(2\theta + \alpha) = 1$, *et* $M = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$.
5 — Montrer que l'on peut trouver A, B *et* C *tels que, pour tous les* x *et les* y *on ait :* $ax^2 + 2bxy + cy^2 = A(x^2 + y^2) - (Bx + Cy)^2$ *; on montrera que* $B^2 - C^2 = c - a$, *que* $(B^2 + C^2)^2 = (B^2 - C^2)^2 + (2BC)^2$ *et donc que* $B^2 + C^2 = \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$, *et enfin que* $B = \sqrt{\frac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}-(a-c)}{2}}$, $C = \sqrt{\frac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}+(a-c)}{2}}$, *et* $A = \frac{1}{2}(\sqrt{(a-c)^3 + 4b^2} + (a+c))$.
6 — Constater que le minimum est atteint lorsque $Bx + Cy = 0$, *soit aux points de coordonnées* $(x,y) = \left(\frac{\pm C}{B^2+C^2}, \frac{\mp B}{B^2+C^2}\right)$, *et retrouver la valeur de* M.

Exercice 93 *On considère l'*hyperboloïde $\mathcal{H}$ à une nappe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. *Pour* $u, v \in \mathbb{R}$, *on considère les deux droites* A_u *et* B_v *d'équations*

$$A_u : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} & = u\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) & = 1 - \frac{y}{b} \end{cases}, \quad B_v : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} & = v\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) & = 1 + \frac{y}{b} \end{cases}.$$

1 — Montrer que par chaque point de l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ *passent une droite de la famille* A_u *et une droite de la famille* B_v, *lesquelles droites sont entièrement contenues dans* $\mathcal{H}$. *On dit que l'on a deux familles de génératrices rectilignes.*
2 — Donner l'équation du plan tangent à l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ *au point courant.*

Exercice 94 *1 — Montrer que le* paraboloïde hyperbolique $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ *possède les deux familles de génératrices rectilignes*

$$F_u : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} & = u \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) & = 2z \end{cases}, \quad G_v : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} & = v \\ v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) & = 2z \end{cases}.$$

2 — Donner l'équation du plan tangent au paraboloïde au point courant.

Exercice 95 *Sur la sphère* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *on désigne par* λ *la* longitude *et par* ϕ *la* latitude. *la projection de Mercator est définie par :* $\begin{cases} x & = \lambda - \lambda_0 \\ y & = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \end{cases}$.
1 — Montrer que l'on a les formules d'inversion : $\begin{cases} \lambda & = x + \lambda_0 \\ \phi & = \arctan(\sinh y) \end{cases}$.
2 — Déterminer les tangentes aux courbes dans le plan des (x,y) *correspondant à une valeur constante* λ_1 *de* λ *(resp.* ϕ_1 *de* ϕ*), et calculer à quel angle ces courbes se coupent.*

Exercice 96 *Dessiner la* bande de Mœbius*, surface paramétrée d'équations*

$$\begin{cases} x &= [R + s\cos(\frac{1}{2}\theta)]\cos\theta \\ y &= [R + s\cos(\frac{1}{2}\theta)]\sin\theta \\ z &= s\sin(\frac{1}{2}\theta) \end{cases},$$

où $s \in [-1, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Exercice 97 *La* selle de singe *a pour équation* $z = x(x^2 - 3y^2)$. *Étudier la courbure des sections normales à l'origine.*

Exercice 98 *1 — Soit dans le plan la courbe d'équation implicite* $F(x, y) = 0$. *Montrer que la tangente au point* (x_0, y_0) *de cette courbe a pour équation*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

2 — Trouver la tangente au point courant de la courbe Γ *d'équation* $x^3 + y^3 = 3xy$.
3 — En coupant Γ *par la droite* $y = tx$ *donner une représentation paramétrée de* Γ*, puis retrouver la tangente au point courant de* Γ.

Exercice 99 *1 — Soit dans le plan la courbe d'équation implicite* $F(x, y) = 0$. *Montrer que la courbure au point courant de cette courbe a pour valeur*

$$R = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}{|2F_xF_yF_{xy} - F_x^2F_{yy} - F_y^2F_{xx}|}.$$

2 — Trouver la courbure au point courant de la courbe Γ *d'équation* $x^3 + y^3 = 3xy$.
3 — En coupant Γ *par la droite* $y = tx$ *donner une représentation paramétrée de* Γ*, puis retrouver la courbure au point courant de* Γ.
4 — Le centre de courbure au point courant a pour coordonnées cartésiennes :

$$x_C = x + \frac{F_x(F_x^2 + F_y^2)}{2F_xF_yF_{xy} - F_x^2F_{yy} - F_y^2F_{xx}}, \quad y_C = y + \frac{F_y(F_x^2 + F_y^2)}{2F_xF_yF_{xy} - F_x^2F_{yy} - F_y^2F_{xx}}.$$

5 — Déterminer le centre de courbure de $x^3 + y^3 = 3xy$ *en un point quelconque.*

Exercice 100 *Déterminer le plan tangent en* $(u, v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *à la surface* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Exercice 101 *Soit* λ *un paramètre réel, et la surface* Σ *d'équation* $z = x^2 - 2\lambda xy + y^2$.
1 — Existe-t-il des points où le plan tangent à Σ *soit horizontal ? Discuter suivant* λ.
2 — Montrer qu'un plan d'équation $ax + by + cz = d$ *est incliné à* $45°$ *sur l'horizontale si et seulement si* $a^2 + b^2 = c^2$.
3 — Déterminer le lieu des points (x, y) *tels qu'en* $(x, z, x^2 - 2\lambda xy + y^2)$ *le plan tangent à* Σ *soit incliné à* $45°$ *sur l'horizontale. Discuter suivant* λ.

Exercice 102 *1 — Soit* Σ *la surface* $z = g(xy)$ *avec* $g(u)$ *une fonction dérivable. Donner l'équation du plan tangent en* (x, y)*, en fonction de la d'erivée de* g.
2 — Donner le plan tangent en (x, y) *à la surface* $z = \cos(xy)$.

Exercice 103 *Déterminer la tangente au point* $M(0, 0)$ *à la surface de point courant* $M(x, y) = (x^2, xy, y^2)$.

Exercice 104 *On pose* $f(x,y) = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$*, avec* $p > 0$ *et* $q > 0$ *deux réels fixés, et on considére la surface* Γ_f *d'équation* $z = f(x,y)$*, que l'on appelle un* paraboloïde hyperbolique*. Déterminer le plan tangent à* Γ_f *au point* $(0,0,0)$*. Le point* $(0,0,0)$ *est un "point selle" : expliquer ce que cela veut dire, en montrant comment le point* $(0,0,0)$ *n'est pas un extremum local.*

Exercice 105 *On considère la surface* $z = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$*. Montrer que ses lignes de niveaux sont des ovales de Cassini, et notamment que la section par le plan* $z = 0$ *est une lemniscate de Bernoulli.*

Exercice 106 *Faire les dessins des 17 quadriques, ou du moins de leurs éléments réels.*

Exercice 107 *Montrer que la dérivée de la fonction implicite* y *de* x *déterminée par la condition* $y^2 - 2xy + b^2 = 0$ *vaut* $\frac{y}{y-x}$*.*

Exercice 108 *Calculer la dérivée de la fonction implicite* y *de* x *déterminée par la condition* $y = \cos(x + y)$*.*

Exercice 109 *Dans quelle direction* $\vec{\delta}(a,b)$ *la variation de* $x \sin y - y \cos x$ *est-elle maximale en un point fixé* (a,b) *?*

Exercice 110 *Soit* $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - xy$*. Développer* $f(x+h, y+k)$ *suivant les puissances de* h *et* k*.*

Exercice 111 *Faire le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage du point*$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ *de la fonction* $z = \sin x \sin y$*.*

Exercice 112 *1 — Trouver les extrema locaux de* $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$*.*
2 — Trouver les extrema locaux de $f(x,y)$ *sur la courbe* $x^2 = 2ay$*, où* $a \in \mathbb{R}$ *est un paramètre. Étudier la variation avec* a *de ces extrema.*

Exercice 113 *Montrer que dans le rectangle compris entre les droites* $x = 0$*,* $y = 0$*,* $x = 1$*,* $y = 2$ *la fonction* $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ *atteint son maximum au point* $(1,2)$ *et son minimum au point* $(1,0)$*.*

Exercice 114 *Trouver le maximum et le minimum de la fonction* $z = x^2 - y^2$ *dans le disque* $x^2 + y^2 \leq 4$*.*

Exercice 115 *1 — Sur l'ellipse* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *trouver le point le plus proche et le point le plus éloigné de la droite* $3x + y - 9 = 0$*.*
2 — Trouver les points de $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *les plus proches du cercle* $x^2 + y^2 - 2px - 2py = \frac{1}{100}$*.*
Étudier la variation de ces points quand $p \in \mathbb{R}$*.*

Exercice 116 *On considère la surface* Σ *d'équation* $z = x^2 y(4 - x - y)$ *et* Γ_r *le cercle dans le plan* $z = 0$ *d'équation* $x^2 + y^2 = r^2$*.*
1 — Donner de la normale et l'équation du plan tangent à Σ *au point* $A(u,v)$ *de coordonnées* $\big(u, v, u^2 v(4 - u - v)\big)$*.*
2 — Pour quelles valeur de u *et* v *ce plan est-il horizontal ?*
3 — Montrer que le point $A(2,1)$ *est un maximum local de* $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$*.*
4 — Déterminer en quel point $A_r = (a(r), b(r))$ *de* Γ_r *la fonction* $f(x,y)$ *atteint son maximum sur* Γ_r*.*
5 — Soit Φ *la courbe lieu des points* A_r *quand* r *varie. Rechercher le maximum de f(x,y) sur cette courbe* Φ*.*

Exercice 117 *Soit* $z = (x+y-1)^2$.
1 — Trouver les points à plan tangent horizontal de la surface $z = (x+y-1)^2$*, et les points minimums de* z.
2 — Trouver par calcul le minimum de z *sous la condition* $(x - \frac{1}{10})^2 + y^2 \leq \frac{1}{100}$.
3 — Retrouver géométriquement le résultat de 2 — en reliant le minimum de z *à celui de la distance à la droite* $x + y - 1 = 0$.

Exercice 118 *Après le minimum simple* $F = x^2$*, observer les courbes et surfaces qui représentent les potentiels standards ou déploiements universels des* 7 catastrophes élémentaires *de René Thom :*
1 — Le pli : $F = x^3 + ux$
2 — La fronce : $F = x^4 + ux^2 + vx$
3 — La queue d'aronde : $F = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$
4 — Le papillon : $F = x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$
5 — L'ombilic hyperbolique : $F = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$
6 — L'ombilic elliptique : $F = x^3 - 3xy^2 + w(x^2+y^2) - ux - vy$
7 — L'ombilic parabolique : $F = x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy$.

Exercice 119 *Soit dans* $\mathbb{R}^3$ *un cône du second degré* $\mathcal{C}$ *de sommet* $O = (0,0,0)$*, d'équation*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx = 0.$$

1 — Montrer qu'au point $O = (0,0,0)$ *la surface* $\mathcal{C}$ *présente en général un "coin" et n'y est pas lisse, de sorte qu'il n'y existe pas un plan tangent.*
2 — Déterminer le plan tangent à cette surface $\mathcal{C}$ *en un point* $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Exercice 120 *Soit dans* $\mathbb{R}^3$ *un cône du second degré* $\mathcal{C}$ *de sommet* $O = (0,0,0)$*, d'équation*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx = 0.$$

On considère trois sections de $\mathcal{C}$ *:* $G''' = \mathcal{C} \cap (z=1)$*,* $G'' = \mathcal{C} \cap (y=1)$*,* $G' = \mathcal{C} \cap (x=1)$.
1 — Dans leurs plans respectifs, écrire les équations de G'''*,* G'' *et* G'.
2 — Déterminer les conditions sur les coefficients de $\mathcal{C}$ *pour que* G''' *soit un cercle.*
3 — Montrer que si G''' *et* G'' *sont toutes les deux des cercles alors ces cercles sont égaux, de rayon* R *et de centres* $(0, \mp R, 1)$ *et* $(0, 1, \mp R)$ *; autrement dit* G''' *et* G'' *sont toutes deux des cercles si et seulement si* G''' *est un cercle dans le plan* $z = 1$ *centré sur la droite* $z = 1, x = 0$*, et passant par* $(0,0,1)$.
4 — Est-il possible que les trois sections G'''*,* G'' *et* G' *du cône* $\mathcal{C}$ *soient des cercles ?*
5 — Est-il possible que l'une des sections, disons G'''*, soit un cercle et qu'une autre, disons* G''*, soit une hyperbole équilatère ? Pourrait-on alors préciser quelque chose sur la nature de la troisième* G' *?*

Exercice 121 *Actuellement le* Global Positioning System (GPS) *est basé sur le système géodésique* World Geodetic System *dans sa révision de 1984, soit le* WGS84 *,dans lequel, les coordonnées cartésiennes* x*,* y *et* z *étant exprimées en mètres, on considère comme référence en première approximation le modèle de la surface de la terre donné par l'ellipsoïde de centre* $O = (0,0,0)$ *et d'équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$*, de demi grand axe* $a = 6377397,155$ *m, de demi petit axe* $b = 6356078,963$ *m, et d'applatissement* $f = \frac{a-b}{a}$*, soit* $f = \frac{1}{299,1528153513233} = 0,003342773154 \pm 0,000005$ *(valeur différente de la valeur* $\frac{1}{298,257}$ *retenue par l'Union Astronomique Internationale). On appelle cette surface l'ellipsoïde* $WGS84$*. On appelle* latitude *(ou* latitude géographique *ou* latitude géodésique*)*

d'un point $M \in WGS84$ l'angle ϕ de la normale à $WGS84$ au point M avec le plan équatorial $z = 0$, tandis que l'angle ϕ' de OM avec $z = 0$ est nommé latitude géocentrique. *Usuellement c'est la latitude géodésique qui est utilisée.*
*1 — Montrer que ϕ et ϕ' sont reliées entre elles et avec l'*anomalie excentrique *u par les formules* $\tan\phi' = \frac{b}{a}\tan u$, $\tan\phi = \frac{a}{b}\tan u$, $\tan\phi = \frac{b^2}{a^2}\tan\phi'$.
2 — Montrer que $\tan(\phi - \phi') = \frac{a^2-b^2}{2ab}\sin 2u = \frac{f(2-f)}{2(1-f)}\sin 2u$. *Montrer que le maximum de l'écart $\phi - \phi'$ est environ de $11'33''$ (donc moindre que $\frac{1}{5}$ de degré), et atteint aux points de latitude ϕ telle que $\tan\phi = \frac{1}{1-f}$, ce qui correspond à peu près à $45°5'46''$ si l'on prend pour f la valeur de l'Union Astronomique Internationale.*
3 — La ville de Paris a pour latitude (géographique) $48°51'44''N$ et pour longitude $2°21'03''E$. Déterminer sa latitude géocentrique.
4 — Dans la ville de Paris, la Tour Eiffel est situé par $48°52N$ et $2°18E$, et la cathédrale Notre-Dame par $48°51N$ et $2°21E$. Montrer que leur distance est d'environ 8, 75 km.

Exercice 122 *1 — Établir la formule de Taylor à l'ordre 2 à l'origine :*

$$f(x,y) = f(0,0) + [f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y] + \tfrac{1}{2}[f''_{x^2}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{x^2}(0,0)y^2] + (x^2+y^2)\epsilon(\sqrt{x^2+y^2}).$$

2 — Appliquer à la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3kxy$, et situer la surface $z = f(x,y)$ au voisinage de $(0,0)$ par rapport à son plan tangent en $(0,0)$.

Exercice 123 *1 — Soit f une fonction dont le développement en $(0,0)$ à l'ordre 2 est $f(x,y) = dx^2 + 2exy + fy^2 + (x^2+y^2)\epsilon(\sqrt{x^2+y^2})$. On pose $q(x,y) = dx^2 + 2exy + fy^2$, et on considère le changement de coordonnées $X = x + \frac{e}{d}y$ et $Y = \frac{1}{d}y$, et on pose enfin $Q(X,Y) = d\big[X^2 + (fd - e^2)Y^2\big]$. Montrer que $q(x,y) = Q(X,Y)$.*
2 — Montrer que si $fd - e^2 > 0$ alors $q(x,y)$ est toujours du signe de d, et que si $fd - e^2 < 0$, $q(x,y)$ est une différence de carrés, tantôt positive, tantôt négative (précisez).
3 — Si $fd - e^2 > 0$ et $d > 0$, le changement de variables $U = X\sqrt{d}$, $V = Y\sqrt{d}\sqrt{fd-e^2}$ donne $q(x,y) = U^2 + V^2$.
4 — Si $fd - e^2 > 0$ et $d < 0$, le changement de variables $U = X\sqrt{-d}$, $V = Y\sqrt{-d}\sqrt{fd-e^2}$ donne $q(x,y) = -U^2 - V^2$.
5 — Si $fe - d^2 < 0$ et $d > 0$, le changement de variables $U = X\sqrt{d}$, $V = Y\sqrt{d}\sqrt{-(fd-e^2)}$ donne $q(x,y) = U^2 - V^2$.
5 — Si $fe - d^2 < 0$ et $d < 0$, alors $U = X\sqrt{-d}$, $V = Y\sqrt{-d}\sqrt{-(fd-e^2)}$ donne $q(x,y) = -U^2 + V^2$.
6 — Montrer que si $fd - e^2 > 0$ et $d > 0$ on a un minimum en $(0,0)$, si $fd - e^2 > 0$ et $d < 0$ on a un maximum en $(0,0)$, si $fd - e^2 < 0$ alors on a un point-selle.
7 — Si $fd - e^2 = 0$ on peut avoir maximum, minimum, point-selle, ou encore aucun de ces cas, comme le montre, dans l'ordre, les exemples $f(x,y) = x^2 + y^4$, $f(x,y) = -x^2 - y^4$, $f(x,y) = x^2 + y^3$.

Exercice 124 *Montrer, en faisant tendre (x,y) vers $(0,0)$ suivant différentes directions, que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas.*

Exercice 125 *Donner les extrema locaux des fonctions suivantes, et préciser s'il s'agit d'extrema globaux :*
1 — $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$.
2 — $f(x,y) = 6 + x^2 + 2xy + y^2$.
3 — $f(x,y) = x^3 + y^3$.
4 — $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$.

Exercice 126 *Montrer que* $z = 1 + x - y + 3x^2 - y^2$ *possède un unique plan tangent horizontal.*

Exercice 127 *Donner le plan tangent au point défini par* $x = 4$ *et* $y = -3$ *à la surface* $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$.

