243 exercices de MP1*

PROGRAMME : Connecteurs logiques, quantificateurs, raisonnement par l'absurde, ensembles et fonctions, injections, surjections, bijections. Entiers et récurrence, calculs arithmétiques. Fractions, nombres rationnels et nombres réels, approximations, complexes, formules de Moivre. Racines n-ièmes de 1. Équation du second degré à coefficients complexes. Exponentielle complexe. Équations de droites et plans, distances de points, orthogonalité de droites. Systèmes linéaires et résolutions par échelonnement ou pivots d'une matrice. Inversion de matrices. Applications linéaires, noyaux. Projections orthogonales. Sous-espaces, bases, dimensions, sommes directes. Limites de suites. Limites de fonctions. Continuité. Fonctions polynomiales, trigonométriques, logarithmique et exponentielle, hyperboliques, et leurs réciproques. Formes indéterminées. Calcul des dérivées. Développements limités, formule de Taylor. Asymptotes. Variations et graphes de courbes $y = f(x)$. Courbes paramétrées.

Exercice 1 *1 — Vérifier que* $x^2 - 2007y^2 = 1$ *admet pour solution entière le couple* $(x_0, y_0) = (224, 5)$.

2 — Chercher sur internet un "Pell Equation Solver" pour obtenir une solution entière de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - ny^2 = \pm 1$*, où* n *est votre année de naissance. Essayer de vérifier la solution proposée. Notamment pour* $n = 1990$ *on trouve la plus petite solution* $35314095433681999^2 - 1990.791628731408580^2 = 1$*, pour* $n = 1989$ *la plus petite solution est* $5544449^2 - 1989.124320^2 = 1$*, pour* $n = 1988$*, on a* $1201887^2 - 1988.26956^2 = 1$*, pour* $n = 1987$ *on a* $2163842^2 - 1987.48543^2 = 1$*, pour* $n = 1986$ *on trouve comme plus petite solution* $13209364625^2 - 1986.296409628^2 = 1$*, et pour* $n = 1985$ *la plus petite solution est* $1907602928^2 - 1985.42816161^2 = -1$*. Ici on demande simplement de vérifier que ces solutions en sont bien.*

3 — Chercher un document où soit expliqué pour quels entiers n *l'équation* $x^2 - ny^2 = \pm 1$ *admet une solution entière.*

Exercice 2 *1 — Montrer que si* x *et* y *sont des entiers qui satisfont à* $x^2 - y^2 = 1$*, alors* $x = 1$ *et* $y = 0$.

2 — Résoudre en nombres entiers l'équation $x^3 - y^3 = 1$.

Exercice 3 *1— Expliquer ce qu'est le raisonnement par récurrence.*

2 — Montrer par récurrence que pour tout entier n *on a* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3 — Montrer la même chose en posant $2S = (1 + 2 + \cdots + n) + (n + (n-1) + \cdots + 1)$*, soit* $2S = (1 + n) + (2 + (n-1)) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$.

Exercice 4 *Montrer par récurrence que* $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$*. Donner aussi un argument géométrique, en décomposant en enceintes le carré de côté* $1 + 2 + \cdots + n$.

Exercice 5 *L'addition* $+$ *et la multiplication* $\times$ *d'entiers sont* définies par récurrence, *avec* $\mathrm{suc}(n) = n + 1$*, par* $\begin{cases} n + 0 = n \\ n + \mathrm{suc}(m) = \mathrm{suc}(n + m) \end{cases}$ *et* $\begin{cases} n \times 0 = 0 \\ n \times \mathrm{suc}(m) = n \times m + m \end{cases}$.
Montrer alors par récurrence que $n + m = m + n$*, puis que* $n \times m = m \times n$.

Exercice 6 *Définir par récurrence* m^n*, puis montrer, par récurrence, que l'on a les identités* $m^{n+p} = m^n \times m^p$ *et* $(m^n)^p = m^{(n \times p)}$.

*René Guitart, 1 mars 2008, version 6.

Exercice 7 *1 — Démontrer par récurrence que* $n \leq n^2$.

2 — Démontrer par récurrence que $n \leq 2^n$.

Exercice 8 *Un nombre* $0 \leq x < 1$ *s'écrit* en base 10 *sous la forme (éventuellement infinie)* $x = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots$, *avec des entiers* $d_i < 10$, *et on écrit :* $x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots_{\mathbf{10}}$ *; et* x *s'écrit* en base 3 *sous la forme (éventuellement infinie)* $x = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \ldots$, *avec des entiers* $x_i < 3$, *et on écrit :* $x = 0, t_1 t_2 t_3 \ldots_{\mathbf{3}}$.

1 — Pour déduire de la suite des t_i *la suite des* d_i, *on considère le nombre* $10x$ *qui vaut* $10x = d_1 + \frac{d_2}{10^1} + \frac{d_3}{10^2} + \ldots$, *et donc on voit que* d_1 *est le plus grand entier* $\leq 10x$, *que l'on note* $E(10x)$, *et que l'on appelle la* partie entière *de* $10x$.

2 — Écrire $10x$ *sous la forme* $10x = \frac{10t_1}{3} + \frac{10t_2}{3^2} + \frac{10t_3}{3^3} + \ldots$, *et montrer que*

$$10x = \frac{1}{3}\big(10t_1 + \frac{1}{3}\big(10t_2 + \frac{1}{3}\big(10t_3 + \ldots\big)\big)\big).$$

3 — Pour produire finalement la valeur de $d_1 = E(10x)$, *dans le cas où l'écriture de* x *en base 3 s'arrête à* t_3, *soit lorsque exactement* $10x = \frac{1}{3}\big(10t_1 + \frac{1}{3}\big(10t_2 + \frac{1}{3}\big(10t_3\big)\big)\big)$, *on procède à la division euclidienne de* $10t_3$ *par* 3, *soit* $10t_3 = 3q_3 + r_3$, *puis la division de* $10t_2 + q_3$ *par* 3, *soit* $10t_2 + q_3 = 3q_2 + r_2$, *puis enfin la division de* $10t_1 + q_2$ *par* 3 *soit* $10t_1 + q_2 = 3q_1 + r_1$. *Montrer que* $10x = q_1 + \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{3^2}r_2 + \frac{1}{3^3}r_3$, *et en déduire que* $d_1 = q_1$.

4 — Déterminer de même d_2, *etc. Traiter complètement le cas de* $x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}$. *Retrouver ensuite le résultat en procédant à la division de* 17 *par* 27.

Exercice 9 *1 — Calculer* 1^2, 2^2, $(1,1)^2$, $(1,2)^2$, $(1,3)^2$, $(1,5)^2$, $(1,41)^2$, $(1,42)^2$, *et en déduire que* $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$. *Expliquer la démarche, et la poursuivre pour établir la valeur de* $\sqrt{2}$ *à* 10^{-4} *près.*

2 — Calculer, à 10^{-3} *près, la valeur de* $\sqrt[5]{3}$.

Exercice 10 *Montrer que* $2,15 < \sqrt[3]{10} < 2,16$. *Améliorer l'encadrement d'une décimale.*

Exercice 11 *Montrer que* $\sqrt[12]{2} = 1,0594...$, *et renseignez-vous sur la gamme de Zarlino.*

Exercice 12 *1 — Montrer que pour tout entier* $n \geq 5$ *on a* $n^2 < 2^n$.

2 — Montrer que $\sqrt{2} < e$ *(on admettra que* $1,718 < e < 1,719$*).*

3 — Montrer que pour n *assez grand on a* $n < e^n$, *et donc* $\log n < n$.

Exercice 13 *1 —Expliquer le principe logique de contraposition.*

2 — Montrer que les énoncés "tout corbeau est noir" et "tout ce qui n'est pas noir n'est pas un corbeau" sont logiquement équivalents.

3 — D'un point de vue empirique, on considère que l'énoncé "tout corbeau est noir" est confirmé *chaque fois que l'on rencontre un corbeau et que l'on constate qu'il est noir. Est-ce que, du même point de vue empirique, l'énoncé "tout corbeau est noir" est* confirmé *chaque fois que, rencontrant un objet rouge on constate que ce n'est pas un corbeau ?*

Exercice 14 *1 — Constater que le mot "ou" en français dans une expression comme "A ou B", peut signifier une équivalence (comme dans "La bête à Bon Dieu ou coccinelle") et peut dans ce cas être remplacé par "c'est-à-dire" ou par "autrement dit"; il exprime alors une alternative entre des termes équivalents. Il peut aussi exprimer une alternative entre des termes éventuellement non équivalents, laquelle est parfois* exclusive *(comme dans "C'est moi ou lui"), et dans ce cas pourrait être remplacé par "ou bien A, ou bien*

B", et parfois au sens large *(comme dans "Il sera accompagné par sa mère ou son père", et dans ce cas pourrait être remplacé par "ou bien A, ou bien B, ou bien les deux". Le "ou" utilisé dans les formation d'énoncés mathématiques est pris en ce dernier sens d'une alternative large entre des termes quelconques, distincts ou non. Dans un énoncé formalisé on l'écrira $\vee$, en formant $A \vee B$, que l'on lira donc "A ou B".*

2 — On convient *que $A \vee B$ est vrai si et seulement si ou bien A est vrai et B est vrai, ou bien A est vrai et B est faux, ou bien A est faux et B est vrai. Donc $A \vee B$ est faux si et seulement si A est faux et B est faux. Reprendre ces caractéristiques en écrivant la table de vérité de $\vee$.*

Exercice 15 *1 — L'expression en français "si ... alors ..." permet de construire, si A et B sont des propositions données un nouvel énoncé qui se dit "si A alors B". Appréciez le sens en français des énoncés : "Si vous venez (alors) apportez vos photos", "S'il doit pleuvoir, (alors) prenons nos parapluies", "Si la pluie tombe sur moi, alors je suis mouillé", "Si la pluie tombe sur moi, alors je suis séché". Seuls les deux derniers cas forment vraiment, chacun, une proposition, susceptible d'être vraie ou fausse. En mathématique c'est seulement ce cas où l'on forme une nouvelle proposition qui est utilisé. La nouvelle proposition est alors notée $A \Rightarrow B$. Donner des exemples mathématiques de propositions de la forme $A \Rightarrow B$ qui soient des propositions vraies, des exemples qui soient des propositions fausses.*

2 — On convient *que $A \Rightarrow B$ est vrai si et seulement si ou bien A est vrai et B est vrai, ou bien A est faux et B est vrai, ou bien A est faux et B est faux. Donc $A \Rightarrow B$ est faux si et seulement si A est vrai et B est faux. Reprendre ces caractéristiques en écrivant la table de vérité de $\Rightarrow$.*

3 — En français on peut nier une proposition A, c'est-à- dire dire "A est faux", et l'on dispose ainsi d'une nouvelle proposition qui est vraie si et seulement si A est fausse. En mathématique la proposition "A est faux" est plutôt lue : "non-A et notée $\neg A$. Écrire la table de vérité de $\neg$.

4 — Montrer que logiquement, c'est-à-dire relativement aux valeurs de vérités, A et $\neg\neg A$ sont équivalentes, ce que l'on écrit : $\neg\neg A \equiv A$.

