Université Paris 7 - Denis Diderot, année 2008-2009

MP1 groupe 1D3, Colles n°3, 6 novembre

Exercice 1 — Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^4. Montrer que M est inversible, calculer son inverse.

Exercice 2 — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que les $X = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AX = XA$ constituent un sous espace-vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. En déterminer la dimension et une base.

Exercice 3 — Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'ils sont orthogonaux, et trouver tous les vecteurs $c = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ non nuls et orthogonaux à a et à b. Pour un tel c on considère $A = [a|b|c]$ la matrice 3×3 dont les colonnes sont a, b et c. Calculer A^tA et ${}^tAA$. Qu'observez-vous ?

Exercice 4 — Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 5 — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 6 & 6 \\ -3 & 1 & m \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de f. On pourra discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 — Soit dans $\mathbb{R}^3$ la base canonique $\kappa = (i, j, k)$ et soit $\beta = (u, v, w)$ avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, -1, 1)$ et $w = (2, 5, m)$. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ de sorte que β soit une base, et alors exprimer les matrices de changement de base de κ vers β et de β vers κ.

Exercice 7 — Soit $\beta = (u, v, w)$ avec $u = (1, 2, 0)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (5, -4, 0)$. Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que $f(u) = 0$, $f(v) = v$, $f(w) = -w$. Déterminer le noyau et l'image de f. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 8 — Soit dans $\mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel E engendré parles vecteurs $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, -1)$ et $w = (2, 0, 2, 0)$, et soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations $x + y + z + t = 0$ et $x + t = 0$. Déterminer les dimensions et des bases pour E, F, $E \cap F$, $E + F$.