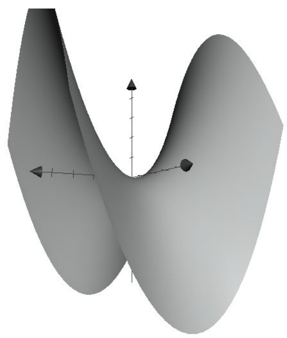
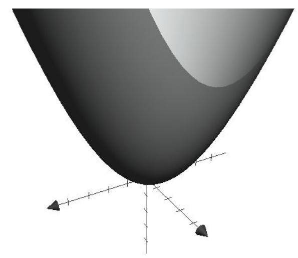
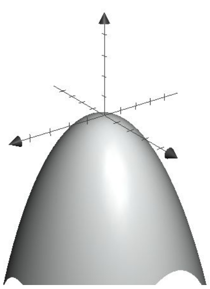
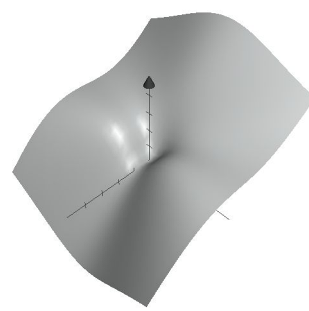
Révision 3 : surfaces et extrema

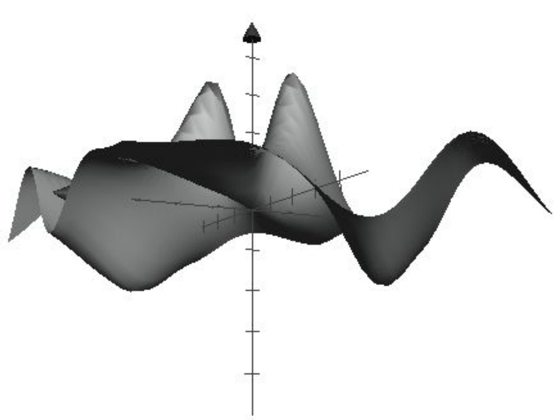
31 mars 2011 (augmenté le 6 mai 2011)

Problème K [Plans tangents] — On considère les graphes suivants

et les équations : $z = \frac{x^3+y^2-1}{x^2+y^2+1} + 1$, $z = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2$, $z = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}y^2$, $z = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}y^2$.
À quel graphe correspond chaque équation ?

Problème L [Plans tangents] 1 — Soit la surface Σ d'équation $z = 5\frac{x+y}{x^2+y^2+1}\sin(x+y)$. Déterminer son plan tangent à l'origine, son développement de Taylor à l'ordre 2 à l'origine.
2 — Voici une vue de Σ. Déterminer ses extrema locaux dans le disque unité.



Problème M [Taylor à deux variables, position locale par rapport au plan tangent]
1— Écrire le développement limité de Taylor à 2 variables et d'ordre 2 au point $m_0 = (x_0 = 1, y_0 = -1)$ de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + 1.$$

2 — Donner l'équation du plan tangent en m_0 à la surface Σ d'équation $z = f(x, y)$.
3 — Déterminer la position locale au voisinage de m_0 de la surface Σ par rapport à son plan tangent en ce point.
4 — Montrer que f admet un seul point critique, que ce point est un minimum local, et même un minimum global.

Problème N [Valeurs extrêmes de fonctions à deux variables] 1 —Déterminer le minimum et le maximum de $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2y^2 = 3\}$.
2 —Déterminer le minimum et le maximum de $g(x, y) = x^2 + 2y^2$ dans le domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

Problème O [Valeurs extrêmes de fonctions à deux variables] On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = -x^4 - y^4 + 4xy,$$

et la surface Σ d'équation $z = f(x, y)$.
1) Déterminer l'équation du plan tangent à Σ en un point quelconque.
2) Donner les points critiques de f, c'est-à-dire les points (x_0, y_0) tels qu'en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ le plan tangent à Σ soitt horizontal.
3) Pour chacun des points trouvés en 2) écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de f, et en déduire si le point est un point selle, un maximum relatif, un minimum relatif de la fonction f.

Problème P [Tangente aux courbes implicites] Soit la surface Σ d'équation

$$z = x^2 + 3y^2 - x + 1$$

et la courbe plane Γ d'équation

$$x^2 + 3y^2 - x + 1 = 0.$$

On considère dans le plan des (x, y) le point $P = (2, 1)$, qui est donc sur Γ.
Déterminer le plan tangent à Σ au point $M = (2, 1, 0)$, en déduire la tangente à Γ en P.