Partiel de MC2

(samedi 27 mars 2010, de 15h à 17h — amphis 13E et 8C)

NB. Les calculettes et les documents ne sont pas autorisés.

1- ALGÈBRE [13 pt]

Exercice 1 [3 pt] — 1 — Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $u^\perp$ des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné u est un sous-espace vectoriel, de dimension 2.

2 — Si Δ est la droite intersection des deux plans d'équations $x - 2z = 1$ et $y + z = 1$, donner une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ formée d'un vecteur unitaire u dans la direction de Δ, et de deux vecteurs unitaires v et w orthogonaux entre eux et orthogonaux à u.

Exercice 2 [5 pt] On suppose dans tout l'exercice que $m \neq 13$, et on note $\kappa = (i, j, k)$ avec $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base dite canonique de $\mathbb{R}^3$.

1 — On considère $\beta = (u, v, w)$ avec $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ m \end{pmatrix}$ Montrer que β est une base de $\mathbb{R}^3$.

2 — Si $M \in \mathbb{R}^3$, soit $\mathrm{coord}_\kappa(M) = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$, $\mathrm{coord}_\beta(M) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices P et Q telles que $P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ et $Q \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

3 — Déterminer la matrice $A = Mat(f; \beta, \beta) = {}_\beta f^\beta$ dans la base β de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(u) = 0$, $f(v) = v$, et $f(w) = -w$. Soit $B = Mat(f; \kappa, \kappa) = {}_\kappa f^\kappa$ la matrice de f dans la base canonique κ. Exprimer B à l'aide de P, Q et A, et calculer explicitement B.

Exercice 3 [5pt] — On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} x & +y & +(a-1)z & = & 0 \\ 3x & +5y & -4z & = & 1 \\ 2x & +ay & +az & = & -2a-1 \end{cases}$$

et on définit $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $f_a(x, y, z) = (x + y + (a-1)z, 3x + 5y - 4z, 2x + ay + az)$.
1 — Montrer que f_a est une application linéaire.
2 — Suivant les valeurs de a, préciser si f_a est injective, surjective, bijective.
3 — Résoudre le système, en discutant suivant les valeurs du paramètre a.

2- ANALYSE [13 pt]

Exercice 4 [4 pt]— Calculer les intégrales : a) $\int_1^2 \frac{xdx}{4x^2-1}$, b) $\int_0^x \sin t \cos t \, dt$, c) $\int_0^{2\pi} \cos(3x)\sin(4x)dx$, d) $\int_0^x \frac{\cos 2t}{\cos^2 t}\, dt$, e) $\int_0^x t^2 \cos t \, dt$.

Exercice 5 [5 pt] — 1 — Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$,
2 — En intégrant par parties, calculer la primitive de $g(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ qui s'annule en 0, soit $h(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2+t+1} dt$.
3 — Calculer l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe $y = \frac{x}{x^2+x+1}$, et les verticales $x = 0$ et $x = 1$.
4 — Étudier la variation, quand u tend vers $+\infty$ de l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe $y = \frac{x}{x^2+x+1}$, et les verticales $x = 1$ et $x = u$.

Exercice 6 [4 pt] 1 — Décomposer en éléments simples la fraction $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+2)^2}$.
2 — Pour tout $u > 2$, calculer la primitive $h(x) = \int_2^x f(t)\, dt$ qui s'annule en $x = 2$ et qui est définie sur $]2, u[$.
3 — Déterminer la limite quand u tend vers $+\infty$ de l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe $y = \frac{x}{(x-1)(x+2)^2}$, et les verticales $x = 2$ et $x = u$.