Exercice 128 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
1 — Soit $u = (a,b)$, *avec* $a^2 + b^2 = 1$ *et* $a \neq 0$. *Montrer que la dérivée dans la direction* u *en* $(0,0)$ *existe et vaut* $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{b^2}{a}$.
2 — Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
3 — Montrer que f *admet des dérivées partielles dans toutes les directions, mais que pourtant* f *n'est même pas continue en* $(0,0)$, *car* $\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \frac{1}{2}$.

Exercice 129 *Soit* $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
1 — Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
2 — Montrer que pour $(x,y) \neq (0,0)$, *on a* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
3 — Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *ne sont pas continues en* $(0,0)$, *car si* $x > 0$ *on a* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$ *vaut* $2x\sin\frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}x}$, *et cette quantité n'a pas de limite au point* $(0,0)$.
4 — Montrer qu'au point $(0,0)$ *la fonction* f *admet une dérivée dans toutes les directions, laquelle varie continûment en fonction de la direction.*

Exercice 130 *Soit* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3+x^3y}{\sqrt{x^4+y^4}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
1 — Montrer qu'au point $(0,0)$ *la fonction* f *admet des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
2 — Montrer qu'au point $(0,0)$ *la fonction* f *n'admet pas de dérivée de direction* $u = (a,b)$ *si* $a \neq 0$ *ou si* $b \neq 0$.

Exercice 131 *Soit* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
1 — Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *et que* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
2 — Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *lorsque* $(x,y) \neq 0$.
3 — Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ *et que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

Exercice 132 *Soit* $f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + y^2\sin\frac{1}{y} & \text{si } x \neq 0, y \neq 0 \\ x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } xc \neq 0, y = 0 \\ y^2\sin\frac{1}{y} & \text{si } xc = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, y = 0 \end{cases}$.
Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ *n'existent pas, bien que en* $(0,0)$ *et au voisinage de* $(0,0)$ *les dérivées* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *existent et soient continues.*

Exercice 133 *Soit* $f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$.
1 — Montrer que seuls les points $(0,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *et* $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ *peuvent être des points de valeurs extremums de* f.
2 — Montrer que la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(0,0)$ *pour la fonction* f *s'écrit* $f(h,k) - f(0,0) = -\frac{1}{4}(h-k)^2 + (h^2+k^2)\epsilon(\sqrt{h^2+k^2})$.
3 — Montrer que $f(h,h) = 2h^4$ *et* $f(h,0) = h^2(h^2 - \frac{1}{4})$ *; pour* $h \neq 0$ *proche de* 0 *on a donc* $f(h,h) > 0$ *et* $f(h,0) < 0$. *En déduire que* f *n'admet pas d'extremum local en* $(0,0)$.
4 — Montrer que la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ *pour* f *s'écrit sous la forme* $f(\frac{1}{2}+h, -\frac{1}{2}+k) - f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}h^2 + \frac{1}{2}hk + \frac{5}{4}k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(\sqrt{h^2+k^2})$. *En déduire qu'au point considéré* f *admet un minimum local strict.*
5 — Montrer de même qu'au point $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *la fonction* f *admet un minimum strict.*

Exercice 134 *Déterminer les extremums locaux sur* $\mathbb{R}^2$ *de* $f(x,y) = \arctan xy$.

Exercice 135 *Soit* Σ *la surface paramétrée définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par son point courant*

$$M(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

1 — Montrer que Σ *est constituée des points de la sphère* $x^2+y^2+z^2 = 1$.
2 — Montrer que $\frac{\partial M}{\partial u}(a,b) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(a,b) = (-\cos^2 a \cos b, -\cos^2 a \sin b, \sin a \cos a)$.
3 — Montrer que lorsque $\cos a \neq 0$ *l'équation du plan tangent à* Σ *au point* $M(a,b)$ *de coordonnées* (x_0, y_0, z_0) *est* $x_0x + y_0y + z_0z = 1$.

Exercice 136 *Soit* $k > 0$, *et* Σ *la surface d'équation* $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{k}$, *où* $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. *Soit* Π *le plan tangent à* Σ *en un point* (x_0, y_0, z_0), *et soit* $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$ *et* $C = (0,0,c)$ *les points d'intersection de* Π *avec les axes* Ox, Oy *et* Oz. *Calculer* $a+b+c$.

Exercice 137 *Montrer que la fonction* $f(x,y) = (2x^2 - y)(y - x^2)$ *n'admet pas de maximum local en* $(0,0)$.

Exercice 138 *Soit* $f(x,y) = x^3 - 3x - y^2 + 5$. *Montrer que les seuls points possibles d'extremum sont* $(1,0)$ *et* $(-1,0)$, *puis que seul le deuxième point convient, et que l'on a là un maximum.*

Exercice 139 *1 — Calculer les dérivées partielles de* $f(x,y) = x^3 + xy + x\ln z$, *puis la dérivée de* f *dans une direction quelconque (en un point* (x_0, y_0)*).*
2 — Dans quelle direction la dérivée de f *est-elle la plus forte ? Dans quelle direction la dérivée de* f *est-elle la plus faible ?*

Exercice 140 *1 — Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 en* (x_0, y_0) *de la fonction* $f(x,y) = (x+y)^3 + a\sin(x+y)$.
2 — Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de $f(x,y) = (x+y)^3 + a\sin(x+y)$ *en* $(0,0)$. *Quelle est la forme de* $z = f(x,y)$ *en* $(0,0)$ *?*

Exercice 141 *— Dans le plan soit le triangle* ABC, *avec* $A = (a,a')$, $B = (b,b')$ *et* $C = (c,c')$.
1 — Montrer que la distance du point $M = (x,y)$ *à la droite* $px+qy+r = 0$ *vaut* $\frac{|px+qy+r|}{\sqrt{p^2+q^2}}$.
2 — Écrire les équations des droites AB, BC, CA. *Pour un point* $M = (x,y)$ *du plan*

du triangle ABC calculer les distances (notées $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ et $\gamma(x,y)$) de M aux côtés BC, CA et AB du triangle.
3 — Calculer $f(x,y) = \alpha(x,y)^2 + \beta(x,y)^2 + \gamma(x,y)^2$, puis $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
4 — Déterminer le minimum et le maximum de f sur chacun des segments AB, BC et CA.
5 — Déterminer le minimum et le maximum de f dans le triangle ouvert (sans ses côtés).
6 — Déterminer le minimum et le maximum de f dans le triangle fermé (avec ses côtés).
7 — Déterminer le minimum de f dans le plan.

INTEGRALES, PRIMITIVES, LONGUEURS DE COURBES

Exercice 142 *1 — Calculer $\int_0^1 dx$, $\int_0^1 x dx$, $\int_0^1 x^2 dx$, $\int_0^1 x^3 dx$.*
2 — Calculer $\int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx$, puis $\int_0^1 \big(\sum_0^N a_n \frac{x^n}{n!}\big) dx$.
3 — Que pensez-vous de la formule $\int_0^1 \big(\sum_0^\infty a_n \frac{x^n}{n!}\big) dx = \sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)!} dx$?

Exercice 143 *Calculer $\int_0^\pi \cos x dx$, $\int_0^\pi \cos^2 x dx$, $\int_0^\pi \cos^3 x dx$.*

Exercice 144 *Montrer, en précisant les domaines de validité, que*
1 — $\int \tanh x \, dx = \ln(\cosh x) + C$.
2 — $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C = \arccos x + D$.
3 — $\ln|x| dx = x(\ln|x| - 1) + C$.

Exercice 145 *1 — Montrer que $\int_1^3 6x \ln(x^2) \, dx = 27 \ln 9 - 24$, par le changement de variables $z = x^2$.*
2 — Pour b donnée, déterminer a tel que $\int_1^a 6x \ln(x^2) \, dx = b$.

Exercice 146 *Calculer par les changements de variables indiquées :*
1 — $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x} \, dx$ (changement de variable $z = \sqrt{x}$).
2 — $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$ ($z = e^x$).
3 — $\int \sqrt{1+x^2} \, dx$ ($x = \sinh z$).
4 — $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$ ($z = \tan \frac{x}{2}$).

Exercice 147 *Montrer que, en posant $z = g(x)$, l'intégrale $\int f(g(x))g'(x)dx$ se transforme en $\int f(z)dz$; préciser bien ce qui se passe aux bornes : si dans la première intégrale x varie entre a et b, et dans la deuxième z varie entre p et q, quelle relation existe-t-il entre a, b et p, q ? Précisez aussi pour quelles fonctions g la formule envisagée est valable.*

Exercice 148 *1 — En posant $z = x + \frac{b}{2a}$, $\int f(ax^2+bx+c)dx$ devient $\int f(az^2+c-\frac{b^2}{4a})dz$.*
2 — En posant $z = \sqrt{x}$, $\int f(\sqrt{x}) \, dx$ devient $2\int z f(z) \, dz$.
3 — En posant $z = \frac{1}{x}$, $\int f(\frac{1}{x}) \, dx$ devient $-\int \frac{f(z)}{z^2} \, dz$.
4 — En posant $z = \tan \frac{x}{2}$, $\int f(\sin x, \cos x) \, dx$ devient $\int f(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}) \frac{2}{1+z^2} \, dz$.

Exercice 149 *Par intégration par parties, déterminer les primitives suivantes :*

1— $\int x \ln x dx$ 2 — $\int (x-1) \sin x dx$ 3 — $\int x \arctan x dx$ 4 — $\int x \sin^3 x dx$

Exercice 150 *Par le changement de variables $z = \sin x$ calculer $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \, dx$.*

Exercice 151 *Montrer que*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \ln\Big|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\Big|.$$

Exercice 152 *1 — Pour intégrer* $\int f(\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, *avec* $a > 0$, *on procède à la* première substitution d'Euler, *soit le changement de variable de* x *à* z *donnée par* $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+z$. *Montrer que* $x = \frac{z^2-c}{b-2z\sqrt{a}}$. *Partant de* $x = \frac{z^2-c}{b-2z\sqrt{a}}$, *en déduire que* $z = -x\sqrt{a} \pm \sqrt{ax^2+bx+c}$. *Calculer* dx *en fonction de* z *et* dz, *et montrer que* $dx = 2\frac{-z^2\sqrt{a}+bz-c\sqrt{a}}{(b-2z\sqrt{a})^2}\,dz$. *Constater que* x, $\frac{dx}{dz}$ *et* $\sqrt{ax^2+bx+c}$ *sont des fonctions rationnelles de* z. *Conclure que la méthode permet bien d'éliminer les radicaux.*
2 — Que se passe-t-il s'il l'on commence plutôt par $\sqrt{ax^2+bx+c} = -x\sqrt{a}+z$, *de sorte que* $x = \frac{z^2-c}{b+2z\sqrt{a}}$ *?*
3 — calculer $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$.
4 — Calculer $\int \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}\,dx$.
5 — Calculer $\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx$.
6 — Pour intégrer $\int f(\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, *avec* $c > 0$, *on utilise la* deuxième substitution d'Euler, *donnée par* $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+zx$. *examiner ce qui se passe.*
7 — Dans le cas où $a < 0$ *et o u* $ax^2+bx+c = 0$ *admet deux racines réelles* x_1 *et* x_2, *on pourra utiliser la* troisième substitution d'Euler *:* $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2)$.

Exercice 153 *1 — Pour calculer* $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$, *on décompose la fraction sous la forme*

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

Trouver a *et* b, *puis la valeur de l'intégrale.*
2 — Calculer $\int \frac{x+1}{(x^2-3x+2)^2}\,dx$.

Exercice 154 *1 —Montrer que* $\frac{3x^2-20x+20}{(x-2)^3(x-4)} = \frac{\frac{3}{2}}{x-2} + \frac{6}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x-2)^3} - \frac{\frac{3}{2}}{x-4}$.
2 — Calculer $\int \frac{3x^2-20x+20}{(x-2)^3(x-4)}\,dx$.

Exercice 155 *Par changement de variables, déterminer les primitives suivantes :*

1 — $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$
2 — $\int \frac{\ln x\,dx}{x+x(\ln x)^2}$
3 — $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$
4 — $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
5 — $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$
6 — $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$
7 — $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
8 — $\int_1^e \frac{dx}{x+x(\ln x)^2}$
9 — $\int_0^\pi \frac{\sin x}{3+\cos^2 x}dx$

Exercice 156 *Déterminer les primitives des expressions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :*

1 — $\frac{x^5}{1+x^2}$
2 — $\frac{x+1}{x^2-x+1}$
3 — $\frac{1}{x^2-2x+2}$
4 — $\frac{x}{x^2+2x+2}$
5 — $\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x^2}$
6 — $\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$
7 — $\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$
8 — $\frac{thx}{1+chx}$
9 — $\frac{chx}{1+ch^2x}$
10 — $\frac{chx}{shx+chx}$
11 — $\frac{1}{ch^3x}$
12 — $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Exercice 157 *Calculer les intégrales définies :*

1 — $\int_{1/11}^{1/5} \frac{dx}{x\sqrt{1-4x-5x^2}}$ *2 —* $\int_1^2 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$ *3 —* $\int_0^{2\pi} \cos(x)\sin(3x)dx$

Exercice 158 *On pose* $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.
1 — Montrer que $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.
2 — Déterminer les v *et* w *tels que* $\arctan w = \arccos v$.

Exercice 159 *1 — On définit la fonction "sécante hyperbolique"* sech *par la formule* $\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$. *étudier les variations et dessiner le graphe.*
2 — Montrer que $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x)\sqrt{1-\operatorname{sech}(x)}$.
3 — Montrer que $\int_0^x \operatorname{sech}(t)\,dt = \arctan(\sinh(x))$.

Exercice 160 *Montrer que la moyenne* $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ *(où donc* x *varie de 0 à 1 radian) est comprise entre* 0 *et* $\sin(1)$, *et donc a fortiori entre* 0 *et* 1. *Montrer que la moyenne* $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ *est approximée au* $\frac{1}{10}$ *près par* $\frac{1}{21}\sum_{k=1}^{21}\sin(\frac{k^2}{441})$. *En déduire que l'on obtient une approximation à* $\frac{1}{5}$ *près de la moyenne considérée en faisant exactement la somme des 21 termes indiqués, chacun étant calculé à* $\frac{1}{100}$ *près. Écrire un programme pour faire ce calcul. Donner effectivement une approximation à* $\frac{1}{5}$ *près.*

Exercice 161 *Comparer* $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ *et* $\int_0^1 (\sin x)^2 dx$.

Exercice 162 *Montrer que* $\int_0^x \sin t dt = -\cos x$.

Exercice 163 *En intégrant par parties, montrer que* $\int_0^x t\sin t dt = \sin x - x\cos x$.

Exercice 164 *Par le changement de variable* $x = \frac{t-b}{a}$ *calculer* $\int_0^X (ax+b)^m dx$ *lorsque* $a \neq 0$ *et* $m \neq -1$.

Exercice 165 *Montrer que* $\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a} + a\ln(x+\sqrt{x^2+a})] + C$.

Exercice 166 *Pour calculer une intégrale de la forme* $\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx$, *où* $R(X,Y)$ *est une fraction rationnelle en* X *et* Y, *soit une fonction de la forme* $\frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$, *avec* $P(X,Y)$ *et* $Q(X,Y)$ *des polynômes en* X *et* Y *à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *on procède au changement de variables* $t = \tan\frac{x}{2}$.
1 — Montrer que $x = 2\arctan t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.
2 — Montrer que $\int_a^b R(\sin x,\cos x)dx = \int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}} R\big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\big)\frac{2}{1+t^2}dt$.
3 — Calculer $\int_a^b \frac{dx}{\sin x}$.

Exercice 167 *Par le changement de variable* $t = \sin x$, *montrer que* $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan x} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Exercice 168 *Par le changement de variable* $t = e^x$, *établir* $\int_0^2 \frac{dx}{\cosh x} = 2\arctan(e^2) - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 169 *1 — Montrer que* $\frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2} = \frac{-x+1}{(x^2+2)^2} + \frac{x}{x^2+2}$.
2 — Montrer que $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.
3 — Montrer que $\int_0^1 \frac{-x+1}{(x^2+2)^2}dx = -\frac{1}{12} + (\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}})$.
4 — Montrer que $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 170 *1 — Montrer que* $\frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2} = x+1-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.
2 — Montrer que $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2}dx = \frac{9}{2}+\ln\frac{4}{3}$.

Exercice 171 *En intégrant par parties établir :* $\int_0^1 x\arctan x\,dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Exercice 172 *Montrer que* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = 1+2e^{x}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$*, en faisant deux intégrations par parties. En déduire que* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{5}+\frac{2}{5}e^{\pi}$.

Exercice 173 *Montrer que* $\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \arctan e - \frac{\pi}{4}$ *;*

Exercice 174 *1 — Soit* $R(X,Y)$ *une fraction rationnelle en* X *et* Y*, soit une fonction de la forme* $\frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$*, avec* $P(X,Y)$ *et* $Q(X,Y)$ *des polynômes en* X *et* Y *à coefficients dans* $\mathbb{R}$*. Pour calculer* $I=\int_a^b R(x,\sqrt{x^2+1})dx$*, on fait le changement de variable* $x=\sinh t$*. Montrer que* $I=\int_A^B R(\sinh t,\cosh t)\cosh t\,dt$*, avec* $\sinh A = a$ *et* $\sinh B = b$*.*
2 — On pose $u=e^t$*. Montrer que* $I=\int_{e^A}^{e^B} R(\frac{u-u^{-1}}{2},\frac{u+u^{-1}}{2})\frac{u+u^{-1}}{2}\frac{du}{u}$*, soit l'intégrale d'une fraction rationnelle en la variable* u*.*
3 — Calculer $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$*.*

Exercice 175 *En posant* $t=\sqrt{1+x^4}$*, montrer que* $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{t} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}+C$*.*

Exercice 176 *Pour calculer* $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+x})\,dx$ *où* $R(x,y)$ *est une fraction rationnelle en* x *et* y *(avec donc* $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$*), on peut utiliser les substitutions d'Euler, mais on peut aussi décomposer* R *comme suit, puis intégrer des cas particuliers.*
1 — Montrer que, avec $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$*,* $R(x,y)$ *peut se ramener à une forme* $\frac{A(x)+B(x)y}{C(x)+D(x)y}$*, avec* A*,* B*,* C *et* D *des polynômes en* x*, puis à* $\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{T(x)}y$*, avec* P*,* Q *,* R *et* T *des polynômes en* x*, et à la forme* $\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{S(x)}{T(x)y}$*, avec* P*,* Q *,* S *et* T *des polynômes en* x*.*
2 — Supposons que $T(x)$ *n'admette que des racines réelles, et que l'on ait donc une décomposition en éléments simples des types* $a_nx^n+\cdots+a_0$*,* $\frac{\alpha}{(x-r)^n}$*. Montrer que le calcul de* I *est réduit à celui des intégrales suivantes :*

$$\int\frac{x^k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\qquad \int\frac{dx}{(x-r)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

3 — Montrer que, si $a>0$*, on a :* $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right)+C$*.*
4 — Montrer que $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}} = \int\frac{dx}{\sqrt{m^2-(x-\frac{b}{2})^2}} = \arcsin\frac{x-\frac{b}{2}}{m}+C$*.*
5 — Montrer, par différentiation, qu'il existe un polynôme $L(x)$ *de degré* $<k$*, et une constante* λ*, tels que* $\int\frac{x^k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = L(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$*.*
5 — Montrer que le changement de variables $x-r=\frac{1}{z}$ *ramène une intégrale de la forme* $\int\frac{dx}{(x-r)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *à des intégrales de la forme* $\int\frac{x^k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$*.*
6 — Appliquer la méthode ci-avant pour calculer $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$*. On trouvera la valeur* $x-\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)+\ln\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)+C$*.*

Exercice 177 *1 — Montrer que* $\int_0^x t^2(\cos t)^2\,dt = \frac{x^3}{6}+x^2\frac{\sin 2x}{4}+x\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\sin 2x}{8}$*, et donc que* $\int_0^\pi t^2(\cos t)^2\,dt = \frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}$*.*
2 — Sachant que $3,141592<\pi<3,141593$*, montrer que* $31,0062<\pi^3<31,0063$*, et en déduire l'encadrement :* $5,9530<\int_0^\pi t^2(\cos t)^2\,dt<5,9531$*.*

Exercice 178 *1 — Montrer que* $\int_0^x \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2} = \frac{2}{27}\ln\frac{1+x}{2-x} - \frac{1}{9}\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} + \frac{2}{27}\ln 2 + \frac{1}{18}$, *et donc que* $\int_0^1 \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2} = \frac{4}{27}\ln 2 + \frac{2}{18}$.
2 — Si l'on connaît une valeur approchée de $\ln 2$, *on trouvera une valeur approchée de l'intégrale. Ainsi, sachant que* $0,6931471 < \ln 2 < 0,6931472$, *on donnera un encadrement de* $\int_0^1 \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2}$ *à* 10^{-6} *près.*
3 — Si on ne connaît pas la valeur de $\ln 2$, *on pose* $S(n) = n\sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k^2-nk-2n^2}\right)^2$, *on montre que* $\lim_{n\to\infty} S(n) = \int_0^1 \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2}$, *et on en déduit un algorithme convergent vers* $\ln 2$, *à savoir la formule :* $\ln 2 = \lim_{n\to\infty} \frac{27}{4}S(n) - \frac{3}{4}$.

