Révision 4 (fin) : Équations différentielles

dernière version, 13 mai 2011

Problème Q [primitives] Montrer que toutes les fonctions y de x dérivables sur $]-1,+1[$ telles que

$$y' = \frac{1}{1-x^4}$$

s'écrivent : $y = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$ (On pourra faire la vérification en dérivant l'expression proposée. On pourra aussi retrouver cette expression en décomposant la fraction en éléments simples et calculant séparément les primitives).

Problème R [équations du 1er ordre linéaire à coefficients constants] Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 2y + (e^x)^2.$$

Problème S [équations du 1er ordre séparables] 1) Dériver $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$.
2) Résoudre en séparant les variables l'équation différentielle

$$y' = \frac{x}{\cos y}.$$

Problème T [équations du 1er ordre linéaire] 1 —Résoudre dans $\mathbb{R}_{>0}$ l'équation différentielle

$$y' = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x^3}. \qquad (1)$$

On résoudra d'abord l'équation "sans second membre" $y' = -\frac{y}{x^2}$ (2), trouvant les solutions $Ce^{\frac{1}{x}}$, puis l'équation proposée (1) par "variation de la constante" C. On trouvera que la fonction $C(x) = \big(-\frac{1}{x} - 1\big)e^{-\frac{1}{x}}$ est telle que $y = C(x)e^{\frac{1}{x}}$, et donc une solution particulière de l'équation proposée (1) est $y = -\frac{1}{x} - 1$. On concluera en donnant la forme générale de la solution de l'équation (1).
2 — Déterminer la solution de (1) qui tend vers 1 lorsque $x \to +\infty$.

Problème U [équations du 1ème ordre linéaire 1) Trouver la solution générale de $(1+x^2)y' - y = 0$.

2) On pose $h(x) = \int_0^x e^{-\arctan u} du$. Sans calculer $h(x)$, mais en l'utilisant simplement sous cette forme, exprimer, une solution particulière de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - y = 1 + x^2$, puis la solution générale.

3)Avec $h(x)$ et $h(1)$ écrire la solution $y = f(x)$ de : $\begin{cases} (1+x^2)y' - y = 1 + x^2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

Problème V [équations du 2ème ordre linéaire à coefficients constants] Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations:
a) $y'' + 2y' + 2y = x$
b) $y'' + y = x^2 + 1$
c)$y'' + 2y' + 3y = 4\sin(2x)$

Problème W [équations du 2ème ordre linéaire à coefficients constants] Montrer que l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

admet pour solution générale $y = e^x\big((a+x)\cos x + (b+x)\sin x\big)$.

Problème X[équations du 2ème ordre linéaire à coefficients constants] Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0$$

est bornée sur $[0, +\infty]$ si et seulement si les coefficients réels a et b sont tels que $a, b > 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Problème Y [équations du 2ème ordre linéaire à coefficients constants] Soient ω_0 et ω deux réels positifs distincts.
1) Déterminer toutes les solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$.
2) Montrer que la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ s'écrit :

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega x).$$

Problème Z [équations du 2ème ordre linéaire à coefficients constants] Sans se préoccuper de la convergence des séries en jeu, résoudre en série, pour $\omega > 0$ donné non entier, et des coefficients a_n donnés, l'équation

$$y'' + \omega^2 y = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) + \ldots$$