Université Paris 7 - Denis Diderot, année 2008-2009

MP1 groupe 1D3, Colles n°1, 23 octobre

Exercice 1
Soit pour $z \in \mathbb{C}$,$z \neq -3$, $f(x) = \frac{-(3+i)}{3+z}$. Trouver les z tels que $f(z) = z$.

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}$. Montrer que si $m \neq -6$ alors A est inversible. Lorsque $m = -6$ déterminer le rang de A.

Exercice 3
Trouver les réels a tels que $(a+i)^3 = -2+2i$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -2+2i$.

Exercice 4
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, et $Z = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Z^2, Z^3 et Z^n pour tout entier n.

Soit ensuite $Y = I_3 + Z = \begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer Y^2, Y^3 et Y^n pour tout n.

Exercice 5
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B$, A^2, B^2, AB, BA. Interpréter A et B comme des projecteurs.

Exercice 6
Résoudre, sous forme trigonométrique, $z^3 = -4+4i\sqrt{3}$.

Exercice 7
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Inverser M, puis inverser N.

Exercice 8
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. Résoudre en $x, y, z \in \mathbb{R}$, l'équation :

$$xA^2 + yA + zI_2 = 0.$$