Exercice 179 *La* spirale de Cornu *— qui permet d'étudier graphiquement la diffraction — est la courbe paramétrée*

$$M(t) = \left(\int_0^t \cos(\frac{\pi}{2}u^2)du, \int_0^t \sin(\frac{\pi}{2}u^2)du\right).$$

Montrer que $M(t)$ *est bien définie. Dessiner ladite spirale.*

Exercice 180 *Montrer que* $\int x^m \ln x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right)$. *En déduire, pour tout polynôme* $P(x)$ *la valeur de* $\int P(x)\ln x dx$.

Exercice 181 *On pose* $S = \sqrt{x^2 - a^2}$.
1 — Montrer que $\int S\, dx = \frac{xS - a^2\ln(x+S)}{2}$.
2 — Montrer que $\int xS\, dx = \frac{S^3}{3}$.
3 — Montrer que $\int x^2 S\, dx = \frac{-a^2xS + 2xS^3 - a^4\ln(x+S)}{8}$.

Exercice 182 *On pose* $T = \sqrt{a^2 - x^2}$.
1 — Montrer que $\int T\, dx = \frac{xT + a^2\arcsin\frac{x}{a}}{2}$.
2 — Montrer que $\int xT\, dx = -\frac{T^3}{3}$.
3 — Montrer que $\int x^2 T\, dx = \frac{a^2xT - 2xT^3 + a^4\arcsin\frac{x}{a}}{8}$.

Exercice 183 *On considère la courbe* $x = t^2, y = t^3$. *Montrer que la longueur* $s(t)$ *de l'arc allalnt du point* $t = 0$ *au point* $t = t$ *vaut* $s(t) = \frac{(4+9t^2)^{\frac{3}{2}} - 8}{27}$. *Cette courbe est un exemple (le premier connu après la droite) de courbe algébrique d'arc algébrique.*

Exercice 184 *Calculer la longueur de l'arc de parabole* $y = x^2$ *lorsque* x *décrit* $[0, 1]$. *(on pourra faire une intégration par partie).*

Exercice 185 *Calculer la longueur de l'arc de cosinus hyperbolique* $y = chx$ *sur* $[0, x]$.

Exercice 186 *Calculer la longueur de la courbe* $y = \frac{1}{4}x^2 - \ln(\sqrt{x}) + 1$ *sur* $[1, 2]$.

Exercice 187 *Calculer la longueur de la courbe* $\rho(\theta) = e^{3\theta}$, θ *parcourant* $[0, \ln 2]$.

Exercice 188 *Calculer la longueur de la courbe* $M(t) = (e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t)$, $t \in [0, 1]$.

Exercice 189 *Calculer la longueur de l'arc d'hyperbole* $y = ax^2$, *de* $x = 0$ *à* $x = 1$.

Exercice 190 *1 — On considère l'ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$*, et l'on pose* $\epsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$*. Montrer que son périmètre vaut précisément* $\mathcal{P}=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\epsilon^2\sin^2 t}\,dt$.
2 — Montrer qu'une valeur approchée de $\mathcal{P}$ *est* $2\pi a(1-\frac{1}{4}\epsilon^2-\frac{3}{64}\epsilon^4-\frac{5}{256}\epsilon^6-\frac{175}{16384}\epsilon^8-\dots)$.
3 — Montrer qu'une valeur approchée de $\mathcal{P}$ *est* $\pi\frac{3}{2}(a+b)$.

Exercice 191 *Soit* $a>0$ *et* $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(x)+f(a-x)$ *ne s'annule pas sur* $[0,a]$*, soit* $I=\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ *et* $J=\int_0^a\frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$*. Montrer que* $I+J=a$*, montrer par changement de variable que* $I=J$*, et en déduire que* $I=\frac{1}{2}a$.

Exercice 192 *1 — En intégrant par parties, montrer que, pour* $x>0$*, on a l'identité* $\int_x^{x+1}\sin(t^2)\,dt=\frac{\cos((x+1)^2)}{2(x+1)}+\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{\cos(t^2)}{t^2}\,dt$.
2 — Montrer que $\int_x^{x+1}\sin(t^2)\,dt\le\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}\,dt=\frac{1}{x}$.
3 — Déterminer, pour $\epsilon>0$*,* $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\epsilon}$.
4 — Montrer que, pour $\epsilon>0$*, on a* $\lim_{x\to\infty}x^{1-\epsilon}\int_x^{x+1}\sin(t^2)\,dt=0$.

Exercice 193 *1 — Soit* $f_1(x)=k\cos\frac{\pi x}{a}$ *et soit* $f_2(x)=k(2x^3-3ax^2$*. Montrer que* f_1 *et* f_2 *sont deux exemples d'une fonction* f *telle que* $f'(a-x)=f'(x)$ *pour tous les* x *tels que* $0\le x\le a$.
2 — Si f *est une fonction différentiable telle que* $f'(a-x)=f'(x)$ *pour tous les* x *tels que* $0\le x\le a$*, montrer qu'il existe une constante* C *telle que, pour tout* x*, avec* $0\le x\le a$ *on ait* $-f(a-x)=f(x)+C$*, et montrer que* $C=-f(0)-f(a)$.
3 — Montrer que $\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(a-x)dx=a(f(0)+f(a))$.
4 — Montrer que $\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a f(x)dx$.
5 — Conclure que $\int_0^a f(x)dx=\frac{a}{2}(f(0)+f(a))$.

Exercice 194 *Soit* $a>0$*, et* f *une fonction continue sur* $[0,a]$ *telle que* $f(x)f(a-x)=1$*. On considère* $I=\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$.
1 —Par le changement de variable $x=a-y$ *montrer que* $I=\int_0^a\left(1-\frac{1}{1+f(y)}\right)dy=a-I$*, et donc que* $I=\frac{a}{2}$.
2 — Montrer que, pour tout n*, la fonction* $f(x)=e^{n(x-\frac{a}{2})}$ *est continue et telle que* $f(x)f(a-x)=1$.

Exercice 195 *On pose* $I_n=\int_0^\pi\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2dx$*,* $J_m=\int_0^\pi\frac{\sin mx}{\sin x}\,dx$.
1 — Montrer que, pour $n\ge 2$*,* $I_n-I_{n-1}=J_{2n-1}$.
2 — Montrer que, pour $n\ge 2$*, on a* $J_m=J_{m-2}$.
3 — Montrer que, pour tout $n>0$ *on a* $I_n=n\pi$.

Exercice 196 *Pour tout réel* u *on pose* $I(u)=\int_0^\pi\ln(1-2u\cos x+u^2)dx$.
1 — En posant $x=\pi-y$*, montrer que* $I(u)=I(-u)$.
2 — Montrer que $(1-2u\cos x+u^2)(1+2u\cos x+u^2)=1-2u^2\cos 2x+u^4$.
3 — Montrer que $I(u)+I(-u)=\int_0^\pi\ln(1-2u^2\cos 2x+u^4)\,dx$*, puis, en posant* $y=2x$*, montrer que* $I(u)+I(-u)=\frac{1}{2}I(u^2)+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\ln(1-2u^2\cos y+u^4)\,dy$*, et en posant* $y=2\pi-z$ *dans la denière intégrale montrer enfin que* $I(u)+I(-u)=I(u^2)$.
4 — Montrer que $I(u)=I(-u)=\frac{1}{2}I(u^2)$.
5 — Montrer que $I(1)=I(-1)=0$.
6 — On suppose $|u|<1$*. Montrer que* $I(0)=0$*, que* $I(u)=\frac{1}{2^n}I(u^{2^n})$*, et puis que* $I(u)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}I(u^{2^n})=0$.

7 — On suppose $|u| > 1$, et $u > 0$. En posant $u = \frac{1}{v}$, montrer que $I(u) = I(v) - 2\ln v \int_0^\pi dx$, et donc $I(u) = 2\pi \ln u$.
8 — On suppose $|u| > 1$, et $u < 0$. Alors $I(u) = 2\pi \ln(-u)$.
9 — Conclure de 6 — à 8 — que : $\int_0^\pi \ln(1 - 2u\cos x + u^2)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } |u| \leq 1, \\ 2\pi \ln |u| & \text{si } |u| > 1 \end{cases}.$
10 — Montrer que la moyenne entre 0 et π de la fonction $\ln(5 - 4\cos x)$ vaut exactement $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln(5 - 4\cos x)dx = \ln 4$, et admet une valeur approchée au centième près comprise entre $1,38$ et $1,39$.

Exercice 197 *1 — Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{4} - \cos x$ est croissante sur $[0, \pi]$, et en admettant de l'exercice 196 que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln(5 - 4\cos x)dx = \ln 4$, montrer qu'elle vérifie $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln\big(1 + f(x)\big)dx = 0$, et qu'avec $\alpha = \arccos\frac{1}{4}$, on a*

$$\int_\alpha^\pi \ln(1 + f(x))\, dx = \int_\alpha^0 \ln(1 + f(x))\, dx.$$

2 — Calculer une valeur approchée au dixième près de $\int_{\arccos\frac{1}{4}}^\pi \ln\big(1 + (\frac{1}{4} - \cos x)\big)\, dx$, et une valeur approchée au dixième près de $\int_{\arccos\frac{1}{4}}^0 \ln\big(1 + (\frac{1}{4} - \cos x)\big)\, dx$, et confirmer comme plausible le résultat de 1— .

Exercice 198 *Soit n un entier positif ou nul, et soit $f(x)$ l'unique fonction différentiable définie pour tous les x réels et telle que*

$$f(x)^{2n+1} + f(x) - x = 0.$$

1 — Montrer que $y = f(x)$ passe par l'origine et a une dérivée positive pour tout x, et en déduire qu'elle possède une fonction réciproque $g(x)$, définie pour tous x, telle que pour tout x on ait $g(f(x)) = x$ et $f(g(x)) = x$, telle que $g(0) = 0$. En fait $g(x) = x^{2n+1} + x$.
2 — Pour $x > 0$, le graphe de f est dans le premier cadran, $f(0) = 0$, f est croissante, et pour tout $x > 0$ on a $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt = xf(x)$.
3 — Montrer que $\int_0^{f(x)} g(t)dt = \frac{f(x)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{f(x)^2}{2}$.
4 — Montrer que $\int_0^x f(t)dt = \frac{2n+1}{2n+2}xf(x) - \frac{n}{2n+2}f(x)^2$.

FAMILLES DE COURBES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 199 *On considère la fonction $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. calculer y' et y'', et donner une équation différentielle linéaire homogène du second ordre que satisfait y.*

Exercice 200 *On définit la fonction* Si *par* $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$. *Montrer que* Si *est une fonction y de x satisfaisant l'équation différentielle $y' = \frac{\sin x}{x}$. En déduire que l'on a le développement limité* $\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + x^5\epsilon(x)$.

Exercice 201 *Montrer que l'équation $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$ admet une solution générale de la forme $y = cx - \frac{1}{4}c^2$, et admet aussi pour solution $y = x^2$. Quel est le rapport entre cette dernière solution et la solution générale ?*

Exercice 202 *Soit $(y - y'x)^2 = 2y' + 1$. Montrer qu'il s'agit essentiellement d'une équation de type Clairaut, ayant une solution générale $(y - cx)^2 = 2c + 1$. Montrer que l'enveloppe de cette solution générale est $y = -\frac{1+x^2}{2x}$.*

Exercice 203 *1 — Considérer $y = xy' + \frac{2}{x}$. Constater que l'on ne peut pas séparer les variable, et que ce n'est pas non plus une forme exacte ou une équation de Clairaut.*
2 — Montrer que si y est une solution, alors $y'' = 2x^{-3}$, et en déduire qu'une solution générale est de la forme $cx + \frac{1}{x}$.

Exercice 204 *On considère une famille Γ_c de courbe d'équations $F(x, y, c) = 0$, dont on suppose qu'elle admette une* enveloppe *$\mathcal{E}$ d'équation $y = \phi(x)$. Pour chaque x il existe donc un c(x) tel que le point $(x, \phi(x))$ de $\mathcal{E}$ soit un point de $\Gamma_{c(x)}$ (soit $F(x, \phi(x), c(x)) = 0$) en lequel $\mathcal{E}$ et $\Gamma_{c(x)}$ se "touchent" (c'est-à-dire sont tangentes, ont même pente).*
1 — Montrer que $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \phi(x), c(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \phi(x), c(x))\phi'(x) + \frac{\partial F}{\partial c}(x, \phi(x), c(x))c'x) = 0$.
2 — Montrer que la pente sur Γ_c vaut $-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,c)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,c)}$.
3 — Montrer que sur l'enveloppe, c'est-à-dire lorsque $y = \phi(x)$, on a $\begin{cases} F(x, y, c(x)) & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c(x)) & = 0 \end{cases}$.
4 — Soit $G(x, y, y') = 0$ une équation différentiellle satisfaite par toute courbe Γ_c de la famille. Montrer qu'elle est aussi satisfaite par l'enveloppe $\mathcal{E}$.
5 — On considère la famille de paraboles $y = -(1+c^2)x^2 + cx$. Déterminer son enveloppe.

Exercice 205 *Montrer que la famille de droites d'équation $(1-2t)x + (1+2t)y + 2t^2 = 0$ enveloppe une conique.*

Exercice 206 *Trouver toutes les solutions, y comprise l'enveloppe, de $yy' = xy'^2 + 1$.*

Exercice 207 *Résoudre, en commençant par différentier et exprimer les valeurs de y', l'équation $y' = 1 + x - y$.*

Exercice 208 *Trouver toutes les solutions de*
1 — $y' + 2xy = 2x$ avec la condition $y(0) = 2$
2 — $xy' - 2y = x^2$
3 — $xy' + 2y = \sqrt{x}$
4 — $xy' - 2y = \frac{x}{1+x^2}$

Exercice 209 *Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $y''+y'-2y = \frac{1}{chx}$, par variation de la constante.*

Exercice 210 *Trouver toutes les solutions de*
1 — $y'' + y' - 2y = \sin x$ par variation de la constante et par identification.
2 — $y'' + y' - 2y = x^3 + 1$ par variation de la constante et par identification.

Exercice 211 *Trouver toutes les solutions de*
1 — $y'' + 4y' + 3y = x$.
2 — $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$.
3 — $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$.
4 — $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Exercice 212 *On considère l'equation (E) : $y'' + y' - 2y = (x - 2)e^x + 2e^{-2x}$.*
1 — Donner la solution genérale de $y'' + y' - 2y = 0$.
2 — Donner la solution particulière de $y'' + y' - 2y = (x - 2)e^x$.
3 — Donner la solution particulière de $y'' + y' - 2y = 2e^{-2x}$.
4 — Donner la solution genérale de (E).

Exercice 213 *Les paraboles de tir depuis le point $O = (0,0)$ dans le plan vertical des (x,z), avec une vitesse initiale de grandeur donnée v_0 faisant avec l'axe $0x$ un angle variable α ont pour équation générale $z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. On pose $h = \frac{v_0^2}{2g}$ et $\lambda = \tan\alpha$.*
1 — Montrer que la famille de ces paraboles s'écrit $z = \lambda x - (1+\lambda^2)\frac{x^2}{4h}$, admet pour équation différentielle $(E) : 4h(z - xz') = x^2 + (2z - xz')^2$.
2 — Montrer que ces paraboles admettent pour enveloppe la parabole dite "parabole de sûreté" $y = h - \frac{1}{4h}x^2$. Vérifier que cette parabole est une solution singulière de (E).

Exercice 214 *Trouver l'enveloppe de la famille de droites $x\cos\lambda + y\sin\lambda = 1$.*

Exercice 215 *Montrer que l'équation à variables séparées $xdx + ydy = 0$ admet pour intégrale générale $x^2 + y^2 = \lambda$.*

Exercice 216 *1 — Résoudre l'équation $y' = -ky$.*
2 — Résoudre l'équation $y'' = -ky$.