Montrer que $A \Rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$, que $(A \Rightarrow \textit{faux}\ ) \equiv \neg A$.

Exercice 16 *1 — On pose $A \wedge B = (\neg A) \vee (\neg B)$, et on lit $A \wedge B$: A et B. Dresser la table de vérités de $A \wedge B$.*

2 — Dresser les tables de vérités des fonctions propositionnelles

$$A \wedge \neg B,\ \ \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B),\ \ \big(A \Rightarrow (\neg B)\big) \Rightarrow \neg(A \wedge B),\ \ A \Rightarrow \big((\neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)\big).$$

Exercice 17 *Si une fonction propositionnelle P dépend d'une variable $x \in E$, où E est un ensemble donné, on écrit $P = P(x)$. On construit alors deux propositions indépendantes de x en* quantifiant *sur $x \in E$. L'une est notée $\forall x \in E\, P(x)$, ce qui s'écrit aussi $\forall x(x \in E \Rightarrow P(x))$, et se lit "pour tout x de E on a $P(x)$", et l'autre est notée $\exists x \in E\, P(x)$, ce qui s'écrit aussi $\exists x(x \in E \wedge P(x))$, et se lit : "l existe un x de E tel que $P(x)$". La première signifie que pour tout x de E la proposition $P(x)$ est vraie, la seconde qu'il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ soit vraie.*

1 — Si $a \in E$, montrer que la proposition $(\forall x \in E\, P(x)) \Rightarrow P(a)$ est vraie, montrer que la proposition $P(a) \Rightarrow (\exists x \in E\, P(x))$ est vraie.

2 — Montrer que $\neg(\forall x \in E\, P(x)) \equiv \exists x \in E\, \neg P(x)$.

3 — Montrer que si $P(x)$ dépend de la seule variable x et si Q ne dépend ni de x ni d'aucune variable, alors

$$\forall x \in E\, (P(x) \Rightarrow Q) \equiv (\exists x \in E\, P(x)) \Rightarrow Q$$

$$\forall x \in E\,(Q \Rightarrow P(x)) \equiv (Q \Rightarrow \forall x \in E\,P(x)).$$

Exercice 18 *Soit* $P = \forall x \in \mathbb{N}\big((\exists k \in \mathbb{N}\, x = 2k) \vee (\exists k \in \mathbb{N}\, x = 2k+1)\big)$*. Lire et expliquer* P*. Cet énoncé est-il vrai ?*

Exercice 19 *Soit* $f : E \to F$ *une fonction. Écrire un énoncé formel qui signifie que* f *est injective, un énoncé formel qui signifie que* f *est surjective.*

Exercice 20 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \cos(x^2) + 1$*. Pour quelles valeurs de* $a \in \mathbb{R}$ *l'énoncé* $P(a) = \forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R}\big((f(x) = y) \vee ((y(y-a) > 0)\big)$ *est-il vrai ?*

Exercice 21 *Calculer* $48^2 - 47 \times 7^2$*. L'énoncé* $\exists a \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N}\,(a^2 - 47b^2 = 1)$ *est-il vrai ou faux ? L'énoncé* $\exists a \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N}\,(a^2 - 47b^2 = 49)$ *est-il vrai ou faux ?*

Exercice 22 *Expliquer le principe du raisonnement par l'absurde.*

Exercice 23 *1 — Vérifiez*

$$\frac{abcd}{efgh} = \frac{d + \frac{c + \frac{b + \frac{a}{e}}{f}}{g}}{h}.$$

2 — Comparer les écritures $\frac{1+\frac{1+\frac{1+\dots}{a_3}}{a_2}}{a_1}$ *et* $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2a_3} + \dots$

Exercice 24 *Montrer que* $\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}$.

Exercice 25 *Montrer que l'on peut écrire* 1 *comme somme d'inverses de nombres impairs distincts en quantité finie :*

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{105} + \frac{1}{135}.$$

Exercice 26 *Écrire* $\frac{9}{11}$ *comme somme d'inverses d'entiers distincts (En fait ce n'est pas possible si le nombre d'entiers est supposé* ≤ 3*).*

Exercice 27 *1 — Soit* $f = \frac{p}{q}$*, avec* $q > p > 0$*,* $p, q \in \mathbb{N}$*. L'*algorithme de Fibonacci-Sylvester *est construit à l'aide de la division euclidienne de* q *par* p*, qui donne* $q = sp + r$*, avec* $0 \leq r < p$*, par les deux fonctions* Q *et* S *définies par*

$$Q(f) = \begin{cases} \frac{1}{s+1} & si\ r > 0 \\ \frac{1}{s} & si\ r = 0 \end{cases}, \quad S(f) = \begin{cases} \frac{p-r}{q(s+1)} & si\ r > 0 \\ 0 & si\ r = 0 \end{cases}.$$

Montrer que $f = Q(f) + S(f)$*.*

2 — Montrer qu'en itérant l'algorithme suivant $Q_1 = Q, S_1 = S, Q_2 = QS, S_2 = SS, \dots,$ $Q_k = QS^{k-1}, S_k = S^k$*, il existe, pour chaque* f*, une plus petite valeur* n *telle que l'on ait* $S_n(f) = 0$*, et alors* $S_{n-1}(f) = Q_n(f)$*, et l'on a la décomposition de* f *en somme d'inverses distincts :*

$$f = Q_1(f) + Q_2(f) + \dots + Q_n(f).$$

Exercice 28 *1 — Montrer par l'absurde que si α satisfait $\alpha^2 = 2$, c'est-à-dire si l'on a $\alpha = \pm\sqrt{2}$, alors il est impossible d'écrire α comme fraction $\alpha = \frac{p}{q}$. On montrera que si cela était possible, alors on pourrait aussi écrire α comme fraction $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q sans diviseurs communs. Puis supposant ce dernier point on montrera que l'on peut en déduire que p et q sont tous deux divisibles par 2.*

2— Expliquer alors pourquoi la diagonale AC du carré $ABCD$ et le côté AB sont incommensurable, c'est-à-dire pourquoi il n'existe pas de segment PQ qui entre exactement un nombre entier de fois dans AC et un nombre entier de fois dans AB.

Exercice 29 *Montrer que si l'on admettait que la collection de tous les ensembles soit elle-même un ensemble $\mathcal{T}$, alors $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{T}; x \notin x\}$ serait un ensemble, et les deux énoncés $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$ seraient faux. Conclure que la collection de tous les ensembles n'est pas elle-même un ensemble.*

Exercice 30 *Soit a et b deux réels. Trouver deux réels c et d tels que $\frac{1}{a+bi} = c + di$.*

Exercice 31 *Écrire le formulaire de passage entre les nombres complexes sous forme $a + bi$ et les nombres complexes sous forme $\rho e^{i\theta}$. Démontrer la formule de De Moivre.*

Exercice 32 *1 — Montrer que $\sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$ et $\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$.*
2 — Calculer $\cos^n\phi = \left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)^n$ par la formule du binôme, regrouper les termes en $e^{i(n-2k)\phi}$ et $e^{-i(n-2k)\phi}$, dont les coefficients égaux sont $\binom{k}{n}$ et $\binom{n-k}{n}$, et en déduire une expression "linéarisée" $\cos^n\phi = \frac{1}{2^n}\big(\cos n\phi + \binom{1}{n}\cos(n-2)\phi + \binom{2}{n}\cos(n-4)\phi + \dots\big)$.
3 — Montrer que $\cos^2\phi = \frac{1}{2}(\cos 2\phi + 1)$, $\cos^3\phi = \frac{1}{4}(\cos 3\phi + \cos\phi)$.
4 — Montrer que $\cos^5\phi = \frac{1}{16}(\cos 5\phi + 5\cos 3\phi + 10\cos\phi)$.
5 — Procéder de même pour $\sin^n\phi$. Montrer que $\sin^5\phi = \frac{1}{16}(\sin 5\phi - 5\sin 3\phi + 10\sin\phi)$.
6 — Montrer que $\cos^5\phi + i\sin^5\phi = \frac{1}{16}(e^{5i\phi} + 5e^{-3i\phi} + 10e^{i\phi})$, et donc que le point d'affixe $\cos^5\phi + i\sin^5\phi$ est intérieur au triangle des points d'affixes $e^{5i\phi}$, $e^{-3i\phi}$,$e^{5i\phi}$.

Exercice 33 *Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^2 = i$.*

Exercice 34 *Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^2 + z + 1 = 0$.*

Exercice 35 *Montrer que la seule racine réelle de $3 + \sqrt{x+3} = 2 + \sqrt{3x+6}$ est $x_1 = 1$.*

Exercice 36 *Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^2 + iz + 1 = 0$.*

Exercice 37 *Résoudre l'équation : $iz^2 - (1-2i)z + 3 + 5i = 0$.*

Exercice 38 *1 — Pour $a, b, c \in \mathbb{C}$, on considère les racines r_1 et r_2 de l'équation où y est l'inconnue : $ay^2 + by + (c-2a) = 0$, et puis les équation $x^2 - y_1x + 1 = 0$ et $x^2 - y_2x + 1 = 0$. Montrer que les quatre solutions de ces deux équations sont les solutions de l'équation du quatrième degré : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. On pourra poser $y = x + \frac{1}{x}$.*
2 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$.

Exercice 39 *Soit le nombre $a = 2+i$. Former une équation du second degré à coefficients réels dont a soit solution.*

Exercice 40 *Soit a, b et c des réels, et $\alpha = u+bi$ une racine complexe de $az^2+bz+c = 0$. Montrer que $\bar{\alpha} = u - vi$ est aussi racine de $az^2 + bz + c = 0$.*

Exercice 41 *Résoudre en nombres réels ou complexes le système* $\begin{cases} x & & +z & = & 0 \\ -x & +y & & = & 1 \\ x & -y & +z & = & 2 \end{cases}$

Exercice 42 *Résoudre en nombres complexes* $\begin{cases} ix & & +z & = & 0 \\ -x & +(1-2i)y & & = & 1-i \\ x & -y & -5iz & = & 2 \end{cases}$

Exercice 43 *Résoudre en nombres complexes* $\begin{cases} 3x & +iy & -z & = & 0 \\ x & +3iy & -5z & = & 7i \\ -6x & +(1-i)y & +5iz & = & 2 \end{cases}$

Exercice 44 *On considère le cube de sommets* $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$*. Montrer qu'il y a douze plans contenant chacun deux arêtes de ce cube. En donner les équations.*

Exercice 45 *Trois faces d'un parallélépipède appartiennent aux plans* $x - 3z + 18 = 0$*,* $2x - 4y + 5z - 21 = 0$*,* $6x + y + z - 30 = 0$*, et l'un de ses sommets* A *a pour coordonnées* $(-1, 3, 1)$*.*

1 — Donner les équations des autres faces.

