Université Paris 7-Denis Diderot
année 2008-2009

MP1 groupe 1D3, Colles n°5, jeudi 11 décembre 2009

(e^x à l'infini. Formes indéterminées 0/0),

Interrogation [30 mn]

A) Question commune pour tout le monde (5 points) :

Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > 1 + x$. En déduire que $\lim_{x \to +\infty}(e^x) = +\infty$.

B) ☞ Chaque personne indiquera sa date de naissance et devra, parmi les 31 expressions suivantes, traiter l'expression $f(x)$ portant en indice le numéro du jour du mois où elle est née (15 points)

Montrer que $f(x)$ est a priori une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ quand $x \to 0$, puis calculer la limite λ de l'expression $f(x)$ lorsque $x \to 0$, puis préciser le signe de $f(x) - \lambda$ pour x proche de 0.

$$f_{01}(x) = \frac{2\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{6x} \qquad f_{02}(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2-x^3} \qquad f_{03}(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$$

$$f_{04}(x) = \frac{\cosh(x^2)-x^2-1}{\cosh x-1} \qquad f_{05}(x) = \frac{(e^x-1)^2}{\tan x-x} \qquad f_{06}(x) = \frac{\sin(2x)-x}{\cos(2x)-1}$$

$$f_{07}(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x} \qquad f_{08}(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^{\sin x}-1} \qquad f_{09}(x) = \frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}$$

$$f_{10}(x) = \frac{\ln(\cos x-\frac{x^2}{2})}{\cosh x-1-x^2} \qquad f_{11}(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\cos x-1} \qquad f_{12}(x) = \frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\ln(1-x)}$$

$$f_{13}(x) = \frac{x^3-x^2}{x^3-\sin x} \qquad f_{14}(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} \qquad f_{15}(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$f_{16}(x) = \frac{\cosh(5x)-1}{e^x-1} \qquad f_{17}(x) = \frac{\tan x-2x}{x-x^3} \qquad f_{18}(x) = \frac{x+\ln(1-x)}{\sin x}$$

$$f_{19}(x) = \frac{\cos(x^2)-1}{\sin^2 x} \qquad f_{20}(x) = \frac{e^x-e^{-2x}-x}{2-e^x-e^{-2x}} \qquad f_{21}(x) = \frac{x^3-\sin^3 x}{x^4}$$

$$f_{22}(x) = \frac{\sin x-\sinh x}{\cos x-\cosh x} \qquad f_{23}(x) = \frac{\ln(1-2x+x^2)}{x^2} \qquad f_{24}(x) = \frac{\tan(x^2)}{x-\sin x}$$

$$f_{25}(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}} \qquad f_{26}(x) = \frac{\sinh(x)-x}{e^x-1} \qquad f_{27}(x) = \frac{\sinh(\sinh x)}{x^2}$$

$$f_{28}(x) = \frac{x^2}{(\tan x)\ln(1+x)} \qquad f_{29}(x) = \frac{x+\sinh x-2\sin x}{x+\sin x-2\sinh x} \qquad f_{30}(x) = \frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}$$

$$f_{31}(x) = \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

Corrigé sommaire — En A) on étudie les variations de $y = e^x - 1 - x$.
En B) on trouve les limites suivantes : $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{2}$, 2, -2, $\pm\infty$, $\mp\infty$, 1, 1, 1, 2,-2, -1, 0, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, 0, -1, 0, 0, 2, 0, 0, $\mp\infty$, $\pm\infty$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 0, 1, 1, -1, -2, $\frac{7}{3}$.