Révision 2 : calcul différentiel et intégral

Jeudi 10 mars 2011

Problème D [Dérivées et réciproques] Soit $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,+1[: x \mapsto \tanh(x)$ définie par $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, et $\operatorname{arg}\tanh :]-1,+1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{arg}\tanh(x)$ définie par $(\operatorname{arg}\tanh)(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
1 — Montrer que $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$. Dessiner le graphe de tanh.
2 — Montrer que $(\operatorname{arg}\tanh)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Dessiner le graphe de arg tanh.
3 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ et $g :]-1,+1[\to]-1,+1[: x \mapsto g(x)$ définie par $f(x) = \operatorname{arg}\tan(\tanh(x))$ et $g(x) = \tanh(\operatorname{arg}\tanh(x))$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et que $g = \mathrm{Id}_{]-1,+1[}$. En déduire que tanh et arg tanh sont réciproques l'une de l'autre. Vérifier cette réciprocité en comparant les graphes, en déduisant les dérivées l'une de l'autre.

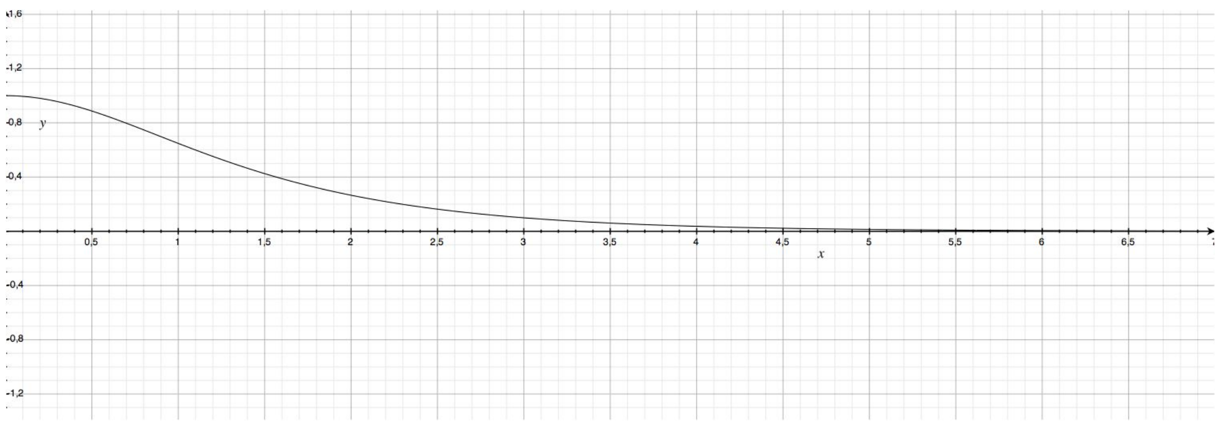
Problème E [Primitives usuelles et vérifications de primitives] 1 — Rechercher une table de primitives usuelles et l'apprendre par cœur.
2 — Déterminer d'un coup d'œil ou presque les primitives $\int \frac{1}{2x+1}dx$, $\int \frac{1}{2x^2+3}dx$, $\int e^{2x+1}dx$, $\int \sin(2x)dx$, $\int \sin^2 x\, dx$.
3 — Vérifier que $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + C$.
4 — Vérifier que $\int \frac{dt}{\sinh t} = \ln|\tanh\frac{t}{2}| + C$.
5 — Que pensez-vous de la formule $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a}} = \ln|t + \sqrt{t^2+a}| + C$?

Problème F [Primitives de fractions rationnelles] On considère $a \geq 0$ et la fraction $f(x) = \frac{x^2}{x^2-a^2}$ et la fraction $g(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)^2$.
1 — Si $a = 0$, quelle est alors la primitive de f ?
2 — On maintenant suppose $a > 0$. Décomposer f en éléments simples.
3 — Exprimer comme fonction élémentaire la primitive $F(x)$ de $f(x)$ valide pour les $x \in]-a,+a[$ et valant 1 en 0.
4 — Même questions pour la fraction $g(x)$.