2 — Montrer que la diagonale passant par A *a pour équations* $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3}$*.*

Exercice 46 *Pour quelles valeurs de* a *les droites* $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a}$ *et* $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}$ *sont-elles identiques ? se coupent-elles ? sont-elles parallèles ? sont-elles non-coplanaires ?*

Exercice 47 *Soit* A *un point sur la droite* $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$*, et dont la distance au plan* $x + y + z + 3 = 0$ *vaut* $\sqrt{3}$*. Déterminer les coordonnées de* A*.*

Exercice 48 *Les points* $A = (-3, 0, 0)$ *et* $B = (3, 0, 0)$ *sont les sommets d'un certain tétraèdre régulier* $ABCD$*, tel que le point* C*, dont les coordonnées sont positives, se trouve à la distance* $3\sqrt{2}$ *du plan* $z = 0$*. L'orientation du triplet de vecteurs* $\vec{AB}$*,* $\vec{AC}$*,* $\vec{AD}$ *est directe. Montrer que les équations des faces du tétraèdre sont* $x\sqrt{2} + z - 3\sqrt{2} = 0$*,* $x\sqrt{2} - z + 3\sqrt{2} = 0$*,* $y\sqrt{2} \pm z = 0$*.*

Exercice 49 *1 — Soit* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \exists t \in \mathbb{R} \left(x = 2t - 1, y = t + 3, z = -\frac{1}{2}t - 5\right)\}$*. Montrer que* D *est une droite ne passant pas par l'origine.*

2 — Déterminer l'équation du plan passant par l'origine et contenant la droite D*, et l'équation du plan vertical contenant* D*.*

Exercice 50 *Déterminer les éléments des ensembles suivants :* $\mathbb{N} \times \emptyset$*,* $\mathcal{P}(\emptyset)$*,* $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\emptyset)\big)$*,* $\{x \in \mathbb{N}; x \neq x\}$*,* $\{x \in \mathbb{N}; x = x + 1\}$*,* $\{x \in \mathbb{N}; x^2 < 3x + 17\}$*.*

Exercice 51 *Donner les éléments de* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$*, et les ordonner entre eux par la relation d'inclusion.*

Exercice 52 *On prétend définir une certaine fonction de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *comme celle qui à tout* $x \in \mathbb{R}$ *associe le nombre* u *tel que* $u^2 = x$*. Cela est-il bien défini ?*

Exercice 53 *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$. *Cette fonction est-elle bien définie, est-elle injective, surjective, bijective ?*

Exercice 54 *Soit* $f : E \to F$ *une fonction. On définit les "image directe" de parties par* f*, soit* $f_* : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$*, et "image inverse" de parties par* f*, soit* $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ *par :*

$$f_*(X) = \{y \in F; \exists x \in X \big(y = f(x)\big)\}, \quad f^{-1}(Y) = \{x \in E; f(x) \in Y\}.$$

1 — Souvent on note (abus de langage admis) $f_*(X)$ *par simplement* $f(X)$*. Cela peut-il poser un problème quand* $X \subset E$ et $X \in E$ *? On note aussi* $\{y \in F; \exists x \in X \big(y = f(x)\big)\}$ *sous la forme allégée* $\{f(x); x \in X\}$*, et l'on écrit donc encore* $f(X) = \{f(x); x \in X\}$*. Justifier clairement que* $f(X)$ *est* la partie de F constituée des images par f des éléments de X*, et que* $f^{-1}(Y)$ *est* la partie de E dont les éléments sont les x dont l'image par f tombe dans Y.

2 — Montrer que f_* *et* f^{-1} *sont bien définies.*

3 — Montrer que f *est injective si et seulement si* f_* *est injective, et que* f *est surjective si et seulement si* f_* *est surjective.*

4 —Montrer que f *est injective si et seulement si* f^{-1} *est surjective, et que* f *est surjective si et seulement si* f^{-1} *est injective.*

Exercice 55 *Si* $f : E \to F$*, montrer que* $f(\emptyset) = \emptyset$*, que si* $A \subseteq B$ *alors* $f(A) \subseteq f(B)$*, que* $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$*, et que* $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$*.*

Exercice 56 *Si* $f : E \to F$*, alors* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$*,* $C \subseteq D$ *implique* $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$*,* $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$*, et* $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$*.*

Exercice 57 *Si* $f : E \to F$*, montrer que* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *pour toutes les parties* A *et* B *de* E *si et seulement si* f *est injective.*

Exercice 58 *On pose* $a = \sqrt{2}$*,* $b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ $c = b^a$*. Montrer que* c *est rationnel. Montrer qu'il existe deux irrationnels* u *et* v *tels que* u^v *soit rationnel.*

Exercice 59 *1 — Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $z^3 = 2$*.*

2 — Montrer que $(-)^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ *est strictement croissante, continue, et bijective.*

3 — Montrer qu'en associant à tout $x \in \mathbb{R}$ *le nombre* u *tel que* $u^3 = x$*, on définit bien une unique fonction* $\sqrt[3]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dont la valeur en* x *est notée* $\sqrt[3]{x}$*, et qui est bijective.*

Exercice 60 *Soit* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble de tous les nombres rationnels. Montrer qu'il existe une injection* $j : Q \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *et donc aussi une injection* $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$*.*

Exercice 61 *Montrer que* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*, c'est-à-dire que* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *et que* $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$*.*

Exercice 62 *Chercher où vous voulez une preuve de ce qu'il n'existe pas d'injection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{N}$*, par exemple en demandant des informations sur l'"argument diagonal" de Cantor. Lire et comprendre cette preuve. Déduire de ce résultat qu'il n'existe pas d'injection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{Q}$*.*

Exercice 63 *Soit* $f = E \to \mathcal{P}(E)$ *une fonction, et soit* $C = \{x \in E; x \notin f(x)\}$*. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'élément* $a \in E$ *tel que* $f(a) = C$*. Conclure qu'il n'existe aucune surjection de* E *vers* $\mathcal{P}(E)$*.*

Exercice 64 *Soit trois applications* $f : E \to F$, $g : F \to G$ *et* $h : E \to G$ *telles que* $h = g \circ f$. *Montrer que si* h *est injective alors* f *est injective, et que si* h *est surjective alors* g *est surjective.*

Exercice 65 *1 — Soit* $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. *Pour* $\alpha \in \mathbb{C}$, *montrer qu'il existe un unique polynôme* $Q(z) = Az^2 + Bz + C$ *et une unique constante* r, *avec* $A, B, C, r \in \mathbb{C}$, *tels que* $P(z) = (z - \alpha)Q(z) + r$.

2 — Montrer que $r = P(\alpha)$, *et donc que* α *est racine de* $P(z) = 0$ *si et seulement si* $P(z)$ *est divisible par* $(z - \alpha)$.

3 — Expliquer comment résoudre complètement une équation du troisième degré $P(z) = 0$ *lorsque l'on connaît déjà une racine* r_1 *de cette équation.*

4 — Constater que i *est racine de l'équation* $x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$, *et résoudre complètement cette équation.*

Exercice 66 *1 — Montrer que* $x_1 = 4$ *est une racine de* $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8 = 0$, *et montrer que le quotient de* $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8$ *par* $x - 4$ *est* $x^3 - 3x - 2$.

2 — Montrer que $x_2 = 2$ *est racine de* $x^3 - 3x - 2 = 0$, *et montrer que le quotient de* $x^3 - 3x - 2$ *par* $x - 2$ *est* $x^2 + 2x + 1$.

3 — Résoudre complètement $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8 = 0$.

Exercice 67 *1 —- On pose* $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. *dessiner les point* j, j^2, j^3. *Montrer que l'on a* $1 + j + j^2 = 0$.

2 — Soit α *un complexe* $\neq 0$ *et* r *un complexe tel que* $r^3 = \alpha$. *Montrer alors qu'il y a trois complexes solutions de l'équation* $z^3 = \alpha$, *et que ce sont* r, jr, j^2r.

Exercice 68 *1 — Soit* θ *un angle donné, et, connus donc,* $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$. *Former une équation du troisième degré à coefficients réels connus dont le nombre réel* $\cos(\frac{\theta}{3})$ *soit racine.*

2 — Fournir une équation du troisième degré ayant pour racine $\cos(\frac{2\pi}{9})$.

Exercice 69 *1— Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^3 = 2$.

2 — Résoudre l'équation $z^3 = 2 + 11i$.

Exercice 70 *1 — Pour tout entier* n *on définit le complexe*

$$\epsilon_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Montrer que $\epsilon_n^n = 1$, *et que les racines de* $z^n = 1$ *sont précisément* $\epsilon_n, \epsilon_n^2, \ldots, \epsilon_n^{n-1}, \epsilon_n^n = 1$.

2 — Pour résoudre $z^n = \alpha$, *si l'on a déjà trouvé une racine* r_1, *il suffit de multiplier* r_1 *par les puissances successive de* ϵ_n, *et les racines sont donc :* $r_1, r_1\epsilon_n, r_1\epsilon_n^2, \ldots, r_1\epsilon_n^{n-1}$.

Exercice 71 *On fabrique une fonction* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *en numérotant les points du plan à coordonnées entières positives ou nulles, dans l'ordre suivant :*

$$f(0) = (0,0), f(1) = (1,0), f(2) = (0,1), f(3) = (2,0), f(4) = (1,1), f(5) = (2,0),$$
$$f(6) = (0,3), f(7) = (1,2), f(8) = (2,1), f(9) = (3,0), f(10) = (0,4), f(11) = (3,1), \ldots.$$

Dessiner la succession de ces points. Expliquer pourquoi pour tout (m,n) *il existe un entier* $g(m,n)$ *unique tel que* $f\big(g(m,n)\big) = (m,n)$. *Montrer que* $g(m,0) = \frac{m(m+1)}{2}$. *Donner une formule algébrique polynomiale pour* $g(m,n)$. *Montrer que* f *et* g *sont bijectives, inverses l'une de l'autre.*

Exercice 72 *1 — Pour tout nombre complexe* $z = a + bi$ *on pose*

$$\exp z = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Montrer que $\exp 0 = 1$ *et que* $\exp(z + z') = \exp z \exp z'$.

2 — Montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \exp(z)$ *est une fonction bien définie. Est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

3 — Montrer que $\exp : \{z \in \mathbb{C}; z = a + bi, 0 \leq b < 2\pi\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *est bijective.*

4 — Décrire les ensembles images $\exp(\mathbb{R}i)$ *et* $\exp(\mathbb{R})$.

Exercice 73 *On admettra que si* α *et* β *sont algébriques,* $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$*, et* β *irrationnel, alors* α^β *est transcendant (= non-algébrique).*

1 — Montrer alors que $2^\theta = 3$*, que* $\theta = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ *est irrationnel. et donc que* θ *est transcendant.*

2 — Montrer que $e^{-\pi}$ *est une des valeurs de* i^{2i}*, et que cette valeur est transcendante.*

Exercice 74 *1 — Déterminer les nombres complexes* a *et* b *tels que la transformation* $T(z) = az + b$ *du plan complexe* $\mathbb{C}$ *transforme chaque point par la succession des opérations : homothétie de centre l'origine et de coefficient* $k = 2$*, rotation de centre l'origine et d'angle* $\frac{\pi}{4}$*, translation verticale vers le haut de longueur 1.*

2 — Montrer, géométriquement ou analytiquement, que T *transforme toute droite en droite et tout cercle en cercle.*

3 — T *transforme-t-elle tout carré en un carré ?*

Exercice 75 *Déterminer toutes les transformations* $f(z) = az + b$ *qui transforment les nombres* $A = 1 + i$ *et* $B = 1 - i$ *en* $A' = 1$ *et* $B' = i$.