Exercice 217 *Soit l'équation $y' = \frac{xy}{x^2-y^2}$. Montrer que c'est une équation homogène. En posant $u = \frac{y}{x}$ écrire l'équation différentielle satisfaite par $u = u(x)$, la résoudre en séparant les variables, puis, revenant à $y = y(x)$, montrer que la solution générale de l'équation proposée peut se mettre sous la forme $\frac{-x^2}{2y^2} = \ln|\lambda y|$. Conclure en montrant que l'on peut expliciter x en fonction de y par : $x = y\sqrt{-2\ln|\lambda y|}$.*

Exercice 218 *Montrer que $y' + xy = x^3y^3$ est une équation de Bernoulli. Poser $z = y^{-2}$ et montrer que l'on arrive à l'équation linéaire $z' - 2xz = -2x^3$. Pour résoudre cette équation linéaire poser $z = uv$, avec $v = e^{x^2}$. Montrer que v vérifie $v' - 2xv = 0$, et que donc pour résoudre l'équation en z il suffit de trouver les u solutions de $e^{x^2}u' = -2x^3$. Trouver ces u par séparation des variables. Conclure qu'une solution générale de l'équation en y est $y = \frac{1}{x^2+1+\lambda e^{x^2}}$.*

Exercice 219 *Montrer que l'équation de Bernoulli $x^2 + 2xyy' - y^2 - h = 0$ admet pour courbes intégrales une famille de cercles.*

Exercice 220 *Montrer que la fonction $y = -x$ est une intégrale particulière de l'équation de Riccati $(1+x^3)y' + 2xy' + x^2y + 1 = 0$. En déduire que l'on a une solution générale de la forme $y = \frac{\lambda - x}{1+\lambda x^3}$.*

Exercice 221 *On considère l'équation $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$. Rechercher les intégrales pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$, et montrer que l'on trouve des arcs d'ellipse. Rechercher les intégrales pour $|x| > 1$ et $|y| > 1$, et montrer que l'on trouve des arcs d'hyperboles. Montrer que dans tous les cas les courbes intégrales sont des arcs des coniques comprises dans l'équation $x^2 + y^2 - 2\mu xy = 1 - \mu^2$.*

Exercice 222 *Montrer que l'équation linéaire homogène $y' = -\frac{y}{x}$ a pour solution générale $y = Ce^{\frac{1}{x}}$. En faisant "varier la constante", c'est-à-dire en cherchant une solution sous la forme $y = C(x)e^{\frac{1}{x}}$, résoudre l'équation $y' = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x^3}$: montrer qu'alors $C'(x) = -\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$, puis que $C(x) = \big(-\frac{1}{x} - 1\big)e^{-\frac{1}{x}} + k$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si sur $\mathbb{R}_{<0}$ l'on pose $\varphi_\lambda(x) = \lambda e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1$, on détermine une solution maximale, et de même si sur $\mathbb{R}_{>0}$ l'on pose encore $\varphi_\lambda(x) = \lambda e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1$, on détermine une solution maximale. Montrer que la courbe φ_λ admettent pour asymptote horizontale la droite $y = \lambda - 1$, et pour asymptote verticale la droite $x = 0$. Dessiner la famille solution générale.*

Exercice 223 *Montrer que la famille* $y^2 = 2Cx + C^2$ *satisfait à* $yy'^2 + 2xy' - y = 0$.

Exercice 224 *Montrer que la courbe dont la pente de la tangente en chaque point est proportionnelle à l'abscisse du point de contact est une parabole* $y = ax^2 + C$.

Exercice 225 *On considère les courbes* Γ_C *d'équations* $\left(\frac{x}{C}\right)^n - \left(\frac{C}{x}\right)^n = \frac{2y}{x}$. *Montrer qu'elles ont la propriété qu'en tout point* $M \in \Gamma_C$ *si l'on note* N *le point où la tangente en* M *rencontre l'axe* Oy, *on a* $\frac{ON}{OM} = n$. *A-t-on ainsi toutes les courbes ayant cette propriété ?*

Exercice 226 *Montrer que l'enveloppe de la famille de cercles centrés sur la parabole* $y^2 = 2px$ *et passant par le sommet de la parabole est la courbe d'équation* $x^3 + y^2(x+p) = 0$ *(qui est une cissoïde).*

Exercice 227 *Montrer que la développée de l'ellipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, *considérée en tant qu'enveloppe de ses normales a pour équation* $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

Exercice 228 *1 — Montrer que l'équation de Riccati* $y' = y^2 - xy + 1$ *admet* $y_1(x) = x$ *comme solution particulière.*
2 — En posant $y(x) = x + u(x)$ *montrer que* $u' = u^2 + xu$, *qui est une équation de Bernoulli, de solution générale* $u = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{c_1 - \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt}$, *et en déduire que la solution générale de l'équation de Riccati proposée est donc* $y = x + \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{c_1 - \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt}$.

Exercice 229 *On considère l'équation* $y' = x + y^2$, *et on cherche sa solution telle que* $y(1) = 1$. *On suppose que cette solution puisse s'écrire sous la forme d'une série en puissances de* $(x-1)$, *soit :* $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{(n)}(1)(x-1)^n$. *Montrer que les dérivées de* y *en* 1 *d'ordres* 1, 2, 3, 4 *sont* 2, 5, 18, 96, *et en déduire que la série débute par :* $y = 1 + 2(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + \ldots$.

Exercice 230 *Montrer que* $y' + xy = x$ *admet la série en* $y = 1 + (a_0 - 1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n$ *comme solution, et reconnaître là la fonction* $1 + (a_0 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exercice 231 *1 — On considère l'équation* $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. *Constater que* $y_1 = x$ *est une solution particulière.*
2 — Montrer que $y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2} dx$ *est une seconde solution indépendante. Montrer que* $y_2 = x \int \frac{e^{-\ln|1-x^2|}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2|1-x^2|}$, *puis que* $y_2 = x \int \left(\pm \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx$, *soit* $y_2 = x\left[\mp \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]$.
3 — Montrer que toute solution de l'équation s'écrit $y = C_1 x + C_2\left(\frac{1}{2} x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \mp 1\right)$.

Exercice 232 *Résoudre* $y'' + y' + y = 0$, *puis* $y'' + y' + y = x$.

Exercice 233 *Soit l'équation* $y'' + 9y = 0$. *Trouver l'intégrale générale et la solution particulière* y *telle que* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 3$. *Constater que c'est une fonction périodique. En dessiner le graphe.*

Exercice 234 *Soit l'équation* $y'' + 2y' + 5y = 0$. *Trouver l'intégrale générale et la solution particulière* y *telle que* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$. *Constater que c'est une fonction "périodique amortie", en dessiner le graphe.*

Exercice 235 *Trouver la solution générale de l'équation* $y'' + 4y' + 3y = x$.

Exercice 236 *Trouver la solution générale de l'équation* $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$.

Exercice 237 *Trouver la solution générale de l'équation* $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$.

Exercice 238 *Montrer que l'intégrale générale de* $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$ *peut se mettre sous la forme* $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

Exercice 239 *Montrer que la solution générale de* $y' + ay = b$, *où* a *et* b *sont des constantes, s'écrit* $y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$.

Exercice 240 *Dessiner le graphe de la solution* $y = \sin(\beta x + \phi_0) - \frac{a}{2\beta} x \cos \beta x$ *de l'équation* $y'' + qy = a \sin \omega x$, *quand* $\beta = \omega = \sqrt{q}$ *(cas de résonance).*

Exercice 241 *Pour résoudre le système* $x' = y + z$, $y' = z + x$, $z' = x + y$, *où les inconnues sont trois fonctions* $x(t)$, $y(t)$ *et* $z(t)$, *on dérive la première, et entre cette première et sa dérivée on élimine* y *et* z, *et l'on obtient* $x'' - x - 2x = 0$. *Donner l'intégrale générale de cette dernière équation sous la forme* $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$, *et en déduire que* $y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - z$. *Enfin substituant dans la troisième équation montrer que* $z' + z = 3C_2e^{2t}$. *Montrer que l'intégrale de cette équation est* $z = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}$, *puis que* $y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}$. *Comme* x, y *et* z *jouent des rôles symétriques, présenter la solution générale du système* $x' = y+z$, $y' = z+x$, $z' = x+y$ *sous une forme "symétrique".*

Exercice 242 *1 — Montrer que la distance du point* $C = (u, v)$ *à la droite* $\mathcal{D}$ *d'équation* $ax + by + c = 0$ *est* $\delta = \frac{|au+bv+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
2 — On considère la famille (D_α) *des droites à la distance* 1 *du point* $(1, 1)$, *famille que l'on indexe par un paramètre* α *de sorte que chaque droite* D_α *de cette famille admette un paramétrage (en un paramètre* t*) de la forme* $\begin{cases} x_\alpha(t) & = 1 + \cos\alpha - (\sin\alpha)t \\ y_\alpha(t) & = 1 + \sin\alpha + (\cos\alpha)t \end{cases}$. *Vérifier que l'équation de* D_α *est* $(\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y - (\cos\alpha + \sin\alpha + 1) = 0$, *et que la distance de chaque* D_α *au point* $(1, 1)$ *est bien* 1.
3 — Montrer que l'équation différentielle du premier ordre, en la variable t, *aux deux fonctions inconnues* $x(t)$ *et* $y(t)$ *qui s'écrit* $y'x - x'y - (y' - x' + 1) = 0$ *admet la famille* $(D_\alpha) = (x_\alpha, y_\alpha)$ *comme solution.*
4 — Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ *de centre* $(1, 1)$ *et rayon* 1 *— de paramétrage* $\begin{cases} x & = 1 + \cos t \\ y & = 1 + \sin t \end{cases}$ *— est bien l'enveloppe de cette famille, et est aussi une solution de l'équation différentiellle formée en 3 —, solution qui n'est pas comprise dans la solution générale.*
5 — Soit (D^+_α) *la famille* (D_α) *précédente, dont on exclus les valeurs* $\alpha = k\pi$, *soit les verticales. Alors les droites de cette nouvelle famille restreinte s'écrivent toutes sous la forme* $y = \cot\alpha(1 - x) + 1 - \frac{1}{\sin\alpha}$, *et que ces fonctions* y *de* x *satisfont l'équation différentielle (en la variable* x*) :* $y = y'(1 - x) + 1 \pm \sqrt{1 + y'^2}$, *et donc l'équation :* $[(x - 1)^2 - 1]y'^2 + 2(x - 1)(y - 1)y' + (y - 1)^2 - 1 = 0$. *Reconnaître là une équation du type dit de Clairaut, soit de la forme* $y = xy' + f(y')$, *dont les droites* $y = cx + f(c)$ *sont*

évidemment solutions.
6 — Mettre l'équation de Clairaut obtenue en 5 — sous la forme

$$y' = -(x-1)(y-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1} \quad (E).$$

7 — Interpréter géométriquement l'équation (E) *en relation avec les équations des deux tangentes au cercle* $\mathcal{C}$ *issues du point* (x, y).
8 — Le cercle $\mathcal{C}$ *admet pour équation* $y = 1 \pm \sqrt{2x - x^2}$, *et cette fonction* y *de* x *satisfait l'équation* (E).

Exercice 243 *On considère une courbe paramétrée* Γ *d'équations* $\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases}$, *et la tangente* T_{t_0} *au point de* Γ *de paramètre* t_0, *de paramétrisation* $\begin{cases} x_{t_0}(t) &= f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ y_{t_0}(t) &= g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$, *d'équation :* $g'(t_0)x - f'(t_0)y = g'(t_0)f(t_0) - f'(t_0)g(t_0)$, *ou encore si* $f'(t_0) \neq 0$, *d'équation* $y = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}x + \frac{g(t_0)f'(t_0) - g'(t_0)f(t_0)}{f'(t_0)}$. *Former une équation différentielle du premier ordre satisfaites par ces droites.*

Exercice 244 *Soit l'équation différentielle* $y'' + py' + qy = P(x)e^{\alpha x}$, *avec* $p, q, \alpha \in \mathbb{R}$, *et* $P(x)$ *un polynôme de degré au plus* n. *Montrer qu'il existe un polynôme* $U(x)$ *de degré au plus* $n + 2$ *telles que* $U(x)e^{\alpha x}$ *soit une solution particulière de l'équation.*

Exercice 245 *Soit l'équation différentielle* $y'' + py' + qy = m \cos \beta x + n \sin \beta x$, *avec* $p, q, m, n, \beta \in \mathbb{R}$. *Montrer qu'il existe une solution particulière de la forme*

$$(ax + b) \cos \beta x + (cx + d) \sin \beta x,$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Exercice 246 *Soit l'équation différentielle* $y'' + py' + qy = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, *avec* $p, q, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *et* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *des polynômes de degrés au plus* n. *Montrer qu'il existe deux polynômes* $U(x)$ *et* $V(x)$ *de degrés au plus* $n + 1$ *telles que*

$$U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

soit une solution particulière de l'équation.

Exercice 247 *Soit* $k \neq 0$, *et* f *une fonction continue,* $y_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \frac{\sin\big(k((x-t)\big)}{k}\, dt$, *et l'équation* $y'' + k^2 y = f(x) \quad (E)$.
1 — Calculer y_1', *en considérant bien qu'entre en jeu une intégrale dépendant d'un paramètre.*
2 — Calculer y_1'' *et montrer que* y_1 *est une solution particulière de l'équation* (E).
3 — Montrer que la solution générale de (E) *peut s'écrire* $y = a \cos kx + b \sin kx + y_1$.
4 — Montrer qu'en fait on arrive bien à y_1 *en cherchant une solution particulière de* (E) *de la forme* $C_1(x) \cos kx + C_2(x) \sin kx$ *(Méthode de variation des constantes), avec donc ici un wronskien* $W(\cos kx, \sin kx) = k$ *; on aboutit à une solution de la forme* $\frac{1}{k}\big(-\cos kx \int_{x_0}^{x} f(t) \sin kt\, dt + \sin kx \int_{x_0}^{x} f(t) \cos kt\, dt\big)$, *que l'on ramène à la forme* y_1.
4 — Linéariser le produit $\cos(\omega t) \sin\big((k(x - t)\big)$, *et en déduire une écriture comme fonction élémentaire de la solution générale de* $y'' + k^2 y = \cos(\omega x)$.

Exercice 248 *1 — Montrer que le système* $\begin{cases} x'(t) - k(t)y(t) &= 0 \\ y'(t) + k(t)x(t) &= 0 \end{cases}$ *admet la solution donnée par*

$$x_1 = \cos\big(\int_{t_0}^t k(\tau)d\tau\big), \quad y_1 = -\sin\big(\int_{t_0}^t k(\tau)d\tau\big),$$

et que ces fonctions x_1 et y_1 sont deux solutions indépendantes de l'équation linéaire homogène du second ordre : $u'' - \frac{k'}{k}u' + k^2u = 0$.
2 — Donner deux solutions indépendantes de l'équation $u'' - \frac{1}{2}u' + e^x u = 0$.
3 — Donner une solution générale de $u'' - \frac{1}{2}u' + e^x u = 0$.

Exercice 249 *Résoudre les équations différentielles suivantes : $y' = \cos^2 x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y' = \frac{1}{x^2-16}$, $y'' = 1$, $y'' = \frac{x+1}{x-1}$.*

Exercice 250 *Pour chacune des familles suivantes de courbes former une équation différentielle du 1er ordre dont les courbes de la famille soient solutions : $y = c$, $y = cx + 1$, $y = c(x+1)$, $y = \frac{c}{x+1}$, $y = c_1 + c_2 e^{-x}$, $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.*

Exercice 251 *Former l'équation différentielle de la famille de droites $y = 2cx - c^2$. Montrer que ces droite enveloppent $y = x^2$.*

Exercice 252 *Soit l'équation différentielle $(E)\ : 3x^2 + 4y^3y' - 1 + y' = 0$.*
1 — Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme $(4y^3 + 1)dy = (1 - 3x^2)dx$.
2 — Montrer que toute solution de (E) satisfait $y^4 + y = x - x^3 + c$.

Exercice 253 *Montrer que toute solution de $2yy' = e^x$ satisfait à $y^2 = e^x + c$.*

Exercice 254 *Montrer que toute solution de $y' = x^2y^2$ est ou bien la fonction $y = 0$ ou bien une fonction, de la forme $y = -\frac{3}{x^3+c}$.*

Exercice 255 *Montrer que les solutions de $xdx+ydy = 0$ sont caractérisées par l'équation $x^2 + y^2 = c^2$.*

Exercice 256 *Montrer que toute solution de $\frac{x+1}{y}dx = (x^2+1)\ln|y|dy$ est une fonction y définie implicitement par $2\ln(x^2+1) + 4\arctan x = 2y^2\ln|y| - y^2 + c$.*

Exercice 257 *On considère l'équation $xy' + 2yy' = x - y$. Montrer que les solutions sont données par $xy + y^2 - \frac{1}{2}x^2 = c$.*

Exercice 258 *Montrer que l'équation $y - xy' = 2y^3y'$ devient “exacte” après multiplication par $\frac{1}{y^2}$, et la résoudre. On trouvera $\frac{x}{y} = y^2 + c$ et $y = 0$.*

Exercice 259 *Trouver la fonction $y = y(x)$ telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$, et telle que $y'' = y'$.*

Exercice 260 *On considère l'équation du type de Clairaut $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$. Montrer qu'elle admet pour solutions les droites $y = cx - \frac{1}{4}c^2$ et l'enveloppe de ces droites $y = x^2$. A-t-elle d'autres solutions ?*

Exercice 261 *Montrer que l'équation $(y - y'x)^2 = 2y' + 1$ a pour solutions les courbes $(y - cx)^2 = 2c + 1$ et l'enveloppe de cette famille qui est $y = -\frac{1+x^2}{2x}$. A-t-elle d'autres solutions ?*

Exercice 262 *L'équation* $y = xy' + \frac{2}{x}$ *n'est ni à variables séparables, ni exacte, ni de Clairaut.*
1 — Pour la résoudre on commence par la dériver , d'où $y'' = 2x^{-3}$*, et* $y' = -x^{-2} + c$*.*
2 — Montrer, en substituant la valeur trouvée de y'*, que les solutions sont* $y = cx + \frac{1}{x}$*.*

Exercice 263 *1 — Pour résoudre* (E) *:* $y' = \frac{x+2y-4}{2x-y-3}$*, on pose* $t = x - 2$ *et* $v = y - 1$*. Montrer que* $v' = \frac{1+2\frac{v}{t}}{2-\frac{v}{t}}$*.*
2 — Poser $u = \frac{v}{t}$ *et aboutir à* $\frac{(2-u)u'}{1+u^2} = \frac{1}{t}$*.*
3 — Montrer que la solution de (E) *satisfait à*

$$2\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right] = \ln|x-2| + c.$$

Exercice 264 *Un bloc de masse* m *est attaché à un ressort et glisse horizontalement sur une table, la distance à l'origine étant notée* s*. Le ressort exerce une force de rappel* $-b^2s$*, le frottement cause une résistance* $-2as'$ *proportionnelle à la vitesse, et donc l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit ici :* $ms'' = -2as' - b^2s$*. Étudier le mouvement.*

NEUF SUJETS DE PARTIELS ET EXAMEN, ET UN CORRIGÉ

PARTIEL MC2 samedi 13 mai 2006

Remarque : Chaque question est notée sur 2 points. Le total obtenu (sur 24) est pris tel que comme note sur 20.

