Université Paris 7 - Denis Diderot, année 2008-2009

MP1 groupe 1D3, Colles n°4, 20 novembre

Exercice 1 — Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible si et seulement si $abc \neq 0$, et calculer alors son inverse.

Exercice 2 — Soit dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'ils sont orthogonaux, et trouver les vecteurs $c = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ orthogonaux à a et b.

Exercice 3 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 4 — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de f. On pourra discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 — Soit f l'application définie par $f(x, y) = (x - y, x + y, 2x)$, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$. Montrer que f est linéaire et donner sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à l'arrivée. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de l'image de f.

Exercice 6 — Soit $\beta = (t, u, v, w)$ avec $t = (0, 1, -1, 0,)$, $u = (1, 2, -1, 0)$, $v = (1, -1, 2, 1)$, $w = (5, -5, 5, 0)$. Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^4$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que $f(t) = t + u$, $f(u) = 0$, $f(v) = v$, $f(w) = -w$. Déterminer le noyau et l'image de f. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 7 — Soit $\begin{cases} w & & -2y & +5z & = & -1 \\ -w & +x & +3y & & = & 0 \\ 3w & -2x & +y & -z & = & m \end{cases}$. Pour quelles valeurs du paramètre m ce système a-t-il une solution ? Dans ce cas préciser la dimension de l'espace des solutions.

Exercice 8 — Soit $f(x, y, z) = (x + y - z, y + z - x, z + x - y)$. Écrire la matrice M de f dans la base canonique. Donner la matrice M de f dans la base canonique. Calculer M^2 et M^3. Pour un $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fixé, résoudre l'équation $f(x, y, z) = (a, b, c)$. Comparer les noyaux de f, f^2, f^3.