Exercice 76 *1 — Soit* $h : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\} \; : z \mapsto h(z) = \frac{z-i}{z+i}$*. Montrer que* h *est bien définie et bijective.*

2 — On pose $h(z) = Z$*. Montrer que* $(Z - i)(z + i) = -2i$.

3 — Déterminer sous la forme $z = g(Z) = \frac{aZ+b}{cZ+d}$ *la fonction* $g : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ *réciproque de* h*, c'est-à-dire telle que* $g \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}\backslash\{-i\}}$ *et* $h \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}\backslash\{1\}}$.

4 — Déterminer les complexes α *et* β *solutions de* $z = \frac{z-i}{z+i}$ *soit de* $z = h(z)$*. Résoudre aussi* $Z = g(Z)$.

Exercice 77 *Soit* z_1*,* z_2 *et* z_3 *trois éléments distincts du plan complexe* $\mathbb{C}$*, et* Γ *le cercle passant par ces trois points. Écrire l'équation que doit satisfaire* z *pour être sur* Γ.

Exercice 78 *1 — Par calcul à partir de* $ax + by = c$*, montrer que toute droite du plan se caractérise par une équation de la forme* $Az + \bar{A}\bar{z} = 2H$*, avec* H *réel.*

2 — Remontrer le fait de la question 1 — en traitant le cas particulier de la droite $x = h$ *puis en faisant une rotation dans* $\mathbb{C}$ *autour de* 0*,*

Exercice 79 *1 — Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on introduit* $[z] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$*. Montrer que l'application* $[-] : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R}) : z \mapsto [z]$ *est bien définie et injective.*

2 — Montrer que $[z + z'] = [z] + [z']$*, que* $[z.z'] = [z][z']$*, que* $[\bar{z}] = [z]^\top$.

3 — On pose $\exp(i\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$ *et* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$*. Constater que si* $z = \rho \exp(i\theta)$*, alors* $[z] = \rho R(\theta)$*. Que signifie géométriquement* $R(\theta)$*,* $\rho R(\theta)$ *?*

Exercice 80 *1 — Trouver toutes les matrices* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *telles que* $M^2 = I_2$.

2 — Trouver toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *telles que* $M^2 = -I_2$.

Exercice 81 *Pour* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ *on pose* $\det M = ad - bc$ *et* $\operatorname{tr} M = a + d$, *et on considère l'équation du second degré à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *et où l'inconnue* X *est a priori une matrice* 2×2 *élément de* $M_2(\mathbb{C})$ *:*

$$X^2 - (trM)X + (\det M)I_2 = 0.$$

1 — Montrer que M *est solution de cette équation.*

2 — Montrer que M *est inversible si et seulement si* $\det M \neq 0$, *et qu'alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det M}\big((trM)I_2 - M\big).$$

3 — Montrer que si $\det M \neq 0$ *alors le système* $\begin{cases} ax & +by & = & p \\ cx & +dy & = & q \end{cases}$ *admet une unique solution donnée par*

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix}}{\det M}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}}{\det M}.$$

Exercice 82 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que* B *est inversible si et seulement si* A *est inversible.*

Exercice 83 *Pour quelles valeurs de* $\lambda \in \mathbb{C}$ *la matrice* $\begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{pmatrix}$ *est-elle inversible ? Donner alors l'inverse.*

Exercice 84 *Résoudre par pivot* $\begin{cases} & y & +z & = & 1 \\ x & & & = & a \\ x & & & = & b \\ & -y & -z & = & -1 \end{cases}$ *puis* $\begin{cases} & y & +z & = & 1 \\ x & +\lambda y & & = & a \\ \mu x & & +\lambda z & = & b \\ & -y & -\nu z & = & -1 \end{cases}$

Préciser pour quelles valeurs des paramètres le second système n'admet pas de solution, admet une solution unique, admet plusieurs solutions. Exprimer chaque fois explicitement les solutions.

Exercice 85 *Résoudre et discuter suivant* λ, a, b, c, $\begin{cases} x & -3y & +z & = & a \\ 2x & -y & & = & b \\ \lambda x & +5y & -2z & = & c \end{cases}$

Exercice 86 *— Résoudre dans* $\mathbb{C}^3$, *en discutant suivant les valeurs du paramètre* p, *et des paramètres* a, b, c, *le système d'équations linéaires :*

$$\begin{array}{cccccc} 2x & -3y & pz & = & a \\ -x & +7y & -z & = & b \\ 5x & -10y & -pz & = & c \end{array}$$

Exercice 87 *Dans* $\mathbb{R}^2$ *soit les droites* $2x+3y+1=0$, $7x+11y+4=0$ *et* $3x+4y+1=0$. *Déterminer si elles ont un point commun.*

Exercice 88 — *Soit dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs* $e_1=(1,2,4)$, $e_2=(3,2,1)$, *et* $e_3=(1,-1,a)$. *Pour quelles valeurs de* a *le systèmes* $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ *est-il une base de* R^3 *? Écrire alors les coordonnées dans cette base du vecteur* $u=(p,q,r)$.

Exercice 89 *1 — Soit dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs* $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}1\\2\\m\end{pmatrix}$, *et soit la matrice* $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&2\\-1&5&m\end{pmatrix}$. *Montrer que* $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ *est une base si et seulement si* A *est inversible.*

2 — Pour quelles valeurs de m *le système* β *est-il une base ?*

3 — Si β *est une base, montrer que les coordonnées* $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ *dans la base* β *d'un point* M *vérifient* $\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&2\\-1&5&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, *avec* $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *les coordonnées dans la base canonique du même point* M.

4 — Un point M *de* $\mathbb{R}^3$ *peut-il avoir les mêmes coordonnées dans la base canonique et dans la base* β *? Donner tous les points pour lesquels ceci a lieu.*

Exercice 90 *1 — Soit les plans* Π *d'équation* $2x-y+7z=0$, *et* Π' *d'équation* $y-3z=0$, *et* $\Delta=\Pi\cap\Pi'$. *Constater que* $u=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ *est sur* Δ.

2 — Déterminer un vecteur v *unitaire dans* Π *orthogonal à* Δ, *et un vecteur* v' *unitaire dans* Π' *orthogonal à* Δ. *Donner une équation du plan engendré par* v *et* v'.

3 — Montrer que $\alpha=(u,v,v')$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$, *non orthonormée. Quel est l'angle des deux plans* Π *et* Π' *?*

4 — Construire deux bases orthonormées directes $\beta=(u,v,w)$ *et* $\beta'=(u,v',w')$, *et puis décrire une rotation transformant* β *en* β'.

Exercice 91 — *Soit dans* $\mathbb{R}^3$ *le plan* P *d'équation* $x-3y+8z=0$. *Montrer que* P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *Donner deux vecteurs* a *et* b *constituant une base de* P. *Compléter* (a,b) *pat un* c *tel que* (a,b,c) *soit une base de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* Q *le sous-espace engendré par* c *c'est-à-dire* $Q=\mathbb{R}c=\{kc;k\in\mathbb{R}\}$. *Montrer que* P *et* Q *sont supplémentaires, ce que l'on écrit* $\mathbb{R}^3=P\oplus Q$, *c'est-à-dire que pour tout* $w\in\mathbb{R}^3$ *il existe un unique* $u\in P$ *et un unique* $v\in Q$ *tel que* $u+v=w$. *On pose* $\pi(w)=u$. *Montrer que la fonction* $\pi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:w\mapsto\pi(w)$ *est linéaire. Montrer que* $P=\{h\in\mathbb{R}^3;\exists w\in\mathbb{R}^3\pi(w)=h\}$ *et que* $Q=\{w\in\mathbb{R}^3;\pi(w)=0\}$.

Exercice 92 *1 — Montrer que dans* $\mathbb{R}^3$ *l'ensemble* $\Delta^\perp$ *des vecteurs perpendiculaires à une droite donnée* Δ *est un sous-espace vectoriel, de dimension 2.*

2 — Si Δ *est la droite intersection des deux plans d'équations* $x-2z=1$ *et* $y+z=2$, *donner une base de* $\Delta^\perp$ *formée de deux vecteurs unitaires orthogonaux.*

Exercice 93 *1 — Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si l'on a $\dim A = a$ et $\dim B = b$, alors $\dim(A+B) \leq a+b$.*

2 — Donner un exemple pour lequel on a $\dim(A+B) < a+b$.

3 — Montrer que $\dim(A+B) = a+b$ si et seulement si $A+B = A \oplus B$, c'est-à- dire si et seulement si $A \cup b = \{0\}$.

Exercice 94 *1 — Pour quelles valeurs de λ la matrice $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 11 & \lambda \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?*

2 — Pour quelles valeurs de λ la matrice $\begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 95 *Inverser, si c'est possible, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -13 & 1 & 0 \\ 0 & 21 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.*

Exercice 96 *— Donner une base et une équation du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,3,-4)$, $v_2 = (3,-1,0)$, $v_3 = (0,11,-12)$, $v_4 = (5,13,-16)$.*

Exercice 97 *— 1 — Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; x+2y-3z+5w = 0\}$ et $B = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; 3x-y+3z+w = 0\}$. Donner une base de $A \cap B = C$.*

2 — Soit $A^\perp = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; \forall(x',y',z',w') \in A\ xx' + y' + zz' + ww' = 0\}$, soit $B^\perp = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; \forall(x',y',z',w') \in B\ xx' + y' + zz' + ww' = 0\}$. Décrire chacun de ces deux sous-espaces vectoriels par un système de trois équations linéaires, et montrer qu'ils sont de dimension 1. Donner une base de chacun.

3 — Soit $C^\perp = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; \forall(x',y',z',w') \in C\ xx' + yy' + zz' + ww' = 0\}$. Quelle est la dimension de $C^\perp$? Donnez-en une base.

4 — La somme $A^\perp + B^\perp$ est-elle directe ?

5 — Comparer $A^\perp + B^\perp$ et $C^\perp$.

Exercice 98 *— On considère dans $\mathbb{R}^5$ le système $\sigma(a,b,c)$ de 3 équations à 5 inconnues :*

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -5x_5 & = & a \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_5 & = & b \\ 4x_1 & +13x_2 & -19x_3 & +41x_5 & = & c \end{array}$$

1 — On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 13 & -19 & 0 & 41 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Constater que le système s'écrit $AX = B$.

2 — Montrer que l'ensemble $S_0 = \{X \in \mathbb{R}^5; AX = 0\}$ des solutions du système $\sigma(0,0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. En étudiant le système par échelonnement, donner 3 vecteurs r, s, t de R^5 formant une base de S_0. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^5$.

3 — Montrer que l'on a $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5 : P \mapsto F(P) = BP$, une application linéaire injective telle que $S_0 = \{F(P); P \in \mathbb{R}^3\}$. En fait B sera déterminée par les conditions $r = Bi, s = Bj, t = Bk$, où i, j et k sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4 — Précisez, suivant les valeurs de a, b et c, quand $\sigma(a,b,c)$ admet des solutions, et montrer qu'alors l'ensemble des solutions est de la forme $S_{(a,b,c)} = S_0 + Z_{a,b,c}$, où l'on note par $Z_{a,b,c} = (d,e,f,g,h)$ une solution particulière quelconque de $\sigma(a,b,c)$, et donner en fonction de a, b et c une telle $Z_{a,b,c}$. Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{R}^5$ il existe un unique (a,b,c) tel que Z soit solution de $\sigma(a,b,c)$.