Exercice 265 — *Soit* Γ *la courbe paramétrée définie par* $M(t) = (t^2 + t^3, t^2 - t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.
1 — Montrer que pour $t = 0$ *le point* $M(0)$ *est stationnaire. Déterminer la tangente en* $M(0)$.
2 — Déterminer la position locale de Γ *par rapport à la tangente en* $M(0)$. *Donner la nature du point* $M(0)$ *et faire un dessin de la courbe près de* 0.
3 — Montrer que Γ *n'admet pas d'asymptote verticale ou horizontale.*
4 — Montrer que Γ *n'admet pas d'asymptote oblique.*

Exercice 266 — *Soit* Δ *la courbe paramétrée de point courant* $D(t) = (t, \frac{1}{t})$, *avec* $t > 0$, *et* Γ *la courbe paramétrée de point courant* $C(t) = (\frac{3t^4+1}{2t^3}, \frac{t^4+3}{2t})$. *On désigne par* $\Omega(t)$ *le cercle d'équation* $x^2 + y^2 - 2\frac{3t^4+1}{2t^3}x - 2\frac{t^4+3}{2t}y + 3\frac{t^4+1}{t^2} = 0$.
1 — Montrer que la droite $D(t)C(t)$ *est normale à* Δ *en* $D(t)$ *et tangente à* Γ *en* $C(t)$.
2 — Quelle est le rayon de courbure $R(t)$ *de* Δ *au point* $D(t)$ *? Pour quelle valeur de* $t > 0$ *le rayon* $R(t)$ *est-il minimum ?*
3 — Montrer que $C(t)$ *est le centre de courbure de* Δ *en* $D(t)$.
4 — Montrer que $\Omega(t)$ *est le cercle osculateur à* Δ *en* $M(t)$.

Exercice 267 — *On considère la surface* Σ *d'équation* $z = x^2y(4 - x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, *et dans le plan* $z = 0$ *les droites* V_a *d'équation* $x = a$, *avec le paramètre* $0 < a < 4$, *et* H_b *d'équation* $y = b$, *avec le paramètre* $0 < b < 4$.
1 — Donner la normale à Σ *au point* $A(u, v) = \Big(u, v, u^2v(4 - u - v)\Big)$, *et l'équation du plan tangent en ce point. Pour quelles valeurs de* u *et* v *la normale est-elle verticale (c'est-à-dire le plan tangent horizontal) ?*
2 — Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $A(2, 1)$ *de la fonction* $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$. *Montrer que le point* $A(2, 1)$ *est un maximum local de* $f(x, y)$.
3 —Montrer que, pour a *fixé, la fonction* $f(x, y)$ *atteint un maximum local relatif sur* V_a *en un point unique* P_a *que l'on déterminera. Montrer que quand* a *varie, entre* 0 *et* 4, P_a *se déplace sur un segment de droite* Δ *passant par* $A(2, 1)$.
4 — Montrer que, pour b *fixé, la fonction* $f(x, y)$ *atteint un maximum local relatif sur* H_b *en un point unique* Q_b *que l'on déterminera. Montrer que quand* b *varie, entre* 0 *et* 4, Q_b *se déplace sur segment de droite* Π *passant par* $A(2, 1)$.

EXAMEN MC2 mardi 30 mai 2006

NB. Les calculettes ne sont pas autorisées.

Exercice 268 — *Calculer* $\int_0^{2\pi} \cos(x)\sin(3x)dx$.

Exercice 269 — *Calculer* $\int_1^2 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

Exercice 270 — *Calculer* $\int_{\frac{1}{11}}^{\frac{1}{6}} \frac{dx}{x\sqrt{1-4x-5x^2}}$.

Exercice 271 — *Donner la solution générale de* $y' = \frac{2xy-3}{x^2}$*, l'inconnue étant une fonction* $y(x)$ *définie pour tous les* $x > 0$.

Exercice 272 — *Donner la solution générale de* $4y'' - 20y' + 25y = 1$*, l'inconnue étant une fonction* $y(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 273 — *Donner la solution générale de* $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$*, l'inconnue étant une fonction* $y(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 274 — *Le but de l'exercice est de dessiner la courbe paramétrée* Γ *de point courant*

$$G(t) = (t(t-1)^2, t + \frac{1}{t}), \quad t \neq 0, t \in \mathbb{R}.$$

1 — Trouver la valeur t_0 *de* t *pour laquelle* $G(t_0)$ *est un point stationnaire de* Γ*. Donner les développements limités à l'ordre 3 en* t_0 *des fonctions* $x(t) = t(t-1)^2$ *et* $y(t) = t + \frac{1}{t}$*, et de la fonction* $G(t)$*. Quelle est la tangente à* Γ *au point* $G(t_0)$ *? Dessiner la courbe au voisinage de ce point.*

2 — Donner les tangentes à Γ *aux points* $t = -1$ *et* $t = \frac{1}{3}$*. Montrer que* Γ *admet une asymptote verticale quand* $t \to 0$*. Admet-elle d'autres asymptotes ?*

3 — Tracer le graphe de la courbe paramétrée Λ *de point courant* $L(t) = (t(t-1)^2, t), t \in \mathbb{R}$*. Montrer que l'écart entre* $G(t)$ *et* $L(t)$ *tend vers 0 quand* $t \to \pm\infty$*. Ajouter sur le dessin de* Λ *celui de* Γ*.*

EXAMEN MC2 mercredi 6 septembre 2006

NB. Les calculettes ne sont pas autorisées.

Exercice 275 (2 pt) — *Calculer* $\int_1^2 \frac{xdx}{4x^2-1}$.

Exercice 276 (2 pt) — *Calculer* $\int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)dx$.

Exercice 277 (2 pt) — *Donner la solution générale de* $y'' + y' + y = x$*, l'inconnue étant une fonction* $y(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 278 (1+1+2 pt) — *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \cos(2\pi xy)$*, et la surface* Σ *d'équation* $z = f(x,y)$*,* $x, y \in \mathbb{R}$.

1 — Donner la normale et le plan tangent à Σ *au point* $A(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

2 — Pour $\vec{n} = (a,b)$ *avec* $a^2 + b^2 = 1$*, déterminer la dérivée de* f *au point* $A(1,1)$ *dans la direction* $\vec{n}$.

3 — Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $A(1,1)$ *de la fonction* f*. Ce point est-il un extremum local de* f *?*

Exercice 279 (2+2+3+2+1 pt) — *On considère la courbe paramétrée* Γ *de point courant*

$$G(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1 — Montrer que $G(0)$ *est un point stationnaire de* Γ*. Quelle est la tangente à* Γ *au point* $G(0)$ *? Dessiner la courbe au voisinage de ce point.*

2 — Montrer que pour tout t *on a* $G(t + 2\pi) = G(t) + (2\pi, 0)$*. Trouver tous les points stationnaires de* Γ *et les tangentes en ces points. Donner aussi les points à tangentes horizontales.*

3— Donner l'équation de la tangente à Γ en un point $G(u)$, avec $\forall k \in \mathbb{Z}(u \neq 2k\pi)$, écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de $G(t)$ en u, et en déduire la position de la courbe au voisinage de $G(u)$ par rapport à sa tangente en ce point.

4 — Déterminer les rayon et centre de courbure $R(u)$ et $C(u)$ de Γ en $G(u)$, lorsque $\forall k \in \mathbb{Z}(u \neq 2k\pi)$.

5 — Dessiner le graphe de Γ pour $t \in [-10\pi, +10\pi]$.

PARTIEL MC2 samedi 10 mars 2007

Remarque : Chaque question est notée sur 2 points. Le total obtenu (sur 30) est pris tel que comme note sur 20.

Exercice 280 — *Soit $\mathcal{G}$ la courbe de point courant $G(t) = (\frac{t^2}{t-1}, \frac{t^2}{t+1})$, avec $t \neq \pm 1$.*

1 — Déterminer les asymptotes verticales ou horizontales de $\mathcal{G}$.

2 — Déterminer les asymptotes obliques de $\mathcal{G}$.

Exercice 281 — *Soit $\mathcal{A}$ la courbe de point courant $A(t) = (3\cos t + \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$, avec $t \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{B}$ la courbe de point courant $B(t) = (6\cos t - 2\cos 3t, 6\sin t + 2\sin 3t)$, avec $t \in \mathbb{R}$.*

1 — Montrer que la droite $A(t)B(t)$ est normale à $\mathcal{A}$ en $A(t)$ et tangente à $\mathcal{B}$ en $B(t)$.

2 — Vérifier les identités $3\cos t + \cos 3t = 4\cos^3 t$ et $3\sin t - \sin 3t = 4\sin^3 t$. Déterminer les points stationnaires et les points de rebroussements de $\mathcal{A}$.

3 — Quelle est le rayon de courbure $R(t)$ de $\mathcal{A}$ au point $A(t)$?

4 — Montrer que $B(t)$ est le centre de courbure de $\mathcal{A}$ en $A(t)$.

5 — Dessiner et comparer les courbes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 282 — *On considère en coordonnées polaires de pôle O et axe Ox la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = 2\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$.*

1 — Donner l'ensemble de définition de ρ, la période. Donner l'axe de symétrie de $\mathcal{C}$. Calculer ρ' et faire le tableau de variation de ρ.

2 — Faire un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\rho(\theta)$, en déduire l'étude au pôle O (soit pour $\theta = 0$) : déterminer la tangente, la nature du point, la position locale de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente en O.

3 —Faire l'étude pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Déterminer l'asymptote de $\mathcal{C}$.

4 —Montrer que le cercle Γ de rayon 1 et centre $(1, 0)$ a pour équation polaire $\rho = 2\cos\theta$, que la droite Δ perpendiculaire en $(2, 0)$ à l'axe Ox a pour équation polaire $\rho = \frac{2}{\cos\theta}$. Si les points $P \in \Gamma$, $Q \in \Delta$, $M \in \mathcal{C}$ et le pôle O sont alignés, montrer que $OM = OQ - OP$. Dessiner complètement $\mathcal{C}$.

Exercice 283 — *Soit la surface Σ d'équation $z = xy(x + y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.*

1 — Donner la normale à Σ au point $A(u, v) = \Big(u, v, uv(u + v)\Big)$, et l'équation du plan tangent en ce point. Pour quelles valeurs de u et v la normale est-elle verticale (c'est-à-dire le plan tangent horizontal) ?

2 — En considérant $f(x, y) = xy(x + y)$ sur la droite d'équations $x = \alpha t$, $y = \beta t$, où α et β sont pris tels que $\alpha \neq -\beta$, montrer que le point $A(0, 0)$ n'est ni un maximum local ni un minimum local de $f(x, y)$.

3 — Montrer que $f(x, y) = xy(x + y)$ n'admet aucun extremum local.

4 — Déterminer en fonction de k les extremum de $f(x, y)$ sur la droite $x + y - k = 0$.

EXAMEN MC2, 2 mai 2007 : ÉNONCÉ ET CORRIGÉ

ÉNONCÉ

Exercice 284 *(ex 1)— Déterminer les intégrales*
1 *(1pt)* — $\int_0^x \frac{t}{1+t^4} dt.$
2 *(1pt)*— $\int_0^x \cos^5 t \sin t \, dt.$
3 *(1pt)* —- $\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^5} dt.$

Exercice 285 *(ex 2) — 1* *(1 pt)* — *Déterminer les nombres a, b et c tels que l'on ait* $\frac{1}{t(t-1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{(t-1)^2}.$
2 *(2 pt)* — *Pour* $x \geq 2$, *Calculer* $f(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(t-1)^2}$. *Puis déterminer* $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Exercice 286 *(ex 3)— En supposant que* $1 < a < b < 4$, *soit* $I = \int_a^b \sqrt{-x^2+5x-4}\, dx$ *et soit* $J = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{5x-8}{\sqrt{-x^2+5x-4}}\, dx$.
1 *(3 pt)* — *En passant par la forme canonique du trinôme puis une factorisation, mettre I sous la forme canonique, où c, h, e sont des rationnels,* $I = c\int_a^b \sqrt{-(hx-e)^2+1}\, dx$. *Par changements de variables obtenir* $I = \frac{9}{4}\int_P^Q \cos^2 u \, du$, *en précisant les bornes P et Q en fonction de a et b. Calculer I.*
2 *(4 pt)* — *En intégrant I par parties établir* $2I = \left[x\sqrt{-x^2+5x-4}\right]_a^b + J$. *Avec* $t = x - \frac{5}{2}$ *et une factorisation mettre J sous la forme* $J = \frac{1}{3}\int_{a-\frac{5}{2}}^{b-\frac{5}{2}} \frac{gt+k}{\sqrt{1-(pt)^2}}\, dt$, *avec g entier et k, p rationnels. Calculer J puis à nouveau I.*
3 *(2 pt)* — *On considère le cercle* $\mathcal{C}$ *d'équation* $x^2+y^2-5x+4=0$. *Déterminer la surface du disque* $x^2+y^2-5x+4 =\leq 0$. *Déterminer la limite de I lorsque* $a \to 1^+$ *et* $b \to 4^-$.

Exercice 287 *(ex 4)— On considère la courbe paramétrée* $\mathcal{N}$ *définie par le point courant* $M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ *où, pour* $t \in [0, 2\pi]$, $x(t) = 3\cos t - \cos 3t$ *et* $y(t) = 3\sin t - \sin 3t$.
1 *(3 pt)* — *Vérifier que* $3\cos t - \cos 3t = 6\cos t - 4\cos^3 t$ *et que* $3\sin t - \sin 3t = 4\sin^3 t$. *Montrer que les deux points* $A = (2,0) = M(0)$ *et* $C = (-2,0) = M(\pi)$ *sont les deux seuls points de rebroussements de* $\mathcal{N}$. *Donner les tangentes en ces points.*
2 *(4 pt)* — *Donner les tangentes aux points* $B = (0,4) = M(\frac{\pi}{2})$ *et* $D = (0,-4) = M(\frac{3\pi}{2})$, *et calculer la courbure en ces points. Dessiner* $\mathcal{N}$.
3 *(3 pt)* — *On désigne par* $s(t)$ *la longueur de l'arc de courbe d'origine* $A = M(0)$ *et d'extrémité* $M(t)$. *Montrer que* $\frac{ds}{dt} = 6\sin t$. *Calculer la longueur* L_{AC} *de la courbe* $\mathcal{N}$ *depuis A jusqu'à C, puis la longueur L de* $\mathcal{N}$ *entière.*

Exercice 288 *(ex 5) — 1* *(1 pt)* — *Donner la solution générale v de l'équation sans second membre* $xv' - v = 0$, *où l'inconnue est une fonction* $v = v(x)$.
2 *(2 pt)* — *Par la méthode de variation de la constante, donner la solution générale de l'équation avec second membre* $xy' - y = 3x^2$ *où l'inconnue est une fonction* $y = y(x)$, *et la solution particulière* y_1 *telle que* $y_1(1) = 1$.

Exercice 289 *(ex 6) — 1* *(1 pt)* — *Donner la solution générale de l'équation différentielle* $y'' - 5y' + 6y = 0$.
2 *(2 pt)* — *Donner une solution particulière de l'équation* $y''-5y'+6y = 4e^{3x}$ *et une solution particulière de l'équation* $y'' - 5y' + 6y = xe^{-x}$.
3 *(1 pt)* — *Donner la solution générale de l'équation* $y'' - 5y' + 6y = xe^{-x} + 4e^{3x}$.

CORRIGÉ

1.1 — Si $u=t^2$, $tdt=\frac{1}{2}du$, $I=\int_0^x \frac{t}{1+t^4}dt=\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\frac{du}{1+u^2}=[\frac{1}{2}\arctan u]_0^{x^2}=\frac{1}{2}\arctan(x^2)$.

1.2 — Si $u=\cos t$, $\sin t dt=-du$, $I=\int_0^x \cos^5 t\sin t\,dt=\int_1^{\cos x}-u^5du=[-\frac{u^6}{6}]_1^{\cos x}$, soit $I=\frac{1-\cos^6 x}{6}$.

1.3 — Si $u=\ln t$, $\frac{dt}{t}=du$, $I=\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^5}dt=\int_{\ln 2}^{\ln x}\frac{du}{u^5}=\left[\frac{-1}{4u^4}\right]_{\ln 2}^{\ln x}=\frac{1}{4\ln^4 2}-\frac{1}{4\ln^4 x}$.

2.1 — On a pour tout t, $\frac{1}{t(t-1)^2}=\frac{a(t-1)^2+bt(t-1)+ct}{t(t-1)}$, soit $1=a(t^2-2t+1)+b(t^2-t)+ct$, et $1=(a+b)t^2+(-2a-b+c)t+a$, d'où en identifiant les coefficients $a=1$, $-2a-b+c=0$, $a+b=0$, donc $a=1,b=-1,c=1$, et l'identité : $\frac{1}{t(t-1)^2}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}$.

2.2 — $f(x)=\int_2^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt=\int_2^x\frac{dt}{t}-\int_2^x\frac{dt}{t-1}+\int_2^2\frac{dt}{(t-1)^2}=[\ln t]_2^x-[\ln(t-1)]_2^x+[\frac{-1}{t-1}]_2^x=\ln x-\ln 2-\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+1$, et finalement $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{1}{x-1}+1-\ln 2$. Quand $x\to+\infty$, $\frac{x}{x-1}\to 1$ et donc $\ln\frac{x}{x-1}\to\ln 1=0$, $\frac{1}{x-1}\to 0$, et donc $f(x)\to 0+0+1-\ln 2$, soit $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1-\ln 2$, ce qui s'écrit encore : $\int_2^\infty\frac{dt}{t(t-1)^2}=1-\ln 2$.

3.1 — $-x^2+5x-4=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{4}-4=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}\big(-\frac{4}{9}(x-\frac{5}{2})^2+1\big)$ soit donc $\frac{9}{4}\big(-(\frac{2}{3}x-\frac{5}{3})^2+1\big)$, et $I=\int_a^b\sqrt{-x^2+5x-4}\,dx=\frac{3}{2}\int_a^b\sqrt{-(\frac{2}{3}x-\frac{5}{3})^2+1}\,dt$. On a donc $c=\frac{3}{2},h=\frac{2}{3},e=\frac{5}{3}$. On pose alors $v=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$, $dx=\frac{3dv}{2}$, et $I=\frac{9}{4}\int_{\frac{2a-5}{3}}^{\frac{2b-5}{3}}\sqrt{1-v^2}\,dv$. Ensuite pour $u=\arcsin v$, soit $v=\sin u$, on a $\sqrt{1-v^2}=\cos u$, et $I=\frac{9}{4}\int_{\arcsin\frac{2a-5}{3}}^{\arcsin\frac{2b-5}{3}}\cos^2 u\,du$, soit la forme indiquée, avec $P=\arcsin\frac{2a-5}{3}$ et $Q=\arcsin\frac{2b-5}{3}$.

