Université Paris 7 - Denis Diderot, année 2008-2009

MP1 groupe 1D3, Révisions du 20 novembre 2008

Exercice 1 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$. En déduire la factorisation $z^2-(3+4i)z-1+5i=(z-2-3i)(z-1-i)$, puis trouver $a,b\in\mathbb{C}$ tels que

$$\frac{1}{z^2-(3+4i)z-1+5i}=\frac{a}{z-2-3i}+\frac{b}{z-1-i}.$$

Exercice 2 —Établir $(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})\big(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\big)(1+i)=\sqrt{2}\big(\cos\frac{5\pi}{84}+i\sin\frac{5\pi}{84}\big)$.
En déduire que : $\cos\frac{5\pi}{84}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{7}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{7}$.
Exercice 3 — Établir $\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}-1$, $\cos u=4\cos^3\frac{u}{3}-3\cos\frac{u}{3}$,
Exercice 4 — Soit à résoudre :

$$\cos x+\cos(5x)+\cos(9x)+\cos(13x)=0.$$

On introduit pour cela $S=\cos a+\cos(a+h)+\cdots+\cos(a+(n-1)h)$ et l'expression compagnonne $T=\sin a+\sin(a+h)+\cdots+\sin(a+(n-1)h)$, $S+iT=U$, $A=\cos a+i\sin a$, $H=\cos h+i\sin h$.
1 — Montrer que $U=A+AH+AH^2+\cdots+AH^{n-1}$, et que, si $H\neq 1$, alors $U=A\frac{1-H^n}{1-H}$.
2 — Montrer que $1-H=-2i\sin\frac{h}{2}(\cos\frac{h}{2}+i\sin\frac{h}{2})$, et montrer de même que l'on a $1-H^n=-2i\sin\frac{nh}{2}(\cos\frac{nh}{2}+i\sin\frac{nh}{2})$.
3 — Montrer que, si $h\neq 2k\pi$, $U=\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\frac{(\cos\frac{nh}{2}+i\sin\frac{nh}{2})(\cos a+i\sin a)}{\cos\frac{h}{2}+i\sin\frac{h}{2}}$.
4 — Montrer,si $h\neq 2k\pi$, que $U=\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\big(\cos(a+\frac{n-1}{2}h)+i\sin(a+\frac{n-1}{2}h)\big)$, et en déduire alors que : $S=\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cos(a+\frac{n-1}{2}h)$.
5 — Revenir à la question initiale en prenant donc $a=x$, $h=4x$, $n=3$. Alors, si $x\neq k\frac{\pi}{2}$, $S=\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\cos 5x$.
6 — Conclure que les racines de l'équation proposée valent, exprimées en degrés : ± 18, ± 30, ± 54, ± 60, ± 90, ± 120, ± 126, ± 150, ± 162.
Exercice 5 — 1 — Avec $\binom{p}{q}=\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q(q-1)\ldots 2.1}$, constater que $\frac{p}{q}\binom{p-1}{q-1}=\binom{p}{q}$. Calculer à la main les nombres $\binom{6}{i}$, pour $0\le i\le 6$, écrire la formule du binôme pour $n=6$, et calculer explicitement le développement de $(1+x)^6$.
2 — Comparer le développement de $(1+x)^6$ avec celui de $(1+2x+x^2)^3$ et trouver ainsi des identités reliant les $\binom{6}{i}$, les $\binom{3}{j}$ et les $\binom{2}{k}$.
3 — Procéder de même en remplaçant 6 par $2n$, pour trouver des identités reliant les $\binom{2n}{i}$, les $\binom{n}{j}$ et les $\binom{2}{k}$.reliant les $\binom{6}{i}$, les $\binom{3}{j}$ et les $\binom{2}{k}$.

Exercice 6 — Soit dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs : $a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$,

$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, et soit $x = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$.

Montrer que M est inversible, et donc que le système (b, c, d, e) constitue une base de $\mathbb{R}^4$. Montrer que l'équation $Mx = a$ admet une unique solution. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire de matrice M dans la base canonique. Quel est le noyau et quelle est l'image de f ?

Exercice 7 — Soit le système : $\begin{cases} 2w & -x & -y & & = & 1 \\ w & +x & +5y & & = & -1 \\ 3w & & +2y & -2z & = & p \end{cases}$. Pour quelles valeurs du paramètre p a-t-il une solution ? Précisez alors la dimension de l'espace des solutions.

Exercice 8 — Soit dans $\mathbb{R}^3$ le plan E_1 d'équation $x - 2y + 7z = 0$ et le plan E_2 engendré par les deux vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Donner une base de E_1. Donner une équation de E_2. Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_3$ est de dimension 1, en donner une base (e_3), et compléter cette base en une base (e_1, e_3) de E_1 et en une base (e_2, e_3) de E_3. Montrer qu'alors (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner l'équation du plan vectoriel E_4 perpendiculaire à E_3. Écrire dans cette base la matrice M de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projection parallèle sur E_4 parallèlement à E_3.

Exercice 9 — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique (i, j, k). Donner la matrice de f relativement à la base $(i + j + k, j, k)$.

Exercice 10 — Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1 — Montrer que M est de rang 2, et résoudre l'équation homogène associée $MX = 0$.

2 —- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire de matrice M relativement aux bases canoniques. Déterminer le noyau et l'image de f, et notamment les dimensions de ces espaces.

3 — Soit $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice ${}^tM$ (la transposée de M) relativement aux bases canoniques. Déterminer le noyau et l'image de g, et notamment les dimensions de ces espaces.

4 — Déterminer les noyaux et images de $g \circ f$ et de $f \circ g$.