Exercice 99 *1 — On pose $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que tout complexe de la forme $a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$, s' :'ecrit de manière unique sous la forme $c+dj$, $c,d \in \mathbb{R}$, et réciproquement.*

2 — Dessiner $\{a+bi; a,b \in \mathbb{Z}\}$ et $\{c+dj; c,d \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 100 *1 —- On pose $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Donner j sous forme trigonométrique. Dessiner les point j, j^2, j^3. Montrer que l'on a $1+j+j^2=0$.*

2 — Trouver, écrites sous la forme $a+bi$, toutes les racines complexes de l'équation $z^4=1$, puis de l'équation $z^4=j$. Résoudre aussi $z^4=j^2$.

3 — Résoudre $z^{12}=1$.

Exercice 101 *1 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-3(1+i)z+5i=0$.*

2 — On pose pour $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, $f(z) = 3(1+i) - \frac{5i}{z}$, définissant ainsi une fonction $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$. Trouver les points fixes de f, c'est-à-dire les valeurs de $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ telles que $f(z)=z$.

3 — La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

4 — On pose $A = \{z \in \mathbb{C}; \Re z > 0, \Im z = 0\}$, $B = \{z \in \mathbb{C}; \Re z = 3, \Im z < 3\}$. Montrer que si $z \in A$ alors $f(z) \in B$, si bien que l'on définit bien une fonction $h : A \to B$ en posant $h(z) = f(z)$. La fonction h est-elle injective ? surjective ? bijective ?

5 — Décrire géométriquement l'ensemble image $h(C)$ par h de la couronne

$$C = \{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} < |z| < 1\}.$$

Exercice 102 *1 —- Pour discuter* $\begin{cases} 2x & +y & -\lambda z & = & a \\ 4x & -y & +z & = & b \\ -x & +\lambda y & -\frac{1}{12}z & = & c \end{cases}$ *suivant les valeurs des paramètres $\lambda, a, b, c \in \mathbb{C}$, on demande d'abord d'échelonner la matrice* $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\lambda \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & +\lambda & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

2 — On constatera que sauf pour les deux valeurs $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1\pm\sqrt{7}i}{8}$ de λ, le système admet toujours une unique solution $s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. *On donnera alors les expressions explicites de x, y et z en fonction de a, b et c.*

3 — Lorsque $\lambda = \lambda_1$, montrer que, suivant que a, b et c ne satisfont pas ou satisfont à une certaine condition linéaire $p_1a + q_1b + r_1c = 0$ que l'on précisera, ou bien il n'existe pas de solution, ou bien il existe plusieurs solutions.

4 — Lorsque $\lambda = \lambda_2$, montrer que, suivant que a, b et c ne satisfont pas ou satisfont à une certaine condition linéaire $p_2a + q_2b + r_2c = 0$ que l'on précisera, ou bien il n'existe pas de solution, ou bien il existe plusieurs solutions.

5 — Dans les cas de plusieurs solutions, déterminer une solution $s_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, *dépendante* *des valeurs de a, b et c, et un vecteur* $d = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ *indépendant des valeurs de a, b et c, tels que chaque solution s'écrive de manière unique sous la forme $s = s_1 + td, t \in \mathbb{R}$. Conclure que l'ensemble des solutions est une droite affine.*

Exercice 103 *1 — Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq -1$ on a :*

$$\Im\Big(\frac{z-1}{z+1}\Big) = 2\frac{\Im z}{|z+1|^2}.$$

2 — Soit P l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. Montrer que $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ définit bien une application de P dans P. Cette application est-elle bijective ?

Exercice 104 *Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+2z = 0\}$ et $F = \{(a, -a, 3a); a \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.*

Exercice 105 *1 — Trouver toutes les solutions du système linéaire :*

$$\begin{cases} x & +y & +az & = & 0 \\ 3x & +4y & -4z & = & a \\ x & +ay & +a^3z & = & a^2-1 \end{cases}.$$

pour les différentes valeurs de a : $a = -2$, $a = 1$, et $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$.

2 — On définit une application $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en posant

$$f_a(x, y, z) = (x + y + az, 3x + 4y - 4z, x + ay + a^3z).$$

Montrer que f_a est une application linéaire.

3 — Pour quelles valeurs de a a-t-on $(0, a, a^2 - 1) \in \mathrm{im}(f_a)$?

4 — Pour quelles valeurs de a la fonction f_a est-elle surjective, injective, bijective ?

Exercice 106 *1 — On se place dans $\mathbb{R}^3$, et on considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$. Montrer que f est linéaire.*

2 — Déterminer $\ker f$ et dire si f est injective.

3 — f est-elle surjective ? bijective ?

Exercice 107 *1 — Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la transformation S qui à tout vecteur u associe $S(u)$ son symétrique orthogonal par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$. Montrer que S est linéaire et bijective.*

2 — Donner les coordonnées (x', y', z') dans la bases canonique de $S(u)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) de u.

Exercice 108 *1 — Soit E l'ensemble des polynômes en X à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degé au plus 5. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 6, en montrant que $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ en constitue une base.*

2 — Soit $d : E \to E$ l'application qui associe à tout polynôme P son polynôme dérivé $d(P)$. Montrer que d est linéaire.

3 — Déterminer le noyau $\ker d$ de d. Dire si d est injective, surjective, bijective.

Exercice 109 *1 — Soit* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *deux applications linéaires entre des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels. Montrer que la composée* $g \circ f : E \to G$ *est linéaire.*

2 — Montrer que $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$*, et que l'on a l'égalité si* $\ker g = \{0\}$.

Exercice 110 *1 — Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^8$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (x+y+z, -x+y+z, x-y+z, x+y-z, -x-y+z, -x+y-z, x-y-z, -x-y-z).$$

Montrer que f *est linéaire.*

2 —Déterminer $\ker f$*. Quelle est la dimension de* $\operatorname{im} f = \{w \in \mathbb{R}^8; \exists v \in \mathbb{R}^3\ f(v) = w\}$ *?*

Exercice 111 *1 — Une suite de réels est stricto sensus une fonction* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Couramment la valeur* $s(n)$ *de* s *sur* $n \in \mathbb{N}$ *est notée* s_n*, et la suite elle-même dans son ensemble est notée* (s_n)*. Toutefois, par abus, on parlera souvent simplement de la suite* s_n*. On distinguera entre l'ensemble des valeurs de la suite, soit* $\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$*, qui notamment peut être fini, et la considération de la suite infinie des* s_n*, qui peuvent bien se répéter. On note* $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ *l'ensemble des suites de réels. Montrer que* $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, quand on pose* $\lambda(s_n) = (\lambda s_n)$ *et* $(s_n) + (t_n) = (s_n + t_n)$*.*

2 — Si (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites convergentes vers* a *et* b*, montrer que la suite combinaison linéaire* $\lambda(u_n) + \mu(v_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge vers* $\lambda a + \mu b$*, et donc que l'ensemble* $\mathcal{C}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^\mathbb{N}$*.*

Exercice 112 *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites convergentes vers* a *et* b*. Montrer que les suites sommes et produits* $(u_n + v_n)$ *et* $(u_n v_n)$ *sont convergentes, vers* $a + b$ *et vers* ab*.*

Exercice 113 *1 — Soit* $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$*. Montrer que* $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$*, en calculant* $S_n - \frac{1}{2}S_n$*.*

2 — Montrer le même résultat de façon géométrique, en divisant un carré de côté 1 par une diagonale, puis l'un des triangles obtenue en 2 triangles égaux par une hauteur, etc. (faire une figure).

Exercice 114 *Sachant qu'un cheveux a une épaisseur d'environ 100 microns,* 1 *micron étant un millionnième de mètre, et que la distance de Paris à New-York est d'environ 3628 miles, et que* 1 *mile vaut environ* 1, 609344 *km, trouver un entier* N *tel que la précision qui consisterait à "donner la distance de Paris à New York à l'épaisseur d'un cheveu près" soit à peu près équivalente à une précision de* 10^{-N}*. Qu'en concluez-vous sur le sens physique du centième chiffre après la virgule dans la valeur d'une mesure d'une donnée physique ? Qu'en concluez-vous sur l'opportunité d'utiliser dans les calculs en physique pour* π *la valeur approximative de*

$$3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062 8?$$

Exercice 115 *Admettant que* $\pi = 3,14159265358979323846264...$*, montrer que la fraction* $\frac{22}{7}$ *donne* π *à* 10^{-2} *près (les deux premières décimales sont correctes).*

Exercice 116 *Montrer que* $0,9999999..... = 1$*.*

Exercice 117 *Montrer que le nombre* $a = 0,88888....$ *est bien défini, et qu'il est rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme* $\frac{p}{q}$ *pour* p *et* q *deux entiers que l'on déterminera.*

Exercice 118 *Montrer que le nombre $a = 0,8989898....$ est bien défini, et qu'il est rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ pour p et q deux entiers que l'on déterminera.*

Exercice 119 *Montrer qu'un nombre réel $\alpha \geq 0$ est rationnel, soit de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}$ si et seulement si son écriture décimale comme nombre à virgule est "périodique à partir d'un certain rang", c'est-à-dire s'il existe trois entiers qui s'écrivent $d_k d_{k-1} \dots d_1$, $q_1 q_2 \dots q_l$ et $p_1 p_2 \dots p_m$ tels que l'écriture de α soit*

$$\alpha = d_k d_{k-1} \dots d_1, q_1 q_2 \dots q_l p_1 p_2 \dots p_m p_1 p_2 \dots p_m p_1 p_2 \dots p_m \cdots$$

ce que l'on écrit aussi

$$\alpha = d_k d_{k-1} \dots d_1, q_1 q_2 \dots q_l [p_1 p_2 \dots p_m]^\infty,$$

Exercice 120 *1 — Montrer que $\xi = 0,1234567891011121314151617181920212223...$ est bien défini, et notamment, pour N un entier, trouver le N-ième nombre après la virgule dans ξ.*

2 — Montrer que dans le développement décimal de ξ on peut trouver une suite de 10^n chiffres 1 consécutifs, quelque soit n, et aussi qu'aussi loin que l'on aille dans cette suite, plus loin encore réapparaîtront sans cesse tous les chiffres. En déduire que ce développement n'est pas périodique à partir d'un certain rang, et donc que ξ n'est pas rationnel.

3 — Conclure de 1 — et 2 — que l'irrationalité ne signifie pas que le développement décimal soit erratique voire imprévisible.

Exercice 121 *On considère la suite (β_n) que voici :*

$$0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, \dots.$$

Montrer que toute suite d'entiers (u_n) peut être considérée comme extraite de cette suite particulière (β_n), c'est-à-dire qu'il existe une fonction strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout n on ait $u_n = \beta_{\phi(n)}$. En déduire une application injective de l'ensemble des suites quelconques d'entiers dans l'ensemble des suites croissantes d'entiers.