Puis avec $\cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$ il vient $I=\frac{9}{4}\big[\frac{u}{2}+\frac{\sin 2u}{4}\big]_P^Q=\frac{9}{8}\big[u+\sin u\cos u\big]_P^Q$. On a donc $\sin P=\frac{2a-5}{3}$ et $\cos P=\sqrt{1-(\frac{2a-5}{3})^2}=\frac{1}{3}\sqrt{9-(4a^2-20a+25)}=\frac{2}{3}\sqrt{-a^2+5a-4}$, puis $I=\big[\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-5}{3}+\frac{2x-5}{4}\sqrt{-x^2+5x-4}\big]_a^b$.

3.2 — On pose $u=\sqrt{-x^2+5x-4}$ et $v'=1$, donc $u'=\frac{1}{2}\frac{-2x+5}{\sqrt{-x^2+5x-4}}$ et $v=x$, de sorte que l'intégration par partie donne $I=\big[x\sqrt{-x^2+5x-4}\big]_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{(-2x+5)x}{\sqrt{-x^2+5x-4}}\,dx$. Le second terme du dernier membre vaut $-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{-2x^2+10x-8-5x+8}{\sqrt{-x^2+5x-4}}\,dx=-I+J$. Il vient $I=\big[x\sqrt{-x^2+5x-4}\big]_a^b-I+J$, soit $2I=\big[x\sqrt{-x^2+5x-4}\big]_a^b+J$.

Alors avec $t=x-\frac{5}{2}$, on a $dt=dx$, $5x-8=5t+\frac{9}{2}$, et on développe $-x^2+5x-4=-(t+\frac{5}{2})^2+5(t+\frac{5}{2})-4=-t^2-5t-\frac{25}{4}+5t+\frac{25}{2}-4=-t^2+\frac{25-16}{4}=-t^2+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}(-(\frac{2}{3}t)^2+1)$, de sorte que $J=\frac{1}{2}\int_{a-\frac{5}{2}}^{b-\frac{5}{2}}\frac{5t+\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{1-(\frac{2}{3}t)^2}}\,dt=\frac{1}{3}\int_{a-\frac{5}{2}}^{b-\frac{5}{2}}\frac{5t+\frac{9}{2}}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}t)^2}}\,dt$. Donc $g=5$, $k=\frac{9}{2}$, $p=\frac{2}{3}$.

On a $J=\frac{15}{8}\int_{a-\frac{5}{2}}^{b-\frac{5}{2}}\frac{\frac{8}{9}t}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}t)^2}}\,dt+\frac{9}{4}\int_{a-\frac{5}{2}}^{b-\frac{5}{2}}\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}t)^2}}\,dt$ ce qui devient, avec $u=\frac{2}{3}t$ et $v=\frac{4}{9}t^2$, $J=\frac{15}{8}\int_{\frac{4}{9}(a-\frac{5}{2})^2}^{\frac{4}{9}(b-\frac{5}{2})^2}\frac{dv}{\sqrt{1-v}}+\frac{9}{4}\int_{\frac{2}{3}(a-\frac{5}{2})}^{\frac{2}{3}(b-\frac{5}{2})}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{15}{8}\big[-2\sqrt{1-v}\big]_{\frac{4}{9}(a-\frac{5}{2})^2}^{\frac{4}{9}((b-\frac{5}{2})^2}+\frac{9}{4}\big[\arcsin u\big]_{\frac{2}{3}(a-\frac{5}{2})}^{\frac{2}{3}(b-\frac{5}{2})}$, et donc on arrive à $J=\big[-\frac{5}{2}\sqrt{-x^2+5x-4}+\frac{9}{4}\arcsin\big(\frac{2x-5}{3}\big)\big]_a^b$, puisque $1-v=1-(\frac{2}{3}t)^2=\frac{4}{9}(-x^2+5x-4)$. $I=\frac{1}{2}\big[x\sqrt{-x^2+5x-4}\big]_a^b+\frac{1}{2}J=\big[\frac{1}{2}x\sqrt{-x^2+5x-4}-\frac{5}{4}\sqrt{-x^2+5x-4}+\frac{9}{8}\arcsin\big(\frac{2x-5}{3}\big)\big]_a^b$, soit effectivement la valeur déjà obtenue à la question précédente 3.1.

3.3. — En identifiant x^2+y^2-5x+4 avec $(x-u)^2-(y-v)^2-r^2$ c'est-à-dire avec le développement $x^2+y^2-2ux-2vy+u^2+v^2-r^2$, il vient $u=\frac{5}{2}$, $v=0$, $r=\frac{3}{2}$. Ce cercle rencontre l'axe des x en les points 1 et 4. La surface du disque est $S=\pi r^2$ soit ici $S=\frac{9\pi}{4}$. Le demi-cercle supérieur a pour surface $\frac{9\pi}{8}$; son équation est $y=\sqrt{-x^2+5x-4}$, et donc $I=I(a,b)$ est la surface comprise entre ce demi-cercle supérieur, l'axe des x, et les verticales $x=a$ et $x=b$, et $\lim_{a\to 1^+,b\to 4^-}I=\frac{9\pi}{8}$.

4.1 — $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, et encore $cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Donc $\cos 3t = \cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t = \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2\sin^2 t \cos t = \cos t(\cos^2 t - 3\sin^2 t)$, soit $\cos 3t = \cos t(-3+4\cos^2 t)$, donc $3\cos t - \cos 3t = \cos t(3-4\cos^2 t+3) = \cos t(6-4\cos^2 t)$. Et $\sin 3t = \cos t \sin 2t + \sin t \cos 2t = 2\cos^2 t \sin t + \sin t(\cos^2 t - \sin^2 t) = \sin t(3\cos^2 t - \sin^2 t) = \sin t(3-4\sin^2 t)$, donc $3\sin t - \sin 3t = 4\sin^3 t$.

Un point de rebroussement est forcément un point stationnaire. Les seules points $M = (x,y)$ stationnaires, c'est-à-dire tels que $M' = (x',y') = (0,0)$, sont ceux associés aux t tels que $x' = y' = 0$. On a $x' = (6\cos t - 4\cos^3 t)' = -6\sin t + 12\cos^2 t \sin t$, $x' = 6\sin t(-1+2\cos^2 t)$, et on a $y' = (4\sin^3 t)' = 12\sin^2 t \cos t$. Les points stationnaires sont ceux tels que $6\sin t(-1+2\cos^2 t) = 0$ et $12\sin^2 t\cos t = 0$. Si $\sin t = 0$ alors $x' = y' = 0$, et si $\sin t \neq 0$, alors il faudrait $\cos t = 0$ et $-1+3\cos^2 t = 0$, ce qui est impossible. Donc les points stationnaires sont exactement ceux tels que $\sin t = 0$, soit $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Comme $M(t)$ est périodique de période 2π, on a donc exactement deux points stationnaires $M(0) = (2,0) = A$ et $M(\pi) = (-2,0) = C$. Nous allons montrer que ce sont des points de rebroussements, en considérant les dérivées seconde et troisième. On a $x = 3\cos t - \cos 3t, x' = -3\sin t + 3\sin 3t, x'' = -3\cos t + 9\cos 3t, x''' = 3\sin t - 27\sin 3t$ et $y = 3\sin t - \sin 3t, y' = 3\cos t - 3\cos 3t, y'' = -3\sin t + 9\sin 3t, y''' = -3\cos t + 27\cos 3t$, et donc pour $t = 0$ on a $M(0) = (2,0), M'(0) = (0,0), M''(0) = (6,0), M'''(0) = (0,24)$, et pour $t = \pi$ on a $M(\pi) = (-2,0), M'(0) = (0,0), M''(0) = (-6,0), M'''(\pi) = (0,-24)$. Dans les deux cas les premiers vecteurs dérivés non nul et non collinéaires sont le second et le troisième, et il s'agit donc d'un rebroussement de première espèce. Les tangentes en ces points sont données en direction par le premier vecteur dérivé non nul, soit ici le second, qui est $(6,0)$ pour $t = 0$ et $(-6,0)$ pour $t = \pi$. Ces tangentes sont l'axe des x.

4.2 — La tangente en $B = M(\frac{\pi}{2})$ à pour direction celle de $M'(\frac{\pi}{2}) = (-6,0)$, et celle en $D = M(\frac{3\pi}{2})$ à pour direction celle de $M'(\frac{3\pi}{2}) = (6,0)$. Ces tangentes sont horizontales, parallèles à l'axe des x. Le rayon de courbure est donnée par la formule $R = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y''-x''y'|}$: pour le point $t = \frac{\pi}{2}$ on a $x' = -6, y' = 0, x'' = 0, y'' = -12$, donc $R = \frac{36^{\frac{3}{2}}}{6\times 12} = 3$, et pour $t = \frac{3\pi}{2}$ on a $x' = 6, y' = 0, x'' = 0, y'' = 12$, et $R = \frac{36^{\frac{3}{2}}}{6\times 12} = 3$, Le centre de courbure du point B est donc $K = (0,1)$ et celui de D est $L = (0,-1)$.

Pour dessiner la courbe, on observe que $|x| \leq 3+1 = 4$ et aussi $|y| \leq 4$; en fait même, on va le voir, $|x| \leq 2\sqrt{2}$. On observe aussi que l'axe des x et l'axe des y sont des axes de symétrie. Et puis on place exactement les points à tangentes horizontales et les points à tangentes verticales. Les points à tangente horizontale vérifient $y' = 0$, soit $\sin^2 t \cos t = 0$, et l'on trouve les quatre points déjà examinés A, B, C, D. Les points à tangente verticale vérifient $x' = 0$, soit $\sin t(\cos^2 - \frac{1}{2}) = 0$. Les points où $\sin t = 0$ sont exclus car alors $y' = 0$, et en fait la tangente est horizontale, on l'a vu. Reste les points où $\cos^2 t = \frac{1}{2}$, qui conviennent car alors $y' = \pm 3\sqrt{2} \neq 0$; les points à tangentes verticales sont donc ceux tels que $\cos t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ceux donc associés aux valeurs $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}$, soit $E = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), F = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}), G = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}), H = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. En plaçant donc exactement ces points, en dessinant localement la forme du rebroussement en A et en C, les cercles osculateurs en B et D, les axes de symétrie, on achève aisément le dessin demandé.

4.3 — On a $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \big((-3\sin t + 3\sin 3t)dt\big)^2 + (3\cos t - 3\cos 3t)dt)^2$, soit en développant $ds^2 = (9\sin^2 t + 18\sin t \sin 3t + 9\sin^2 3t + 9\cos^2 t - 18\cos t\cos 3t + 9\cos^2 3t)dt^2$ c'est-à-dire encore $ds^2 = (18 - 18\cos(3t-t))dt^2 = 18(1-\cos 2t)dt^2 = 36\sin^2 t dt^2$. Donc $ds = 6\sin t dt$. Alors La longueur L_{AC} de l'arc de courbe de A à C vaut $L_{AC} = \int_A^C ds = \int_0^\pi 6\sin t dt$, soit donc $L_{AC} = \big[-6\cos t\big]_0^\pi = 12$. La longueur total de la courbe est le double deL_{AC}, soit $L = 24$.

5.1 — $xv' - v = 0$ implique pour $x = 0$ que $v(0) = 0$. Si l'on suppose $x > 0$, en séparant les variables $\frac{v'}{v} = \frac{1}{x}$, et en intégrant membre à membre, il vient $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$, soit $\ln|v| = \ln x + C$, et en passant aux exponentielles, $|v| = x.e^C$, donc $v = \pm e^C x$; autrement dit, $v = \lambda x$, pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. Si l'on suppose $x < 0$, il vient $\ln|v| = \ln(-x) + D$, donc $v = \mu x$, pour un $\mu \in \mathbb{R}$ quelconque. Enfin, si l'on cherche une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut que $\lambda = \mu$, et donc la solution générale sur $\mathbb{R}$ est de la forme $v = \alpha x$, pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque.

5.2. — Par variation de la constante α on cherche une fonction $\alpha(x)$ telle que $y = \alpha(x)x$ soit solution, soit $x(\alpha.1 + \alpha' x) - \alpha x = 3x^2$, soit $\alpha' x^2 = 3x^2$, soit pour $x \neq 0$ l'équation $\alpha' = 3$. On a donc une solution particulière pour α qui est $\alpha = 3x$, et donc une solution particulière en y qui est $3x.x = 3x^2$. la solution générale est donc cette solution particulière plus la solution générale de l'équation sans second membre déjà trouvée : la solution générale peut se mettre sous la forme $y = 3x^2 + \alpha x$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante quelconque. Enfin, La solution y_1 telle que $y_1(1) = 1$ correspondra à la valeur de α telle que $1 = 3.1^2 + \alpha.1$, soit $\alpha = -2$, et donc $y_1(x) = 3x^2 - 2x$.

6.1 — L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour racines $r_1, r_2 = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, soit $r_1 = 2, r_2 = 3$. Ces valeurs sont distinctes, donc les deux solutions particulières $e^{r_1 x} = e^{2x}$ et $e^{r_2 x} = e^{3x}$ engendrent linéairement toutes les solutions, et la solution générale est $y_0(x) = ae^{2x} + be^{3x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

6.2 — Une solution particulière de $y'' - 5y' + 6y = P_n(x)e^{\omega x}$ est à chercher sous la forme $Q_n(x)e^{\omega x}$ si ω n'est pas solution de l'équation caractéristique y"-5y'+6y = 0, sous la forme $xQ_n(x)e^{\omega x}$, si ω est solution de l'équation caractéristique et telle que $2\omega - 5 \neq 0$, et sous la forme $x^2 Q_n(x)e^{\omega x}$, si ω est solution de l'équation caractéristique et telle que $2\omega - 5 = 0$, avec donc $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ des polynômes de degré n. La valeur $\omega = 3$ est dans le second cas, et on cherche donc une solution de $y'' - 5y' + 6y = 4e^{3x}$ sous la forme $y_1 = axe^{3x}$. La valeur $\omega = -1$ est dans le premier cas, et on cherche donc une solution de $y'' - 5y' + 6y = xe^{-x}$ sous la forme $y_2 = (ax + b)e^{-x}$. On trouve y_1 en calculant $(axe^{3x})'' - 5(axe^{3x})' + 6axe^{3x} = (6a + 9ax)e^{3x} - 5(a + 3ax)e^{3x} + 6axe^{3x} = ae^{3x}$, et il suffit donc de prendre $a = 4$, soit $y_1 = 4xe^{3x}$. On trouve y_2 de même en calculant $((ax + b)e^{-x})'' - 5((ax + b)e^{-x})' + 6(ax + b)e^{-x} = (ax + b - 2a)e^{-x} - 5(-ax + a - b)e^{-x} + 6(ax + b)e^{-x} = (12ax + (12b - 7a))e^{-x}$. En identifiant à xe^{-x} il vient $a = \frac{1}{12}$ et $b = \frac{7}{144}$, donc $y_2 = \left(\frac{x}{12} + \frac{7}{144}\right)e^{-x}$.

6.3 — La solution générale y de l'équation proposée $y'' - 5y' + 6y = 4e^{3x} + xe^{-x}$ s'obtient en ajoutant la solution générale y_0 de $y'' - 5y' + 6y = 0$, une solution particulière y_1 de $y'' - 5y' + 6y = 4e^{3x}$, et une solution particulière de $y'' - 5y' + 6y = xe^{-x}$, soit $y = y_0 + y_1 + y_2$, c'est-à-dire : $y = ae^{2x} + be^{3x} + 4xe^{3x} + \left(\frac{x}{12} + \frac{7}{144}\right)e^{-x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

EXAMEN MC2, 11 juin 2007

Exercice 290 — *Calculer les intégrales suivantes :*

1 — $\int_0^x \frac{\cos 2t}{\cos^2 t}\, dt$

2 — $\int_0^x \sin t \cos t\, dt$

3 — $\int_0^x t^2 \cos t\, dt$

Exercice 291 — *1* — *Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$,*

2 — *Calculer la primitive de $g(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ qui s'annule en 0, soit $h(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2+t+1} dt$.*

Exercice 292 — *On considère l'équation du premier ordre, $y' = 1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ (E1) où l'inconnue est une fonction continument dérivable $y = y(x)$ définie sur l'intervalle $[1, 2]$.*

1— Montrer que si $y = xu$ est une solution de $(E1)$, avec $u(x)$ une fonction continument dérivable de x, alors u est une solution de $xu' = (1-u)^2$ $(E2)$.

2 — Montrer que la fonction constante $u_1 = 1$ est solution de $(E2)$, et puis résoudre l'équation $(E2)$ lorsque $u \neq u_1$.

3 — Résoudre complètement $(E1)$.

Exercice 293 — *1 — L'inconnue étant une fonction $y = y(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois continument dérivable, donner la solution générale de l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ $(E1)$, puis donner la solution y_2 de $y'' + 4y = \sin x$ $(E2)$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$. Montrer que lorsque $x \to +\infty$ l'amplitude $|y_2|$ des oscillations reste bornée.*

2 — L'inconnue étant une fonction $y = y(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois continument dérivable, donner la solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$ $(E3)$, puis donner la solution y_4 de $y'' + y = \sin x$ $(E4)$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$. Montrer que lorsque $x \to +\infty$ l'amplitude $|y_4|$ des oscillations augmente indéfiniment (phénomène de résonance).

Exercice 294 — *On considère la courbe plane $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \frac{2}{\sqrt{4-3\cos^2\theta}}$.*

1 —Montrer que $\mathcal{C}$ admet l'équation implicite $x^2 + 4y^2 = 4$, et qu'elle admet la paramétrisation $x = 2\cos t$, $y = \sin t$. Préciser la valeur de $\cos t$ et $\sin t$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

2 — Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ au point où $\theta = \frac{\pi}{4}$.

3 — Dessiner $\mathcal{C}$.

Exercice 295 — *Soit Γ la courbe paramétrée définie par $M(t) = (2t - \frac{\sin t}{t}, 3t + \frac{\sin t}{t})$ lorsque $t \neq 0$, et par $M(0) = (-1, +1)$.*

1 — Calculer les vecteurs $M'(t)$ pour $t \neq 0$, et calculer aussi $M'(0)$. Montrer que la courbe n'admet pas de point stationnaire.

2 — Montrer que la courbe admet une unique asymptote, qui est oblique.

3 — Situer Γ par rapport à son asymptote. En quels points la courbe traverse-t-elle son asymptote ? En quels points admet-elle une tangente parallèle à son asymptote ?

EXAMEN MC2, 15 juin 2007

Exercice 296 — *Calculer les intégrales suivantes :*

1 — $\int_0^x \frac{\sin 2t}{\sin^2 t}\, dt$

2 — $\int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2}$

3 — $\int_0^x \frac{t}{1+2t^2}\, dt$

Exercice 297 — *1 — Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x) = \ln\frac{x}{1-x^2}$,*

2 — Calculer la primitive de $g(x) = \frac{x^2+1}{x-x^3}$ qui s'annule en 1.

