Université Paris 7 - Denis Diderot, année 2008-2009

MP1 groupe 1D3, Colles n°2, 30 octobre

Exercice 1 — Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 + z - j = 0$.
Soit $f(z) = \frac{j}{1+z}$. Trouver les points fixes de f ,soit les z tels que $f(z) = z$.
Que pensez-vous de l'équation $f(f(z)) = z$?

Exercice 2 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre en $x, y, z \in \mathbb{R}$, l'équation : $xA^2 + yA + zI_2 = 0$. Exprimer A^3 comme combinaison linéaire de I_2, A et A^2.
Peut-on exprimer chaque A^n comme combinaison linéaire de I_2, A et A^2 ?

Exercice 3 — Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire qui consiste à projeter parallèlement à la droite $y = 5x$ sur la droite $y = -x$. Ecrire matriciellement p, c'est-à-dire donner une matrice 2×2, P, telle que si $M = (x, y)$ et $p(M) = (x', y')$ on ait $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix}$. Que représente la matrice $I_2 - P$?

Exercice 4 — Soit $a, b \in \mathbb{R}$, et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 5 & b \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Discuter, suivant les valeurs de a et b le rang de Q. Résoudre : $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$.

Exercice 5 — Soit, dans $\mathbb{R}^3$, E le plan vectoriel d'équation $x - 3y + 2z = 0$, F le plan engendré par les deux vecteurs $u = (1, 0, 5)$ et $v = (3, 3, 0)$. Donner une équation de F. Quelle est la dimension de $E \cap F$? En déterminer une base.

Exercice 6 — Soit dans R^4 les vecteurs $a = (1, 1, 0, -2)$, $b = (-2, 3, 0, 1)$, $c = 0, 0, 2, -2)$, $d = (1, -1, 1, -1)$, $e = (-1, 4, -2, 1)$. Est-ce que (a, b, c, d) forme une base ? Est-ce que (a, b, c, e) forme une base ?

Exercice 7 — Résoudre en discutant par rapport aux valeurs des paramètres α, β et k le système : $\begin{array}{cccc} 2x & & -z & = & k \\ x & -\beta y & +z & = & 1. \\ \alpha x & +y & -3z & = & 0 \end{array}$

Exercice 8 — Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par $x + 3y - z = \mu$ et $y + 3z + \lambda t = \mu$. Pour quelles valeurs de λ et μ l'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Donnez-en alors la dimension et une base. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9 — Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim U + \dim V > \dim E$. Montrer qu'alors $U \cap V \neq \{0\}$.