Exercice 122 *Soit u_n une suite convergente, et soit v_n la suite ayant les mêmes valeurs que u_n pour $n > 10^{100}$, et dont les valeurs pour les $n \leq 10^{100}$ sont celles de u_n multipliées par 10^{100}. Est-ce que la suite v_n converge ?*

Exercice 123 *1 — Soit (u_n) une suite, et $v_n = u_{n+1}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge, et qu'alors les limites sont égales.*

2 — Soit (u_n) une suite, et soit (S_n) la suite qui est dite série associée à (u_n), donnée par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer vque si (S_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.

Exercice 124 *Soit u_n une suite avec $\lim_{n\to+\infty} u_n = l > 0$, $l \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.*

Exercice 125 *1 — Montrer que si $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{n\to\infty} v_n = m \in \mathbb{R}$, avec $m \neq 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{m}$.*

2 — Montrer que quand n tend vers l'infini, $\frac{n+1}{3n-5}$ tend vers $\frac{1}{3}$, en utilisant le 1 —.

3 — Établir le résultat de 2 — sans utiliser le 1 —, en vérifiant directement le fait suivant la définition de la convergence, c'est-à-dire en exhibant explicitement, pour tout $\epsilon > 0$ donné un N tel que pour tous les $n > N$ on ait $|\frac{n+1}{3n-5} - \frac{1}{3}| < \epsilon$.

Exercice 126 *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+4}=0$.

Exercice 127 *Soit* $a\in\mathbb{R}$, *avec* $0\leq a<1$. *Montrer que la suite* $u_n=a^n$ *est positive décroissante, et donc qu'elle converge vers une limite* $\alpha\geq 0$. *Montrer qu'en fait* $\alpha=0$. *Que se passe-t-il pour la convergence de* u_n *lorsque* $-1<a<0$ *? lorsque* $a=1$ *? lorsque* $a=-1$, *lorsque* $|a|>1$ *?*

Exercice 128 *Pour* $x\in\mathbb{R}$ *et* $x\geq 0$, *soit* $u_n(x)=\frac{x^n}{n!}\geq 0$. *Montrer que* $u_n(x)$ *décroit avec* n, *dès que* $n>x$, *et donc que* $u_n(x)$ *une limite quand* n *tend vers l'infini. Montrer que* u_n *tend vers 0 quand* n *tend vers l'infini.*

Exercice 129 *On définit une suite* u_n *par* $u_n=(-1)^n$, *puis une suite* v_n *par* $v_{3q}=1$, $v_{3q+1}=v_{3q+2}=-1$, *puis une suite* w_n *par* $w_0=-1$ *et* $w_n=1$ *dès que* $n\geq 1$. *Montrer que ces trois suites ont le même ensemble de valeurs, mais qu'elles sont différentes, et que seule la troisième est convergente.*

Exercice 130 *On définit la suite* u_n *par* $\begin{cases} u_n=0 & \text{si } n \text{ n'est pas premier} \\ u_n=n & \text{si } n \text{ est premier}\end{cases}$. *Montrer que pour tout entier fixé* $a>1$ *la suite* u_{an} *converge vers 0, mais que la suite* u_n *ne converge vers aucune valeur finie ou non.*

Exercice 131 *Pour tout réel* y *on note* $E(y)$ *le plus grand entier inférieur ou égal à* y, *que l'on appelle la partie entière de* y. *Étudier, pour un réel* x *fixé, la suite* $\frac{1}{n}E(nx)$.

Exercice 132 *Montrer que* $\frac{2n^2+1}{n^2-1}-\frac{n+1}{n-1}i$ *converge vers* $2-i$.

Exercice 133 *Étudier la suite* $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n!}$.

Exercice 134 *Soit* z_n *la suite de complexes définie par la donnée des deux nombres* z_0 *et* z_1, *et par la relation de récurrence :* $z_{n+2}=\frac{1}{2}(z_{n+1}+z_n)$.
1 — Montrer que $|z_{n+2}-z_{n+1}|=\frac{1}{2}|z_{n+1}-z_n|$, *puis* $|z_{n+k}-z_n|\leq\left(\frac{1}{2^{n+k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)|z_1-z_0|$.
2 — Montrer que $\frac{1}{2^{n+k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$, *puis que* z_n *est une suite de Cauchy, et que* z_n *est convergente.*

Exercice 135 — *On considère sur le cercle unité de centre* $O=(0,0)$ *et rayon 1, et les points* $A=(1,0)$, $B=(\cos x,\sin x)$, $C=(1,\tan x)$. *En comparant les aires du triangle* OAB, *du secteur* OAB *et du triangle* OAC, *montrer géométriquement que si* $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ *alors on a* $\sin x<x<\tan x$, *en déduire que* $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$, *puis que* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. *À cette occasion expliquer comment la longueur d'un arc de cercle est définie comme limite de longueurs de lignes polygonales inscrites et circonscrites.*

Exercice 136 — *Montrer que* $\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$, *en déduire* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Exercice 137 *1 — Soit* $u(x)$ *et* $v(x)$ *deux fonctions* n *fois dérivables de* x. *Montrer que le produit* $u(x)v(x)$ *est* n *fois dérivable, de dérivée* n*-ième donnée par*

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

2 — Calculer la dérivée n*-ième de la fonction* $\frac{e^x}{x}$

Exercice 138 *1 — Montrer que la dérivée n-ième de* $\cos kx$ *vaut* $k^n \cos(kx + n\frac{\pi}{2})$*, que la dérivée n-ième de sinkx vaut* $k^n \sin(kx + n\frac{\pi}{2})$.

2 — Soit $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big)$ *un polynôme trigonométrique de Fourier de degré* N*. Calculer sa dérivée n-ième.*

3 — Donner le développement limité de $f(x)$ *en* 0 *à l'ordre* n.

4 — Trouver les équations que les valeurs des coefficients a_0, a_k, b_k *doivent satisfaire pour telles que le développement limité de* $f(x)$ *en* 0 *à l'ordre* n *ait pour partie régulière* $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$*, un polynôme spécifié d'avance.*

5 — Donner effectivement un polynôme trigonométrique $f(x)$ *ayant pour partie régulière de son développement limité en* 0 *à l'ordre* n *exactement le polynôme* x^n.

Exercice 139 *Montrer que* $\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} + x^8 \epsilon(x)$*, avec* $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Exercice 140 *— On suppose que* $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sont deux fonctions continues, qu'elles sont dérivables sur* $]a,b[$*, et que* v' *ne s'annule pas sur* $]a,b[$*. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction* $f = u + \lambda v$*, pour* λ *une constante bien choisie telle que* $f(a) = f(b)$*, montrer qu'il existe un* $c \in]a,b[$ *tel que* $\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$ *(formule des accroissements finis généralisée de Cauchy). En déduire sous les mêmes hypothèses et si, de plus* $u(a) = 0$ *et* $v(a) = 0$*, et si* $\lim_{x\to a^+} \frac{u'(x)}{v'(x)} = l$*, qu'alors* $\lim_{x\to a^+} \frac{u(x)}{v(x)} = l$ *(Règle de De l'Hospital).*

Exercice 141 *— Trouver* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ *en application de la règle de l'Hospital.*

Exercice 142 *— Bien observer que la règle de l'Hospital ne s'applique pas pour calculer* $\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x-1}$*, et donner cette limite. Faire de même pour* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$*. Calculer, en appliquant la règle de l'Hospital,* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Exercice 143 *— Soit, pour un* $a > 0$, $\log_a(x)$ *la fonction réciproque de* $a^x = e^{x \ln a}$*, vérifiant donc* $\log_a(a^x) = x$*. Montrer que* $\log_a'(x) = \frac{1}{(\ln a)x}$*. Déterminer, pour* $a, b > 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+\sin x)}{\sin(\log_b(1+x))}$.

Exercice 144 *— Montrer l'identité* $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - x^n \frac{x}{1-x}$*.Déduire de là, d'une part, pour un* n *fixé, le* développement limité *à l'ordre* n *en* 0 *de la fonction* $\frac{1}{1-x}$*, qui représentera d'autant mieux* $\frac{1}{1-x}$ *que* x *sera proche de* 0*. Déduire de là, d'autre part, le* développement en série *en* 0 *de la fonction* $\frac{1}{1-x}$*, et montrer qu'il converge quand* $n \to \infty$ *vers* $\frac{1}{1-x}$*, si* $|x| < 1$*. Alors pour un tel* x *fixé, il représente d'autant mieux* $\frac{1}{1-x}$ *que* n *est grand. Bien examiner sur cet exemple la différence entre les deux notions de développement en série et de développement limité.*

Exercice 145 *1 — Montrer que si* $x > e^a$ *alors* $\ln x > a$*, et que* $\lim_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$.

2 — Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^x}{x}) = +\infty$.

3 — En posant $y = \ln x$*, montrer que* $x \to +\infty$ *si et seulement si* $y \to +\infty$*, et en déduire que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$.

4 — Montrer en écrivant $\frac{e^x}{x^n} = e^{x(1-n\frac{\ln x}{x})}$ *— que pour tout entier* n *on a* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$.

Exercice 146 *1 — En dérivant l'identité* $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - x^n \frac{x}{1-x}$ *montrer que*

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{x^n}{(1-x)^2}(n(1-x)+1).$$

2 — Donner un développement limité de $\frac{1}{(1-x)^2}$ *en* 0 *à l'ordre* n.
3 — Montrer que si $(u_n) \to +\infty$, $(v_n) \to +\infty$, $(\frac{u_n}{v_n}) \to 0$, *alors* $(u_n - v_n) \to -\infty$. *Puisque* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, *montrer que* $\lim_{n\to\infty}(\ln n - n) = -\infty$, *que* $\lim_{n\to\infty}(ne^{-n}) = 0$. *Montrer que pour* $0 < x < 1$ *on a* $\lim_{n\to\infty}(nx^n) = 0$.
4 — Montrer que, pour $|x| < 1$ *la série* $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}\ldots$ *converge vers* $\frac{1}{(1-x)^2}$.
5 — Montrer encore le résultat de la question 4 en considérant le regroupement infini :

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots = (1+x+x^2+x^3+\ldots)+(x+x^2+x^3+\ldots)+(x^2+x^3+\ldots)+\ldots$$

Exercice 147 — *Montrer directement, en la comparant à une série géométrique, que la série*

$$2\Big(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} + \ldots\Big)$$

converge, et que sa valeur approchée au milliardième près est 1,098612288. Montrer que pour un entier m fixé, la série $2(\frac{1}{1.(2m+1)} + \frac{1}{3.(2m+1)^3} + \frac{1}{5.(2m+1)^5} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} + \ldots)$ *converge. Pour montrer qu'en fait cette dernière série vaut* $\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2m+1}}{1-\frac{1}{2m+1}}\right)$, *établir que la série de Taylor de* $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ *en* 0 *est* $2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots)$, *et que cette série converge pour* $|x| < 1$. *On utilisera les séries pour* $\ln(1+x)$ *et pour* $\ln(1-x)$. *Conclure à nouveau que la première série converge, et qu'elle vaut* $\ln(3)$.