Exercice 298 — *Donner la solution générale de $4y'' - 12y' + 9y = 1 - x$, l'inconnue étant une fonction $y(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 299 — *Donner la solution générale de $y'' - 6y' + y = \cos x$, l'inconnue étant une fonction $y(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 300 — *1 — On considère la courbe $y = x(x+1)^2$, c'est-à-dire la courbe paramétrée Λ de point courant $L(t) = (t(t+1)^2, t), t \in \mathbb{R}$. Étudier les variations de y en fonction de x et dessiner cette courbe Λ.*

2 — On considère ensuite la courbe paramétrée Γ de point courant

$$G(t) = (t(t+1)^2, t + \frac{1}{t}), \quad t \neq 0, t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que l'écart entre $G(t)$ et $L(t)$ tend vers 0 quand $t \to \pm\infty$.

3 — Trouver la valeur t_0 de t pour laquelle $G(t_0)$ est un point stationnaire de Γ. Donner les développements limités à l'ordre 3 en t_0 des fonctions $x(t) = t(t+1)^2$ et $y(t) = t + \frac{1}{t}$, et de la fonction $G(t)$. Quelle est la tangente à Γ au point $G(t_0)$? Dessiner la courbe au voisinage de ce point.

4 — Montrer que Γ admet une asymptote verticale quand $t \to 0$. Admet-elle d'autres asymptotes ?

5 — Ajouter sur le dessin de Λ celui de Γ.

Exercice 301 — *Soit la courbe plane $\mathcal{C}$ d'équation paramétrée $x = \cos t, y = 2\sin t + 1$.*

1 —Déterminer l'équation implicite de $\mathcal{C}$.

2 — Déterminer l'équation polaire de $\mathcal{C}$, de pôle $O = (0,0)$ et d'axe Ox.

3 – Déterminer les points de $\mathcal{C}$ à tangente horizontale, et ceux à tangente verticale.

4 — Dessiner $\mathcal{C}$.

EXAMEN MC2, 21 juin 2007

Exercice 302 — *Calculer les intégrales suivantes :*

1 — $\int_0^x \frac{dt}{(t+2)^3}$

2 — $\int_0^x \cos^2 t \, dt$

3 — $\int_0^x \frac{t}{1+t} \, dt$

Exercice 303 — *1 — Calculer la dérivée $F'(x)$ de $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}-1+2x}{\sqrt{5}+1-2x}$,*

2 — Calculer la primitive de $f(x) = \frac{1}{1+x-x^2}$ qui s'annule en $\frac{1}{2}$.

Exercice 304 — *Donner la solution générale de $3y'' - 12y' + 12y = \cos^2 x$, l'inconnue étant une fonction $y(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 305 — *Donner la solution générale de $y'' - 4y' + y = x^2$, l'inconnue étant une fonction $y(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 306 — *Soit la courbe plane $\mathcal{C}$ d'équation paramétrée* $\begin{cases} x = & 2 - 3\cos t \\ y = & 3 - 2\sin t \end{cases}$.

1 —Déterminer l'équation implicite de $\mathcal{C}$.

2 – Déterminer les points de $\mathcal{C}$ à tangente horizontale, et ceux à tangente verticale.

3 — Dessiner $\mathcal{C}$.

Exercice 307 — *1 — Donner les variations de $y = x^3 - x + 1$ en fonction de x, et dessiner la courbe paramétrée Λ de point courant $L(t) = (t^3 - t + 1, t), t \in \mathbb{R}$.*

2 — On considère ensuite la courbe paramétrée Γ de point courant

$$G(t) = (t^3 - t + 1, t + \frac{1}{3t}), \quad t \neq 0, t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que l'écart entre $G(t)$ et $L(t)$ tend vers 0 quand $t \to \pm\infty$.

3 — Trouver les valeurs t_0 et t_1 de t pour lesquelles $G(t_0)$ et $G(t_1)$ sont des points stationnaires de Γ. Quelle sont les tangentes à Γ aux points $G(t_0)$ et $G(t_1)$? En faisant les développement limités nécessaires des fonctions $x(t) = x^2 - x + 1$ et $y(t) = t + \frac{1}{3t}$ aux points $G(t_0)$ et $G(t_1)$, déduire et montrer par un dessin la forme de Γ aux voisinages de ces points.

4 — Montrer que Γ admet une asymptote verticale quand $t \to 0$. Admet-elle d'autres asymptotes ?

5 — Ajouter sur le dessin de Λ celui de Γ.

PARTIEL MC2, 22 mars 2008

Documents et calculettes ne sont pas autorisés.
On rédigera chaque exercice sur une double feuille séparée.
Chaque exercice sera noté sur 7 points.

Exercice 308 *(ex. 1) 1 (2 pt) — Calculer $\int_0^x t^2(\cos t)^2\, dt$ en exprimant $(\cos t)^2$ en fonction de $\cos 2t$, puis par intégrations par parties.*
2 (1 pt) — Calculer par changement de variables $\int_0^x \frac{t}{1+3t^2} dt$
3 (1,5 pt) — Calculer par changement de variables $\int_0^x \frac{\sin 2t}{1+\sin^2 t} dt$
4 a) (1,5 pt) — Trouver a, b, c et d tels que $\frac{1}{(t-2)^2(t+1)^2} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{(t-2)^2} + \frac{c}{t+1} + \frac{d}{(t+1)^2}$.
4 b) (1 pt) — Pour $-1 < x < 2$, calculer $\int_0^x \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2}$.

Exercice 309 *(ex. 2) Soit $f(x, y) = 2x - 3y + x^2 + 7y^2$, et Φ la surface d'équation $z = f(x, y)$.*
1 (1 pt) — Déterminer le point $M = (a, b)$ du plan des (x, y) correspondant au point $(a, b, f(a, b))$ en lequel la surface Φ admet un plan tangent horizontal.
2 (1,5 pt) — Donner le développement de Taylor de f en (a, b) à l'ordre 2.
3 (2 pt) — Déterminer si en (a, b) la fonction $f(x, y)$ admet un extremum local.
4 (1 pt) — Trouver la valeur du minimum de $f(x, y)$ lorsque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
5 (1,5 pt) — Montrer que $f(x, y)$ n'admet pas de maximum fini lorsque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 310 *(ex. 3) Soit $g(x, y) = x - y - x^2 + 3y^2$ et Γ la surface d'équation $z = g(x, y)$, et soit $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ et $A\tilde{} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) \in \Gamma$.*
1 (1 pt) — Déterminer l'équation du plan tangent à Γ au point $A\tilde{}$.
2 1 pt) — Donner le développement de Taylor de $g(x, y)$ en A à l'ordre 2.
3 2 pt) — Montrer qu'en A la fonction $g(x, y)$ n'admet pas un extremum local.
4 1,5 pt) — Pour p donné, montrer que parmi les (x, y) contraints à $y = px + \frac{1-3p}{6}$, *le point A est un point de maximum local de $g(x, y)$ si $|p| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, et un point de minimum local si $|p| > \frac{1}{\sqrt{3}}$.*
5 1,5 pt) — Montrer que parmi les points (x, y) contraints à $x^2 + y^2 = \frac{10}{36}$, *le point A est un point de minimum local de $g(x, y)$.*

Exercice 311 *(ex. 4) Soit γ la courbe paramétrée d'équation* $\begin{cases} x(t) & = t^2 + \frac{2}{t^2} \\ y(t) & = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 \end{cases}$, $t \neq 0$.
1 (1 pt) — Déterminer sur γ les points à tangente verticale, les points à tangente horizontale.
2 1 pt — Montrer que pour tout point $M(t) = (x(t), y(t))$ de γ on a $x \geq 2\sqrt{2}$ et $y \geq 4$.
3 (3 pt) — Déterminer les asymptotes de γ, et la position de γ par rapport à ses asymptotes.
4 (1 pt) — Montrer que $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 3xy + 2y^2 + 6x - 8y + 9 = 0,\ x > 0\}$.
5 (1 pt) — Dessiner γ.

Exercice 312 *(ex.5) Soit* $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
1 (1,5 pt) — Montrer que f est continue.
2 (1,5 pt) — Donner le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 4 de $f(x)$.
3 (1 pt) — Donner la tangente en $x = 0$ à la courbe $y = f(x)$, et la position locale de la courbe par rapport à cette tangente.
4 (2 pt) — Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$.
5 (1 pt) — Déterminer le centre de courbure et le rayon de courbure de $y = f(x)$ en $x = 0$.

CORRIGÉ

1. 1.1. — On a $(\cos t)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, donc $I = \int_0^x t^2 (\cos t)^2\, dt = \frac{1}{2}\int_0^x t^2(1 + \cos 2t)\, dt$, $I = \frac{1}{2}\int_0^x t^2\, dt + \frac{1}{2}\int t^2 \cos 2t\, dt = [\frac{t^3}{6}]_0^x + (\frac{1}{4}[t^2 \sin 2t]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x t \sin 2t\, dt)$, on calcule par parties encore $\int_0^x t \sin 2t\, dt = [t(-\frac{1}{2}\cos 2t)]_0^x - \int_0^x (-\frac{1}{2}\cos 2t)\, dt = [-\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t]_0^x$, et donc $I = [\frac{t^3}{6} + t^2\frac{\sin 2t}{4} + t\frac{\cos 2t}{4} - \frac{\sin 2t}{8}]_0^x = \frac{x^3}{6} + x^2\frac{\sin 2x}{4} + x\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{8}$.
1.2. — On pose $u = t^2$, de sorte que $du = 2tdt$, et le changement de variable donne $J = \int_0^x \frac{t}{1+3t^2}dt = \int_0^{x^2} \frac{du}{2(1+3u)} = [\frac{1}{6}\ln(1 + 3u)]_0^{x^2} = \frac{1}{6}\ln(1 + 3x^2)$.
1.3. — On a $\sin 2t = 2\sin t \cos t$, donc $K = \int_0^x \frac{\sin 2t}{1+\sin^2 t}dt = \int_0^x \frac{2\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}dt$, et avec $v = \sin t$ il vient $dv = \cos t dt$ et $K = \int_0^{\sin x} \frac{2v}{1+v^2}dv$, puis avec $u = v^2$ et donc $du = 2vdv$, on a $K = \int_0^{(\sin x)^2} \frac{1}{1+u}du = [\ln(1 + u)]_0^{(\sin x)^2} = \ln\left(1 + \sin^2 x\right)$.
1.4. a) — En réduisant au même dénominateur il s'agit de trouver a, b, c et d tels que l'on ait l'identité $a(t-2)(t+1)^2 + b(t+1)^2 + c(t-2)^2(t+1) + d((t-2)^2 = 1$, soit : $a(t-2)(t^2+2t+1) + b(t^2+2t+1) + c(t^2-4t+4)(t+1) + d(t^2-4t+4) = 1$, soit $a(t^3-2t^2+2t^2-4t+t-2) + b(t^2+2t+1) + c(t^3-4t^2+4t+t^2-4t+4) + d(t^2-4t+4) = 1$, soit $a(t^3-3t-2) + b(t^2+2t+1) + c(t^3-3t^2+4) + d(t^2-4t+4) = 1$, et en ordonnant suivant les puissances de t : $(a+c)t^3 + (b-3c+d)t^2 + (-3a+2b-4d)t + (-2a+b+4c+4d) = 1$, ce qui donne le système : $a+c = 0$, $b-3c+d = 0$, $-3a+2b-4d = 0$, $-2a+b+4c+4d = 1$. On a alors $c = -a$, et puis en reportant $3a+b+d = 0$, $-3a+2b-4d = 0$, $-6a+b+4d = 1$. L'ajout des deux premières donne $3b - 3d = 0$, donc $d = b$. Le report donne $3a + 2b = 0$ et $-6a + 5b = 1$, donc $b = -\frac{3}{2}a$, et $-6a - \frac{15}{2}a = 1$, soit $a = -\frac{2}{27}$, puis $b = \frac{1}{9}$, $c = \frac{2}{27}$, $d = \frac{1}{9}$. Bien sûr on peut aussi en arriver là par un usage bien systématique de la méthode du pivot. La décomposition cherchée est donc : $\frac{1}{(t-2)^2(t+1)^2} = -\frac{\frac{2}{27}}{t-2} + \frac{\frac{1}{9}}{(t-2)^2} + \frac{\frac{2}{27}}{t+1} + \frac{\frac{1}{9}}{(t+1)^2}$.
On remarque que les valeurs $b = d = \frac{1}{9}$ se trouvent aussi directement par :
$b = \lim_{t\to 2}\left((t-2)^2\frac{1}{(t-2)^2(t+1)^2}\right) = \lim_{t\to 2}\frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{9}$,
$d = \lim_{t\to -1}\left((t+1)^2\frac{1}{(t-2)^2(t+1)^2}\right) = \lim_{t\to -1}\frac{1}{(t-2)^2} = \frac{1}{9}$.
1.4. b) — On a donc $\int_0^x \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2} = [-\frac{2}{27}\ln|t-2| - \frac{\frac{1}{9}}{t-2} + \frac{2}{27}\ln|t+1| - \frac{\frac{1}{9}}{t+1}]_0^x$, soit, puisque lorsque $t \in [0, x]$ avec $x \in]-1, +2[$ on a $t < 2$ donc $|t-2| = 2-t$ et on a $t > -1$ et donc $|t+1| = t+1$, on a $\int_0^x \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2} = [-\frac{2}{27}\ln(2-t) - \frac{\frac{1}{9}}{t-2} + \frac{2}{27}\ln(1+t) - \frac{\frac{1}{9}}{t+1}]_0^x$, et donc, pour tout $x \in]-1, +2[$ on a $\int_0^x \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2} = -\frac{2}{27}\ln(2-x) - \frac{\frac{1}{9}}{x-2} + \frac{2}{27}\ln(1+x) - \frac{\frac{1}{9}}{x+1} + \frac{2}{27}\ln 2 + \frac{1}{18}$, $\int_0^x \frac{dt}{(t-2)^2(t+1)^2} = \frac{2}{27}\ln\frac{1+x}{2-x} - \frac{1}{9}\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} + \frac{2}{27}\ln 2 + \frac{1}{18}$.

2. 2.1. — Si une surface a pour équation $z = f(x, y)$, le plan tangent en un point $(u, v, f(u, v))$ a pour équation $z - f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, v)(x - u) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - v)$, et il est horizontal exactement si cette équation est de la forme $z = c$, c'est-à-dire si et seulement si les dérivées partielles sont nulles. Dans notre cas ces conditions sont donc $2 + 2u = 0$ et $-3 + 14v = 0$; la seule solution est $(a, b) = (-1, \frac{3}{14})$.
2.2. — On a $f(-1 + h, \frac{3}{14} + k) = 2(-1 + h) - 3(\frac{3}{14} + k) + (-1 + h)^2 + 7(\frac{3}{14} + k)^2$, et en développant : $f(-1 + h, \frac{3}{14} + k) = -2 + 2h - \frac{9}{14} - 3k + 1 - 2h + h^2 + 7\frac{9}{196} + 3k + 7k^2$, D'où le développement de Taylor : $f(-1 + h, \frac{3}{14} + k) = -2 - \frac{9}{14} + 1 + 7\frac{9}{196} + h^2 + 7k^2$, $f(-1 + h, \frac{3}{14} + k) = -\frac{37}{28} + h^2 + 7k^2$. Il s'agit bien du développement de Taylor, mais il se trouve que le reste est identiquement nul (car f est un polynôme de degré 2), si bien que nous avons là une identité valable pour tout(h, k), petit ou non.
2.3. — Au point $(a, b) = (-1, \frac{3}{14})$ la fonction vaut $-\frac{37}{28}$, et elle admet là un minimum local, puisqu'en des points voisins, pour des (h, k) petits, la variation de valeur qui est $h^2 + 7k^2$, est positive. On pourrait aussi invoquer le cours : au point considéré on a d'abord $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et puis ensuite $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 14 > 0$ et $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2} = 0 - 2 \times 14 < 0$, et ce sont là des conditions suffisantes pour être en un minimum.
2.4. — Comme observé en 2.2. la formule est une identité pour des (h, k) quelconques, et donc l'argument de 2.3. vaut partout : le point $(a, b) = (-1, \frac{3}{14})$ est le point de minimum absolu de $f(x, y)$, et la valeur minimum de f est donc $-\frac{37}{28}$.
2.5. — En revanche, f n'admet pas de maximum local (le seul point d'extremum local est (a, b) qui est un minimum), donc a fortiori n'admet pas de maximum absolu fini. D'ailleurs si l'on fait tendre (x, y) vers l'infini alors $f(x, y)$ tend vers l'infini, finissant par dépasser toute soit-disant valeur maximum fini qui aurait été prescrite. Notamment si $y = 0$, alors $f(x, 0) = 2x + x^2$ se comporte comme x^2, et tend vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

3. 3.1. — L'équation $z - g(u, v) = \frac{\partial g}{\partial x}(u, v)(x - u) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - v)$ du plan tangent en $(u, v, g(u, v))$ est ici : $z - (u - v - u^2 + 3v^2) = (1 - 2u)(x - u) + (-1 + 6v)(y - v)$, ce qui s'écrit encore $z = (1 - 2u)x + (-1 + 6v)y + u - v - u^2 + 3v^2 - (1 - 2u)u - (-1 + 6v)v$, soit : $z = (1 - 2u)x + (-1 + 6v)y + u^2 - 3v^2$.
Et au point $A\tilde{} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ on a $1 - 2u = 0$ et $-1 + 6v = 0$, donc ce plan est horizontal, d'équation $z - (\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - (\frac{1}{2})^2 + 3(\frac{1}{6})^2) = 0$, soit encore : $z = \frac{1}{6}$.
3.2. — On a $g(\frac{1}{2} + h, \frac{1}{6} + k) = (\frac{1}{2} + h) - (\frac{1}{6} + k) - (\frac{1}{2} + h)^2 + 3(\frac{1}{6} + k)^2$, soit en développpant : $g(\frac{1}{2} + h, \frac{1}{6} + k) = \frac{1}{2} + h - \frac{1}{6} - k - \frac{1}{4} - h - h^2 + \frac{1}{12} + k + 3k^2 = \frac{1}{6} - h^2 + 3k^2$. C'est le développement de Taylor demandé.
3.3. — Si l'on avait un extremum au point A, alors la variation locale, à savoir $-h^2 + 3k^2$, serait de signe constant pour (h, k) suffisamment petit. Or ce n'est pas le cas : pour (h, k) petit de la forme $(0, k)$ la variation $3k^2$ est positive, tandis que pour (h, k) petit de la forme $(h, 0)$ la variation $-h^2$ est négative. On pourrait ici aussi invoquer le cours : au point considéré on a d'abord $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, et puis ensuite $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -2 < 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 6 > 0$ et $\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial^2} = 0 - (-2) \times 6 > 0$, et ce sont là des conditions suffisantes pour n'être ni en un minimum ni en un maximum, car on est alors en un point-selle.
3.4. — Plus précisément, la variation près de A s'écrivant $-h^2 + 3k^2 = (\sqrt{3}k - h)(\sqrt{3}k + h)$, elle est nulle si $h = \pm\sqrt{3}k$, positive si ou bien $h < \sqrt{3}k$ et $h > -\sqrt{3}k$ (cas 1) ou bien $h > \sqrt{3}k$ et $h < -\sqrt{3}k$ (cas 3), et négative si ou bien $h < \sqrt{3}k$ et $h < -\sqrt{3}k$ (cas 4) ou bien $h > \sqrt{3}k$ et $h > -\sqrt{3}k$ (cas 2), les cas étant numérotés dans le sens trigonométrique en tournant autour de A.
Sous la contrainte indiquée pour (x, y) on a donc $\frac{1}{6} + k = p(\frac{1}{2} + h) + \frac{1-3p}{6}$, soit $k = ph$, On sera donc dans le cas positif (cas 1 et cas 3) si $|\frac{1}{p}| < \sqrt{3}$ (et alors on est sur un minimum), et dans le cas négatif (cas 4 et cas 2) si $|\frac{1}{p}| > \sqrt{3}$ (et alors on est sur un maximum), ce qui est le résultat demandé.

