Partiel de MC2

26 mars 2011, 12h30-15h30, amphi 13E et 8C

ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1 [8pt] — Pour $a \in \mathbb{R}$ soit l'application $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et le système linéaire $\star$:

$$f_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - ay + \frac{11}{2}z \\ ax - 5y + \frac{1}{2}z \\ x + y + az \end{pmatrix}, \qquad \star \begin{cases} x & -ay & +\frac{11}{2}z & = & 1 \\ ax & -5y & +\frac{1}{2}z & = & 1 \\ x & +y & +az & = & 1 \end{cases}$$

1 [1pt] — Montrer que f_a est une application linéaire.
2 [4pt] — Suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, déterminer les dimensions du noyau $\ker f_a$ de f_a et de l'image $\operatorname{im} f_a$ de f_a, et en déduire si f_a est injective, surjective, bijective.
3 [3pt] — Résoudre le système $\star$, en discutant suivant les valeurs du paramètre a. Donner dans chaque cas la dimension du sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ formé des solutions de $\star$.

Exercice 2 [13pt]— Soit dans $\mathbb{R}^3$ les deux vecteurs $U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

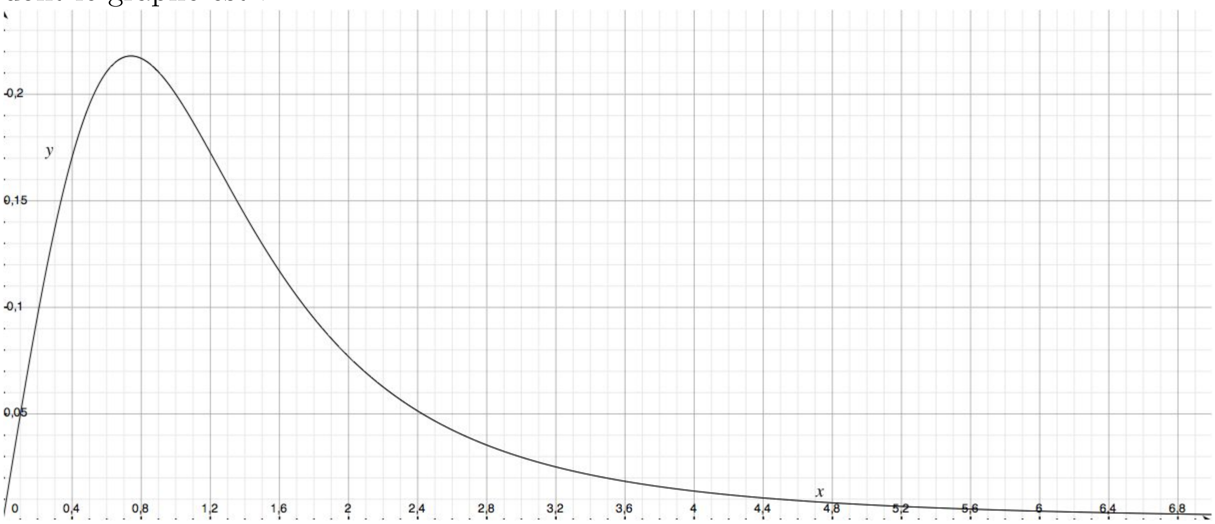
1 [1pt] — Montrer que U et V sont de longueur 1 et sont non colinéaires.
2 [2pt] — Calculer $A = U$, $B = \frac{(U \wedge V) \wedge U}{||(U \wedge V) \wedge U||}$, $C = \frac{U \wedge V}{||U \wedge V||}$.
3 [1pt] — Montrer que $(U \wedge V) \wedge U = V - (U.V)U$.
4 [2pt] — Montrer que $\epsilon = (A, B, C)$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
5 [1pt] — Donner la matrice P de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ relativement au départ à la base ϵ et à l'arrivée à la base canonique $\kappa = (i, j, k)$ avec donc $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
6 [1pt] – Calculer l'inverse P^{-1} de P.
7 [1pt] — Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(A) = B, \;\; f(B) = -A, \;\; f(C) = C$$

8 [1pt] — Donner la matrice M de f relativement à la base ϵ au départ et à l'arrivée.
9 [2pt] — Donner la matrice N de f relativement à la base canonique κ au départ et à l'arrivée.
10 [1pt] — Déterminer N^4.

DÉRIVÉE ET PRIMITIVES, INTÉGRALES.

Exercice 3 [8pt]— On considère la fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x^4+2x^2+2}$, dont le graphe est :



1 [3pt] — Démontrer rigoureusement que, comme on le voit sur le graphe, $f(0) = 0$, f est croissante pour x variant entre 0 et une certaine valeur $\alpha > 0$, puis décroissante au-delà de α, tendant vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
2 [1pt] — Admettons qu'avec de bons yeux on verrait sur le graphe que $0,740 < \alpha < 0,741$. Prouver qu'en fait précisément $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$.

On veut maintenant calculer l'aire A comprise entre l'axe Ox et le graphe de f, pour x variant entre $x = 0$ et $x = +\infty$. On introduit $g : [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \arctan(x^2 + 1)$.
3 [1pt] — Calculer $g'(x)$.
4 [1pt] — On pose $h(x) = \int_0^x \frac{t}{t^4+2t^2+2}\, dt$. Exprimer $h(x)$ en fonction de $g(x)$.
5 [1pt] — Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^4+2t^2+2}\, dt$.
6 [1pt] — Quelle est la valeur de A ?

Exercice 4 [7pt] — Calculer les intégrales
$A = \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\, dt$ [1pt],
$B = \int_0^x \frac{t-1}{t+1}\, dt$ [1pt],
$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, dt$ [1pt],
$D = \int_0^x t^2 \cos t\, dt$ [2pt],
$E = \int_0^x t(\cos t)^2\, dt$ [2pt].

Exercice 5 [4pt]— Soit la fraction $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}$.
1 [2 pt]— Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2 [2 pt] — Calculer la primitive $J(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^2}\, dt$, lorsque $|x| < 1$.