Exercice 148 *1 — On définit* H_n *par récurrence par :* $H_0 = 0$ *et* $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n}$. *Montrer que* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}$. *Montrer que* $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. *En déduire que* $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$.
2 — Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$. *En utilisant l'identité* $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$, *montrer qu'il existe une suite strictement croissante* finie $q_0, \ldots q_m$ *d'entiers tous distincts tels que*

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}.$$

Par exemple montrer que $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{42} + \frac{1}{930}$.
3 — Montrer que $\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{56} + \frac{1}{57} + \frac{1}{72} + \frac{1}{3192}$, *mais aussi que* $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.
4 — Pouvez-vous vérifier que $\frac{467775471291607442087452675062954446130 17}{69720375229712477164533808935312303556800}$ *se décompose sous la forme* $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots \frac{1}{100}$ *? Pouvez-vous trouver d'autres décompositions de ce nombre ?*
5 — Soit $\alpha \in]0,1[$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *Soit* $\alpha_0 = \alpha$ *et* k_0 *le plus petit* k *tel que* $\frac{1}{k} \leq \alpha_0$. *Montrer que* $\alpha_1 := \alpha_0 - \frac{1}{k_0} < \frac{1}{k_0}$, *puis soit* k_1 *le plus petit* k *tel que* $\frac{1}{k} \leq \alpha_1$, *et* $\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{1}{k_1}$, *etc. Montrer que la suite des* k_n *est strictement croissante infinie. Montrer que*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n}\Big).$$

6 — Montrer que si $\alpha \in]0,1[\cap\mathbb{Q}$, *alors le processus décrit en 5 peut s'arrêter au bout d'un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire qu'il peut exister un* N *tel que* $\alpha_N = 0$.
7 — Montrer que si $\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \cdots + \frac{1}{m_n}\right)$, *pour une suite strictement croissante* infinie m_n, α *n'est pas forcément irrationnel.*
8 — L'arrêt possible indiqué en 6 est-il assuré ?

Exercice 149 *1 — Pour tout* $x, h \in \mathbb{R}$, *démontrer par récurrence sur l'entier* $n > 0$ *la formule du binôme :*

$$(x+h)^n = x^n + \binom{1}{n}x^{n-1}h + \binom{2}{n}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{k}{n}x^{n-k}h^k + \cdots + \binom{n-1}{n}xh^{n-1} + h^n.$$

Préciser alors ce que sont les coefficients $\binom{k}{n}$.
2 — Montrer que, pour tout entier $n > 0$ *on a*

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + h\Big(\binom{2}{n}x^{n-2} + \cdots + \binom{k}{n}x^{n-k}h^{k-2} + \cdots + + \binom{n-1}{n}xh^{n-1} + h^{n-2}\Big).$$

En déduire que, pour tout entier $n > 0$, *on a* $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$.
3 — Montrer que, pour entier $n > 0$ *la fonction* $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ *est continue et dérivable, indéfiniment.*
4 — Écrire la formule de Taylor à l'ordre n pour la fonction x^n, *et constater ainsi que la formule du binôme est un cas particulier de la formule de Taylor.*

Exercice 150 *1 — On définit* e_n *par récurrence par* $e_0 = 1$ *et* $e_{n+1} = e_n + \frac{1}{n!}$. *Montrer que la suite* e_n *est croissante, et que la suite* f_n *définie par* $f_n = e_n + \frac{1}{n!}$ *est décroissante.*
2 — Montrer que $\lim_{n\to\infty}(f_n - e_n) = 0$. *En déduire que* e_n *a une limite finie e quand n tend vers l'infini. Montrer que* e_n *approxime e avec une erreur inférieure à* $\frac{1}{n!}$. *Montrer que* $e = 2,718\ldots$.

Exercice 151 *1 — On considère la suite* u_n *définie par récurrence par les conditions :* $u_1 = 1$ *et* $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. *Montrer que la fonction* $1 + \frac{1}{x}$ *est continue, et en déduire que si la suite* u_n *converge, alors la limite est* $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2 — Montrer que $(u_n - l)(u_{n-1} - l) < 0$, *que la suite* u_{2p+1} *est croissante, que la suite* u_{2p} *est décroissante. Montrer que tous les* u_n *sont* > 1, *que* $|u_n - l| < \frac{1}{l}|u_{n-1} - l|$, *puis que* $|u_n - l| < \frac{1}{l^{n-1}}|1 - l|$, *et donc que* u_n *tend vers* l.

Exercice 152 *— Étudier la continuité et la dérivabilité de* $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$. *Montrer notamment qu'en* 0 *il y a une dérivée à gauche, une dérivée à droite, mais pas de dérivée. Étudier de même la courbe* $y = |2x - 1| + 2|x| - 1$.

Exercice 153 *Pour les fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, la dérivée, montrer qu'il existe une fonction réciproque dont on précisera le domaine de définition, et calculer une expression de la fonction réciproque et de sa dérivée :*

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x+3}, \quad , h(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

Exercice 154 *1 — Construire la courbe représentative de la fonction* $y = (x-1)^2(x-2)^3$.
2 — Construire la courbe représentative de la fonction $y = |x-1|\sqrt{|x-2|^3}$.

Exercice 155 *étudier la fonction* $f(x) = e^{-x^2}$, *et tracer la courbe.*

Exercice 156 *Soit* $f(x) = \sin x + \cos x$. *Montrer qu'au point* $\frac{\pi}{4}$ *la fonction* f *atteint son maximum* $\sqrt{2}$, *et au point* $\frac{5\pi}{4}$ *son minimum* $-\sqrt{2}$.

Exercice 157 *Soit* $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$. *Montrer que sa dérivée vaut* $f'(x) = \frac{5}{3}\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$, *qu'elle est nulle pour* $x = \frac{2}{5}$ *et devient infinie quand x se rapproche de 0. Pour x voisin de* 0, *f'(x) est positive si* $x > 0$ *et négative si* $x > 0$. *Montrer que* f *atteint un maximum local* 0 *au point* 0. *Montrer que* f *atteint un minimum local au point* $\frac{2}{5}$.

Exercice 158 *1 — Déterminer le domaine de définition de la fonction* $f(x) = x^3 + \ln x$.
2 — Calculer la dérivée f'(x).
3 — Démontrer que f *admet une fonction réciproque* g *dont on précisera le domaine de définition.*
4 — Calculer $g(1)$ *et* $g'(1)$.
5 — Calculer $g(e^3+1)$ *et* $g'(e^3+1)$.

Exercice 159 — *Pour* $a < m < b \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, *soit* $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}h & si\ a \leq x \leq m \\ \frac{x-b}{m-b}h & si\ m \leq x \leq b \\ 0 & si\ b \leq x. \end{cases}$.
1 — Étudier la continuité et la dérivabilité de f *sur* $\mathbb{R}$. *Dessiner le graphe de* f.
2 — Notons plus précisément la fonction f *par* $c_{a;(m,h);b}$ *et appelons une telle fonction un* chapeau. *Dessiner les fonctions* $c_{0;(1,1);3} + c_{0;(2,1);3}$, $c_{0;(1,1);3} + c_{0;(2,-1);3} + c_{0;(\frac{3}{2},3);3}$.
3 — Quelles sont les fonctions qui peuvent s'écrire comme somme finie de chapeaux, c'est-à-dire comme somme de fonctions du type $c_{a;(m,h);b}$ *?*

Exercice 160 — *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Étudier la fonction* $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ *sur* $[-a, +a]$.

Exercice 161 — *Soit* $A, B \in \mathbb{R}$, *et soit* $f(x) = \begin{cases} -2\sin x & si\ x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B & si\ \text{-}\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & si\ \frac{\pi}{2} \leq x. \end{cases}$, *définissant ainsi par cas une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Déterminer* A *et* B *pour que* f *soit continue, et déterminer dans ce cas si* f *est dérivable. Tracer alors son graphe.*

Exercice 162 — *Trouver les limites* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$.

Exercice 163 *Montrer que* $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}$, *et en déduire que* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

Exercice 164 *Calculer* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 165 *Calculer* $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Exercice 166 *Soit* $f(x) = \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$. *Montrer en utilisant le développement de Taylor à l'ordre* 5 *de* $\cos x$, *soit la formule* $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\sin c_x}{120}x^5$, *avec* $0 < c_x < x$, *que* $f(x) = \frac{1}{12} - \frac{\sin c_x}{60}x$. *En déduire la valeur de* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 167 — *Les fonctions réciproques de* sin, cos, tan *sont* arcsin, arccos, arctan. *Précisez leurs domaines, leurs définitions, leurs dérivées.*

Exercice 168 *On considère la fonction bijective croissante* $\arctan x$, *définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, *déterminée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\ \big(\arctan x = y \Leftrightarrow x = \tan y\big).$$

Montrer que le développement limité à l'ordre $2n+1$ *en* 0 *de* $\arctan x$ *admet pour partie régulière*

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exercice 169 *1 — Établir les formules suivantes :*
1 — $\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}$. *En 1755 Euler a utilisé cette formule et pour* $\arctan x$ *la série qu'il démontre* $\arctan x = \frac{x}{1+x^2}\Big(1 + \frac{2}{3}\big(\frac{x^2}{1+x^2}\big) + \frac{2.4}{3.5}\big(\frac{x^2}{1+x^2}\big)^2 + \dots\Big)$ *pour calculer les 20 premières décimales de* π *en une heure.*
2 — $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$. *Avec cette formule de Hutton (1776), Vega en 1789 a calculé 143 décimales de* π *(126 correctes).*
3 — $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. *Avec cette formule de Hutton (1776), Lehmann en 1853 a calculé 261 décimales de* π.

Exercice 170 *Établir la formule de John Machin :*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

En utilisant la formule de Gregory $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$, *valide pour* $|x| < 1$, *Machin en 1706 a calculé les 100 premières décimales de* π.

Exercice 171 — *Déterminer la limite* $\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

Exercice 172 — *Déterminer, si elles existent, les limites* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$, $\lim_{x \to 1} \frac{\ln \cos^2(x-1)}{(x-1)^3}$, $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \ln x$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 173 — *Calculer les dérivées de* $y = \frac{x+1}{x-1}$, $y = \frac{2}{x^3-2}$, $y = \frac{\tan x}{x}$, $y = \sin \frac{1}{x}$, $y = \sin^2(\cos 3x)$, $y = x^2 \ln x$, $y = \log_{10}(\sin x)$.

Exercice 174 — *Écrire la formule de Taylor pour* $\cos x$ *en* 0. *Montrer, en utilisant la règle de L'hospital, qu'il existe des fonctions* $\epsilon_k(x)$, *avec* $k = 2, 4, 6$, *etc., telles que* $\lim_{x \to 0} \epsilon_k(x) = 0$ *et que* $\cos x = (1 - \frac{x^2}{2}) + x^2 \epsilon_2(x)$, $\cos x = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + x^4 \epsilon_4(x)$, $\cos x = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}) + x^6 \epsilon_6(x)$, *etc. Montrer que pour* x *fixé,* $\lim_{k \to \infty} \epsilon_k(x) = 0$.

Exercice 175 — *1 — Soit* $y = \sin(n \arcsin x)$. *En calculant* y*' et* y'', *montrer que l'on a* $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.
2 — En dérivant les deux membres de $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, *obtenir* y''' *et* y'''', *et la formule de Taylor pour* y *à l'ordre 4 au point* 0.