3.5. — Pour montrer que l'on a un minimum local il faut constater que sur le cercle et près de A on est dans le cas 1 ou le cas 3. Mais pour cela il suffit de voir que c'est le cas si l'on est sur la tangente au cercle en A et près de A ; et vue la question 3.4., cela revient à montrer que cette tangente est de la forme $y = px + \frac{1-3p}{6}$ avec $|p| > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Or le cercle au voisinage de A a pour équation $y = \sqrt{\frac{10}{36} - x^2}$, et donc la pente p de la tangente est la valeur de $y' = \frac{-x}{\sqrt{\frac{10}{36}-x^2}}$ pour $x = \frac{1}{2}$, soit $p = y'(\frac{1}{2}) = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{10}{36}-\frac{1}{4}}} = \frac{-1}{2\frac{1}{6}} = -3$. On a $|p| = 3 > \frac{1}{\sqrt{3}}$, et on est sur un minimum local.
Voici une autre démonstration. On se place sur le cercle en posant $r = \frac{\sqrt{10}}{6}$, $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, et là g devient $G(t) = g(r\cos t, r\sin t) = r\cos t - r\sin t - r^2\cos^2 t + 3r^2\sin^2 t$. Si donc t_0 est la valeur de t telle que $\cos t_0 = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et $\sin t_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, le développement de Taylor de G en t_0 s'écrit : $G(t_0+u) = G(t_0) + G'(t_0)u + \frac{1}{2}G''(t_0)u^2 + u^2\epsilon(u)$, avec $\epsilon(u)$ une fonction de u qui tend vers 0 quand u tend vers 0. Pour avoir un minimum local sur le cercle il suffit que $G'(t_0) = 0$ et que $G''(t_0) > 0$, ce que l'on va vérifier.
On calcule $G'(t) = -r(\sin t + cost) + 8r^2\cos t\sin t$, et $G'(t_0) = -\frac{\sqrt{10}}{6}(\frac{4}{\sqrt{10}}) + 8\frac{10}{36}\frac{3}{10} = 0$, puis $G''(t) = -r(\cos t - \sin t) + 8r^2(-\sin^2 t + \cos^2 t)$ et $G''(t_0) = -\frac{\sqrt{10}}{6}(\frac{2}{\sqrt{10}}) + 8\frac{10}{36}\frac{8}{10} = \frac{13}{9} > 0$.

4. 4.1. — On a $x'(t) = 2t - \frac{4}{t^3} = 2\frac{t^4-2}{t^3}$ et $y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = 2\frac{t^4-1}{t^3}$. Ces deux quantités ne peuvent être nulles simultanément (on aurait $t^4 = 2$ et $t^4 = 1$, donc $2 = 1$), et donc le vecteur $M'(t) = (x'(t), y'(t))$ n'est jamais nul, il n'y a pas de points stationnaires, et la direction tangente en $M(t)$ est bien donnée par $M'(t)$. Les points à tangente verticale sont ceux tels que $x'(t) = 0$, et il n'y a que le point V correspondant à $t^2 = \sqrt{2}$, soit $V = (2\sqrt{2}, \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ et les points à tangentes horizontales sont ceux tels que $y'(t) = 0$, et il n'y a que le point H correspondant à $t^2 = 1$, soit $H = (3, 4)$.
4.2. — On a $(t^2 - \sqrt{2})^2 \geq 0$, soit $t^4 - 2\sqrt{2}t^2 + 2 \geq 0$, ou encore $x(t) = t^2 + \frac{2}{t^2} \geq 2\sqrt{2}$. Et de même on a $(t^2-1)^2 \geq 0$, soit $t^4 - 2t^2 + 1 \geq 0$, donc $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \geq 4$. Ainsi tout point $M(t)$ de γ est à droite de V et au-dessus de H.
4.3. — Les seules possibilités d'asymptotes sont pour $t \to \pm\infty$ et $t \to 0$, car $x(t)$ et $y(t)$ on des valeurs limites finies en t_0 si $t_0 \neq \pm\infty$ et $t_0 \neq 0$.
– Quand $t \to \pm\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$, et $\frac{y}{x} = \frac{t^4+2t^2+1}{t^4+2}$ se comporte comme $\frac{t^4}{t^4}$ et tend donc vers $a = 1$; on détermine alors la limite b de $y - ax = y - x = 2 - \frac{1}{t^2}$, qui vaut $b = 2$. On a donc l'asymptote $y = x + 2$. L'écart vertical entre γ et l'asymptote vaut $y - (x+2) = -\frac{1}{t^2} < 0$, donc γ est en dessous de l'asymptote.
– Quand $t \to 0$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$, et $\frac{y}{x} = \frac{t^4+2t^2+1}{t^4+2}$ se comporte comme $\frac{1}{2}$ et tend donc vers $a = \frac{1}{2}$; on détermine alors la limite b de $y - ax = y - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}t^2 + 2$, qui vaut $b = 2$, et on a donc l'asymptote $y = \frac{1}{2}x + 2$. L'écart vertical entre γ et l'asymptote vaut $y - (\frac{1}{2}x + 2) = \frac{1}{2}t^2 > 0$, donc γ est au-dessus de l'asymptote.
4.4. — Montrons d'abord que $\gamma \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 3xy + 2y^2 + 6x - 8y + 9 = 0,\ x > 0\}$. D'abord, $x > 0$ car on a même montré en 4.2. que $x > 2\sqrt{2}$. Quant à l'équation $x^2 - 3xy + 2y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$, pour la vérifier il suffit d'y remplacer x et y par les valeurs de $x(t)$ et $y(t)$. Il faut $(\frac{t^4+2}{t^2})^2 - 3(\frac{t^4+2}{t^2})(\frac{t^4+2t^2+1}{t^2}) + 2(\frac{t^4+2t^2+1}{t^2})^2 + 6(\frac{t^4+2}{t^2}) - 8(\frac{t^4+2t^2+1}{t^2}) + 9 = 0$, soit $(t^4+2)^2 - 3(t^4+2)(t^4+2t^2+1) + 2(t^4+2t^2+1)^2 + 6t^2(t^4+2) - 8t^2(t^4+2t^2+1) + 9t^4 = 0$, $t^8 + 4t^4 + 4 - 3t^8 - 6t^4 - 6t^6 - 12t^2 - 3t^4 - 6 + 2t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 4t^6 + 8t^4 + 4t^2 + 2t^4 + 4t^2 + 2 + 6t^6 + 12t^2 - 8t^6 - 16t^4 - 8t^2 + 9t^4 = 0$.
En fait on peut comprendre d'où vient l'équation proposée, et ce faisant la prouver autrement. On a les asymptotes $y - x + 2 = 0$ et $2y - x - 4 = 0$, et sur la courbe on a $y - x + 2 = -\frac{1}{t^2}$ et $2y - x - 4 = t^2$, donc en faisant le produit on élimine t et il vient $(y - x - 2)(2y - x - 4) = -1$. Cette équation développée donne la proposée.
Pour prouver la réciproque, que $\gamma \supseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 3xy + 2y^2 + 6x - 8y + 9 = 0,\ x > 0\}$,

on part donc d'un point (x, y) tel que $x > 0$ et que $(y-x-2)(2y-x-4) = -1$. On pose alors $2y - x - 4 = u$ et donc $y - x - 2 = -\frac{1}{u}$, d'où l'on tire $x = u + \frac{2}{u}$ et $y = u + \frac{1}{u} + 2$. Si l'on avait $u < 0$ on aurait aussi $x = u + \frac{2}{u} < 0$, et puisque $x > 0$, c'est que $u > 0$. On peut donc poser $u = t^2$, et il vient le résultat.
4.5. — Ainsi γ est une branche de l'hyperbole (= courbe du second degré avec deux asymptotes) $(y-x-2)(2y-x-4) = -1$, branche parcourue deux fois quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, le même point étant obtenu pour t et pour $-t$. En dessinant les asymptotes, en plaçant les point H et V et leur tangentes, en tenant compte des positions par rapport aux asymptotes, on fera aisément le dessin.

5. 5.1. — En tout point $x \neq 0$ f est évidemment continue, comme composée de la fonction continue $\ln X$ avec la fonction continue $\frac{\sin x}{x}$, cette dernière étant continue comme quotient des fonctions continues $\sin x$ et x ($x \neq 0$). Reste à montrer la continuité en 0, c'est-à-dire que $f(x)$ tend vers $f(0)$ quand x tend vers 0, soit que $\lim_{x\to 0} \ln(\frac{\sin x}{x}) = 0$. Or on sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, et donc, comme $\ln X$ est continue, la limite demandé existe et vaut $\ln(1) = 0$.
5.2. — On a $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon_1(x)$, donc $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\epsilon_1(x)$, et comme on sait aussi que $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4} + X^4\epsilon_2(X)$, en y substituant pour X la valeur $X = (-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\epsilon_1(x))$ il vient $\ln(\frac{\sin x}{x}) = (-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\epsilon_1(x)) - \frac{(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+x^4\epsilon_1(x))^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+x^4\epsilon_1(x))^4}{4} + (-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\epsilon_1(x))^4\epsilon_2((-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\epsilon_1(x)))$, que l'on développe en remplaçant par 0 les monômes comportant des $x^4\epsilon(x)$ où des puissances de x au-delà de la puissance 4 (monômes qui passent tous dans le reste final), ce qui donne :
$\ln(\frac{\sin x}{x}) = (-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}) - \frac{(-\frac{x^2}{3!})^2}{2} + x^4\epsilon_3(x) = -\frac{x^2}{3!} + (\frac{1}{5!} - \frac{1}{2.3!^2})x^4 + x^4\epsilon_3(x)$, donc finalement $\ln(\frac{\sin x}{x}) = -\frac{x^2}{3!} + (\frac{1}{120} - \frac{1}{72})x^4 + x^4\epsilon_3(x) = -\frac{x^2}{6} - \frac{1}{180}x^4 + x^4\epsilon_3(x)$.
5.3. — La pente de la tangente, si la tangente existe, est, si elle existe, la dérivée soit $f'(0)$ qui est $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x}$. Cela se calcule avec le développement limité de Taylor : $\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{6} - \frac{1}{180}x^4 + x^4\epsilon_3(x)}{x} = \lim_{x\to 0}(-\frac{x}{6} - \frac{1}{180}x^3 + x^3\epsilon_3(x)) = 0$. Ainsi la tangente est horizontale, c'est donc l'axe des x, d'équation $y = 0$. La formule de Taylor montre que, pour h petit on a $f(h) = -\frac{h^2}{6} - \frac{1}{180}h^4 + h^4\epsilon_3(h)$, et a fortiori $f(h) = -\frac{h^2}{6} + h^2\epsilon_4(h)$: donc pour h petit, $f(h)$ est négatif, on est sous l'axe des x, c'est-à-dire sous la tangente.
5.4. — On a déjà déterminé $f'(0) = 0$. Calculons $f'(x) = (\ln(\frac{\sin x}{x}))'$ pour les $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{x}{\sin x}(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2})$, puis $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3})$, et comme la limite de $\frac{x}{\sin x}$ est 1, cette limite vaut $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$, que l'on détermine en remplaçant le numérateur par la partie régulière de développement limité à l'ordre 3, c'est-à-dire que l'on détermine $\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{3}$. On a ainsi $f''(0) = -\frac{1}{3}$.
On aurait aussi pu utiliser le développement limité de f en 0, et reconnaître la dérivée seconde au niveau du coefficient $\frac{1}{6}$ de x^2, par $-\frac{1}{6} = \frac{1}{2}f''(0)$.
5.5. — Le centre de courbure C a pour ordonnée $x_C = x - y'\frac{1+y'^2}{y''}$ et $y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''}$, soit ici $x_C = 0$ et $y_C = 0 + \frac{1+0}{-\frac{1}{3}} = -3$, donc $C = (0, -3)$ et $R = 3$.

EXAMEN MC2, 19 mai 2008
Documents et calculettes ne sont pas autorisés.
On rédigera chaque exercice sur une double feuille séparée.

Exercice 313 *(Ex. 1) 1 — Donner la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 2y' - y = 0$, où l'inconnue est une fonction $y = y(x)$ sur $\mathbb{R}$.*
2 — Donner une solution particulière de $y'' + 2y' - y = x^2$, une solution particulière de $y'' + 2y' - y = \frac{1}{2}$, et une solution particulière de $y'' + 2y' - y = \frac{1}{2}\cos 2x$.

3 — Donner la solution générale de $y'' + 2y' - y = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.
4 — Donner la solution de $y'' + 2y' - y = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$. *telle que* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$.

Exercice 314 *(Ex. 2) 1 — Trouver la solution générale de l'équation linéaire homogène* $y' - 2xy = 0$.
2 — Trouver une solution particulière de l'équation linéaire $y' - 2xy = x$.
3 — Donner la solution générale de l'équation linéaire $y' - 2xy = x$.

Exercice 315 *(Ex. 3) — 1 — Montrer que* $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{x}{x-1} - \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$.
2 — Pour $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ *et* $L = \int \frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$, *montrer que* $I = x + \ln(x-1) - L$.
3 — Avec $J = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$ *et* $K = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$, *montrer que* $L = J + K$.
4 — Vérifier que, pour $a > 0$: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}\right) + C$.
5 — Par le changement de variable $x - 1 = \frac{1}{t}$, *calculer* J.
6 — Vérifier que $K = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$, *et calculer* K.
7 — Montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = 1 + \ln\left(\frac{4}{(\sqrt{3})^3}\right)$.

Exercice 316 *(Ex. 4) — 1 — Soit* $\mathcal{E}$ *la courbe plane paramétré d'équations* $\begin{cases} x(t) &= \sqrt{2}\cos t \\ y(t) &= \sqrt{3}\sin t \end{cases}$, *avec* $t \in [0, 2\pi]$, *et soit* $A = \left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. *Montrer que* $\mathcal{E}$ *admet pour équation implicite* $3x^2 + 2y^2 = 6$. *Montrer que* $A \in \mathcal{E}$.
2 — Donner l'équation de la tangente en A *à* $\mathcal{E}$, *et l'équation de la normale en* A *à* $\mathcal{E}$.
3 — Déterminer le centre de courbure $C = (p, q)$ *de* $\mathcal{E}$ *au point* A, *et le rayon de courbure, soit la distance* CA.
4 — On pose $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x}{2} - \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{5}{48}$. *Écrire une condition nécessaire pour qu'un point* $(x, y) \in \mathcal{E}$ *soit un point d'extremum de* $f(x, y)$ *sous la contrainte* $3x^2 + 2y^2 = 6$.
5 — Le point A *est-il un point d'extremum de* $f(x, y)$ *sous la contrainte* $3x^2 + 2y^2 = 6$ *?*

EXAMEN MC2, juin 2008
Documents et calculettes ne sont pas autorisés.
On rédigera chaque exercice sur une double feuille séparée.

Exercice 317 *(Ex.1) 1 — Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle* $y'' + y' - 2y = e^{2x}$.
2 — Déterminer la fonction $y = y(x)$ *telle que* $y'' + y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.

Exercice 318 *(Ex. 2) Avec* $u(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, *montrer que*

$$8\int x^2 u(x)\,dx = a^2 x u(x) - 2x.(u(x))^3 + a^4 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Exercice 319 *(Ex. 3) 1 — On considère, avec* $C > 0$, $a > 0$, *la courbe* $\begin{cases} x(t) &= Ce^{at}\cos t \\ y(t) &= Ce^{at}\sin t \end{cases}$, *nommée* spirale logarithmique. *Calculer* $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, *et dessiner la spirale.*
2 — Exprimer par une intégrale la longueur $L(t_0, t_1)$ *de l'arc de la spirale compris entre les points de paramètres* t_0 *et* t_1, *et calculer* $L(t_0, t_1)$.

Exercice 320 *(Ex. 4) — Soit* $C(t) = \int_0^t \cos(u^2)\,du$ *et* $S(t) = \int_0^t \sin(u^2)\,du$*, et soit* $\mathcal{C}$ *la courbe plane paramétré d'équations* $\begin{cases} x(t) &= C(t) \\ y(t) &= S(t) \end{cases}$*, avec* $t \in [0, +\infty[$*.*
Si $M(t) = (x(t), y(t))$ *est le point atteint à l'instant* t *sur* $\mathcal{C}$*, on note* $s(t)$ *la longueur de l'arc de* $\mathcal{C}$ *d'origine* $O = M(0) = (0, 0)$ *et d'extrémité* $M(t)$*, et on note* $R(t)$ *le rayon de courbure de* $\mathcal{C}$ *au point* $M(t)$*.*
1 — Calculer $C'(t)$ *et* $S'(t)$*,* $C''(t)$ *et* $S''(t)$*.*
2 — Calculer $R(t)$*,* $s(t)$ *et l'expression de* R *en fonction de* s*.*

Exercice 321 *(Ex. 5) — Dans le plan soit le triangle* OAB*, avec* $O = (0, 0)$*,* $A = (1, 0)$ *et* $B = (0, 1)$*.*
1 — Montrer que pour un point $M = (x, y)$ *du triangle* OAB *les distances (notées* $a(x, y)$*,* $b(x, y)$ *et* $c(x, y)$*) de* M *aux côtés* OA*,* OB *et* AB *du triangle valent* $a(x, y) = |y|$*,* $b(x, y) = |x|$ *et* $c(x, y) = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$*.*
2 — Calculer $f(x, y) = a(x, y)^2 + b(x, y)^2 + c(x, y)^2$*, puis* $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$*.*
3 — Déterminer le minimum de f *sur chacun des segments* OA*,* OB *et* AB*.*
4 — Déterminer le minimum de f *dans le triangle ouvert (sans ses côtés).*
5 — Déterminer le minimum de f *dans le triangle fermé (avec ses côtés).*