Révision 1 : algèbre linéaire

Jeudi 17 février 2011

Pour tous les problèmes ici la base dite *canonique* de $\mathbb{R}^3$ est la base $\kappa = (i, j, k)$ avec $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'origine est le point $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problème A [Changement de base] — On suppose dans tout l'exercice que $m \neq 13$.

1 — On considère $\beta = (u, v, w)$ avec $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ m \end{pmatrix}$ Montrer que β est une base de $\mathbb{R}^3$.

2 — Si $M \in \mathbb{R}^3$, soit $\mathrm{coord}_\kappa(M) = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$, $\mathrm{coord}_\beta(M) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices P et Q telles que $P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ et $Q \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

3 — Déterminer la matrice $A = Mat(f; \beta, \beta) = {}_\beta f^\beta$ dans la base β de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(u) = 0$, $f(v) = v$, et $f(w) = -w$. Soit $B = Mat(f; \kappa, \kappa) = {}_\kappa f^\kappa$ la matrice de f dans la base canonique κ. Exprimer B à l'aide de P, Q et A, et calculer explicitement B.

Problème B [discussion de système] — On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} x & +y & +(a-1)z & = & 0 \\ 3x & +5y & -4z & = & 1 \\ 2x & +ay & +az & = & -2a-1 \end{cases}$$

et on définit $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $f_a(x, y, z) = (x + y + (a-1)z, 3x + 5y - 4z, 2x + ay + az)$.
1 — Montrer que f_a est une application linéaire.
2 — Suivant les valeurs de a, examiner le noyau et l'image de f_a, et préciser si f_a est injective, surjective, bijective.
3 — Résoudre le système, en discutant suivant les valeurs du paramètre a. Bien préciser les dimensions et des bases des espaces de solutions.

Problème C [rotations dans l'espace] 1 — Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $u^\perp$ des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné $u \neq 0$ est un sous-espace vectoriel, dont la dimension est 2.
2 — Dans $\mathbb{R}^3$, soient u et v deux vecteurs non-nuls et non colinéaires, $E = u^\perp \cap v^\perp$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer sa dimension. En exprimer une base à l'aide de u et v.
3 — Donner un vecteur unitaire a normal au plan dont l'équation dans le repère canonique $(O; (i, j, k))$ est $x - 2z = 1$ et un vecteur unitaire b normal au plan $y + z = 1$. Donner une valeur approchée au degré près de l'angle λ des deux plans.
4 — Si Δ est la droite intersection des deux plans d'équations $x - 2z = 1$ et $y + z = 1$, on pose $p = a$, $q = \frac{(a \wedge b) \wedge a}{|\sin(a,b)|}$, $r = \frac{a \wedge b}{|\sin(a,b)|}$. Montrer que $\alpha = (p, q, r)$ est une des bases $\beta = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ formées d'un vecteur unitaire w dans la direction de Δ, et de deux

vecteurs unitaires u et v orthogonaux entre eux et orthogonaux à w, et de sorte que β soit une base directe.
5 — Dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique, montrer que la matrice de la rotation autour de l'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'angle ϕ est $r(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$.
6 — Montrer que, a et b étant choisis suivant la question (3 —), et p, q, r subséquemment déterminés dans la question (4 —), toute base $\beta = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ répondant aux conditions de la question (4 —) peut s'écrire avec θ un angle choisi quelconque, sous l'une des formes $u = (\cos\theta)p + (\sin\theta)q$, $v = -(\sin\theta)p + (\cos\theta)q$, $w = r$, ou bien $u = -(\sin\theta)p + (\cos\theta)q$, $v = (\cos\theta)p + (\sin\theta)q$, $w = -r$.
7 — On rapporte $\mathbb{R}^3$ à une quelconque base $\beta = (u, v, w)$ telle que spécifiée en (4 —) et présentée explicitement en (6 —), et on considère Δ et la parallèle Δ_0 à Δ passant par l'origine O comme orientées dans le sens de w. Montrer que $R_O(\phi)$ la rotation autour de Δ_0 orientée par w d'angle ϕ est une application linéaire, que la matrice de $R_0(\phi)$ relativement au départ et à l'arrivée à la base β est $Q = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8 — Soit P la matrice relativement au départ à β et à l'arrivée à κ de l'application $Id_{\mathbb{R}^3}$. Écrire P. Dans le cas $(u, v, w) = (p, q, r)$ avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, obtenir $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, et calculer P^{-1}.
9 —Montrer que la matrice de $R_0(\phi)$ relativement au départ et à l'arrivée à la base κ est $R = PQP^{-1}$.
10 — Montrer que le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à Δ. On désigne par t la translation de vecteur $\vec{OA}$, par $R(\phi)$ la rotation autour de Δ orientée par w d'angle ϕ. Montrer que $R(\phi) = t \circ R_0(\phi) \circ t^{-1}$ On notera bien que, contrairement à $R_O(\phi)$, ni t ni $R(\phi)$ ne sont linéaires ; ce sont des transformations affines.
11 — Si l'on translate l'origine de O à A, en conservant les mêmes vecteurs de base, à savoir ceux de la base canonique κ, constater que les coordonnées d'un point M quelconque étant dans le repère canonique $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, elles deviennent dans le repère canonique translaté en A: $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$. Montrer que la transformation affine $R(\phi)$ s'écrit, dans la base canonique sous la forme : $R(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = PQP^{-1} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
12 — Avec les résultats de la question (8 —), calculer explicitement $R(\phi)$.