Problème G [Intégration par partie et changement de variables] 1 — Calculer une primitive de $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ en faisant dans $F(u) = \int_a^u \sin(\sqrt{x})dx$ le changement de variable $z = \sqrt{x}$, et en terminant par une intégration par parties.
2 — Soit $g(z)$ une fonction deux fois dérivable et soit $f(x) = g''(\sqrt{x})$. Exprimer à l'aide de g et g' une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

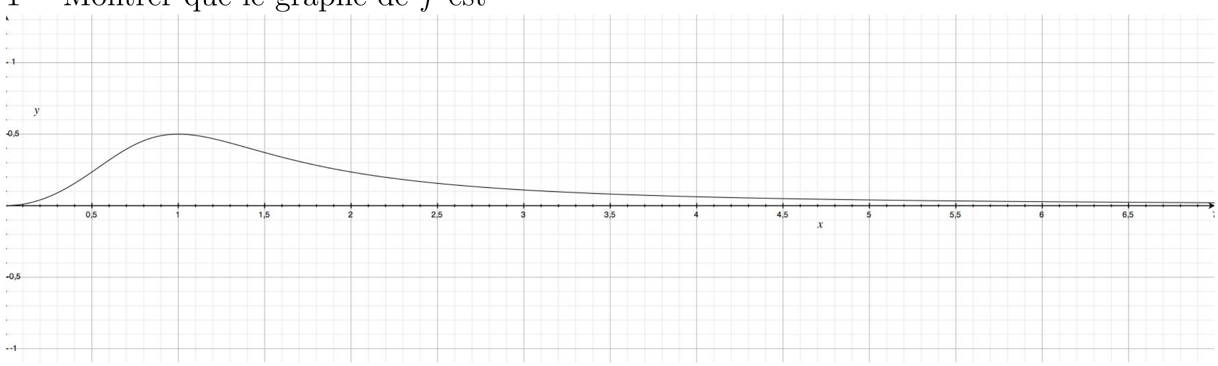
Problème H [Intégration impropre, intégrale dépendant d'un paramètre] Calculer, en fonction du paramètre $x > 0$ donné l'intégrale $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}dt$.
2 — Calculer $F'(x)$.

Problème I [Calcul d'aire] Exercice 3 — 1 — Montrer que la fonction $f : [0,\infty[\to]0,1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\cosh x}$ est bijective et a pour graphe :



2 — Montrer que $\frac{1}{\cosh x} = \frac{2e^x}{1+(e^x)^2}$, et en déduire, par le changement de variable $z = e^t$, une primitive de f.
3 — Calculer la surface A comprise sous le graphe de f et au-dessus de l'axe des x, pour x variant de 0 à ∞.

Problème J [Calcul d'aire] Soit $f : [0, \infty[\to]0, 1]$ définie par $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$.
1 —Montrer que le graphe de f est



2 — Pour tout entier N on note A_N l'aire comprise sous le graphe de f et au-dessus de l'axe des x, pour x variant de 0 à N. Montrer, en écrivant les sommes de Riemann pour des subdivisions pointés en n intervalles égaux, que $A_N = \lim_{n\to\infty} \frac{N}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(\frac{N}{n})^2}{k^4(\frac{N}{n})^4+1}$.
3 — L'aire A sous le graphe de f et au-dessus de l'axe des x, pour x variant de 0 à ∞ valant donc $A = \lim_{N\to\infty} A_N$, montrer, en reliant n et N par $n = 2^N$, que A vaut $A = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2^N} \sum_{k=1}^{2^N} \frac{k^2(\frac{N}{2^N})^2}{k^4(\frac{N}{2^N})^4+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{2^N}{N} \sum_{k=1}^{2^N} \frac{k^2}{k^4+(\frac{2^N}{N})^4}$. Peut-on en déduire une valeur approchée, en y donnant une valeur pour N ? (On verra en 5, autrement, qu'en fait A est entre de $1,110$ et $1,111$).
4 — Soit $u(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)$, définie pour tout x, et $v(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$, définie pour $x \neq \pm 1$. Montrer que $u'(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^4+1}$ et que $v'(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2+1}{x^4+1}$. En déduire que l'expression $g(x) = u(x) + v(x)$ détermine une primitive de $f(x)$ sur $[0, 1[$ et une primitive de $f(x)$ sur $]1, \infty[$. Montrer que $g(0) = 0$, $g(1^-) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$, $g(1^+) = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$, $g(+\infty) = 0$. Montrer que $\int_0^x \frac{x^2}{x^4+1} dx = \begin{cases} g(x) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ g(1^-) & \text{si } x = 1 \\ g(x) + g(1^-) - g(1^+) & \text{si } 1 < x < \infty \end{cases}$
5 — Montrer que $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1} dx = g(1^-)$, $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx = -g(1^+)$, puis $A = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.