Exercice 176 — *Soit* $y = (x^2 - 1)^n$. *Établir* $(x^2 - 1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0$.

Exercice 177 — *1 — Montrer que* $y = e^x \sin x$ *vérifie* $y'' - 2y' + 2y = 0$.
2 — En déduire $y''' - 2y' + 4y = 0$, *puis* $y^{(4)} + 4y = 0$, *et expliciter la formule de Taylor à l'ordre* n *pour* y.

Exercice 178 — *1 —- Soit* $y = A \sin(\omega t + \omega_0) + B \cos(\omega t + \omega_0)$. *Montrer que* $\frac{d^2 y}{dt^2} = \omega^2 y$.
2 — Donner le développement limité en 0 *de* y *à l'ordre* n.

Exercice 179 — *1 — Montrer que si* $y = \sin^2 x$ *alors* $y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\big(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\big)$.
2 — Déduire de la question 1 le développement limité de $\sin^2 x$ *en* 0 *à l'ordre* n.
3 — Trouver le dúveloppement limité de $\sin^2 x$ *en* 0 *à l'ordre* n *en élevant au carré celui de* $\sin x$.
4 — Montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 + \frac{x^4}{3}}{x^6} = \frac{4}{45}$ *et que* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 - \frac{x^4}{2}}{x^6} = -\infty$.

Exercice 180 — *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ est $(-1)^n \frac{a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$. En déduire le développement de Taylor à l'ordre n de cette fonction $f(x)$ en 0.*

Exercice 181 — *Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0. \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la valeur de $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$, que f est dérivable en 0, puis que f est dérivable partout, et que sa dérivée f' est continue. Montrer que si $x \neq 0$ on a, pour tout n, $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ avec P_n un polynôme de degré $3n$. Montrer que f est indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout n on a $f^{(n)}(0) = 0$. Écrire le développement limité de $f(x)$ au voisinage du point $x = 0$ à l'ordre n. En déduire que si $x \neq 0$ alors $f(x)$ n'est pas égale à la valeur en x de la somme de sa série de Taylor en 0. Dessiner f au voisinage de 0, puis dessiner f en entier.*

Exercice 182 — *Soit $f(x) = x \arccos x$. Calculer $f(0)$, $f'(0)$, et $f^{(p)}(0)$ pour p le plus petit k entier supérieur à 2 tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. En déduire la position du graphe de f au voisinage de 0 par rapport à sa tangente en 0. Étudier la courbe $y = f(x)$.*

Exercice 183 — *Soit $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Montrer que cette expression définie une fonction bijective $f : \mathbb{R} \to]-1, +1[$. On considère la fonction réciproque $g :]-1, +1[\to \mathbb{R}$. Montrer que g est dérivable, de dérivée $g'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. En déduire que $g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$.*

Exercice 184 — *Développer le polynôme $p(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ en puissances de $x - 4$ par identification en écrivant $p(x) = a + b(x-4) + c(x-4)^2 + d(x-4)^3 + e(x-4)^4$. Obtenir à nouveau le résultat par substitution de $(x-4)+4$ à x dans $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$. Obtenir encore le résultat en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 4 au voisinage de 4. À partir du développement limité $p(x) = a + b(x-4) + c(x-4)^2 + (x-4)^2\epsilon(x-4)$, montrer que la valeur de p en $x = 4$ est a, que la valeur de la dérivée de p en $x = 4$ est b, que l'équation de la tangente T en 4 à la courbe d'équation $y = p(x)$ est la droite $y = a + b(x-4)$, et que l'écart en ordonné entre un point $(x, p(x))$ sur la courbe et le point de même abscisse (x, y) sur T vaut $c(x-4)^2 + (x-4)^2\epsilon(x-4)$. Constater que, puisque $c > 0$, la courbe $y = p(x)$ est, au voisinage du point $x = 4$, au-dessus de sa tangente au point $x = 4$.*

Exercice 185 — *Développements limités en 0 à l'ordre n de e^x, de xe^x, de x^2e^x, de x^ke^x.*

Exercice 186 — *Montrer que le développement limité en 4 à l'ordre n de $\sqrt{x}$ est*

$$2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^4}{512} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!(x-4)^n}{n!(n-1)!2^{4n-2}} + (x-4)^n\epsilon(x-4).$$

Exercice 187 *1 — Former le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $\sqrt{1+x}$.*
2 — Soit $\phi(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$. Montrer que pour $x > 0$ assez petit on a $\phi(x) > 0$.
3 — Montrer que pour tout entier n il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout x tel que $0 < x < \alpha$ on ait $\phi(x) < x^3(\frac{1}{16} + \frac{1}{16n})$, soit $\phi(x) < \frac{x^2}{16}x(\frac{n+1}{n})$.
En déduire que, pour tout $x > 0$ assez petit (à savoir pour $x < \inf(\alpha, \frac{n}{n+1})$) on a

$$0 < \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} < \frac{x^2}{16}.$$

Exercice 188 *Montrer que la partie régulière du développement limité à l'ordre* 4 *en* 0 *de* $f(x) = e^{\cos x - 1}$ *est* $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}$*, de sorte que*

$$e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + x^4\epsilon(x), \ \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Exercice 189 *1 — Trouver le développement limité d'ordre* 5 *en* 0 *de* $\mathrm{Th}\, x$*, qui vaut* $\mathrm{Th}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon(x)$*, avec* $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$*, par la formule de Taylor.*

2 — Retrouver le résultat de la question 1 — en divisant $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ *par* $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$*.*

Exercice 190 *1 — La* partie principale *en* 0 *de* $f(x)$ *est, s'il existe, l'unique monôme* ax^k *avec* $a \neq 0$ *tel que* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{ax^k} = 1$*. Montrer qu'effectivement si un tel monôme existe il est bien unique. Si* $k \geq 1$*,* k *est appelé l'ordre de l'infiniement petit* $f(x)$*. On pose* $ax^k = pp_0(f)$*.*

2 — Trouver l'ordre et la partie principale de $y = 1 - \cos x + \ln\cos x$ *lorsque* $x \to 0$*.*

3 — Donner un exemple d'une fonction $f(x)$ *qui tend vers* 0 *quand* x *tend vers* 0*, mais qui n'admet pas de partie principale en* 0*.*

Exercice 191 *1 — Expliquer la division des polynômes suivant les puissances croissantes.*

2 — En divisant suivant les puissances croissantes les parties régulières des développements limités en 0 *de* $\sin x$ *et de* $\cos x$ *à l'ordre* 3*, trouver le développement limité en* 0 *de* $\tan x$ *àz l'ordre* 3*..*

3 — Trouver le développement limité en 0 *de* $\tan x$ *à l'ordre* 3 *en utilisant la formule de Taylor.*

4 — Soit $f(x) = \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$*. En utilisant les développements limités au point 0 à l'ordre* 3 *de* $\cos x$*, de* $\sin x$*, de* $\tan x$*, montrer que* $f(x) = \frac{-\frac{7}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)}{-\frac{1}{6}x^3 + x^3\eta(x)}$*, avec* $\epsilon(x)$ *et* $\eta(x)$ *qui tendent vers 0 avec x. En déduire que* $\lim_{x\to 0} f(x) = 7$*.*

5 — Calculer le développement limité à l'ordre 3 *en* 0 *de la fonction* $f(x)$*.*

Exercice 192 *— Pour lever l'indétermination* $\frac{0}{0}$ *de* $\frac{u(x)}{v(x)}$ *en a on remplace u et v par leurs parties principales, c'est-à-dire par le premier monôme non identiquement nul dans leur développements limités en a. Par exemple montrer que* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{e^{3x} - 1 - 3x} = \frac{4}{9}$*. Montrer en revanche que ce procédé ne permet pas de trouver* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)} = 1$ *pour* f *la fonction* $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \end{cases}$*.*

Exercice 193 *Trouver les parties principales des infiniments petits suivants lorsque* x *tend vers 0 :*

$$\mathrm{Ch}\, x - \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2}, \ \ \mathrm{Sh}(\sin x) - \sin(\mathrm{Sh}\, x), \ \ \mathrm{ArgSh}(\sin x) - \arcsin(\mathrm{Sh}\, x).$$

Exercice 194 *Trouver la partie principale lorsque* n *devient infini de* $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$*.*

Exercice 195 *— Montrer que pour* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *on a* $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$*. En déduire que si* $|x| < \sqrt{2\epsilon}$ *alors* $|1 - \frac{\sin x}{x}| < \epsilon$*.*

Exercice 196 — *Soit $f(x)$ telle que $f(0) = 0$. Supposant donné le développement limité de $f(x)$ en 0, soit $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$, déterminer le développement limité en 0 de la fonction $g(x) = e^{f(x)}$, soit $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n\eta(x)$, en explicitant les relations de récurrences entre les coefficients b_j et les coefficients a_i.*

Exercice 197 — *Si $u < v$ et m, n sont fixés,* $f(x) = \begin{cases} m & \text{si } x \leq u \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{si } u < x < v \\ n & \text{si } v \leq x \end{cases}$
définit par cas une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Déterminer a, b, c, d pour que f soit continue et dérivable. Tracer alors son graphe. Combien de fois cette fonction est-elle dérivable ?

Exercice 198 — *En utilisant $e^{-\frac{1}{x^2}}$, déterminer l'expression $t(x)$ pour que*

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{si } x \leq u \\ t(x) & \text{si } u < x < v \\ n & \text{si } v \leq x. \end{cases}$$

soit une fonction continue et indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, ayant notamment toutes ses dérivées nulles en u et en v.

Exercice 199 — *Avec* $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, *et* $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, *montrer que* $\cosh'(x) = \sinh(x)$ *et* $\sinh'(x) = \cosh(x)$. *Dessiner les graphes de ces trois fonctions qui sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elles sont aussi notées* $\mathrm{Ch}\, x$, *Shx, Thx. Montrer notamment que* $\cosh$ *est strictement croissante sur* $[0, +\infty[$ *et détermine une bijection* $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$, *que* $\sinh$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et détermine une bijection* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *et que* $\tanh$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et détermine une bijection* $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, +1[$. *On détermine les fonctions réciproques de ces trois fonctions, soit*

$$\cosh^{-1} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[, \quad \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tanh^{-1} :]-1, +1[\to \mathbb{R}.$$

Ces fonctions sont aussi notées $\mathrm{ArgCh}\, x$, $\mathrm{ArgSh}\, x$, $\mathrm{ArgTh}\, x$. *Montrer, en comparant les valeurs en un point et les fonctions dérivées, que l'on a* $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, *que* $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, *que* $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$. *Calculer le développement limité de la dernière en 0 à l'ordre 4.*

Exercice 200 *Simplifier* $\mathrm{ArgTh} \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\, x-1}{\mathrm{Ch}\, x+1}}$.

Exercice 201 *Variation et représentation graphique de la fonction* $y = \cosh 3x - 3chx$.

Exercice 202 *Calculer la limite* $\lim_{x \to +\infty} \frac{Ch^2 x}{\ln x}$.

Exercice 203 *Calculer la limite* $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{ArgSh}\, x}{x}$.

Exercice 204 — *On considère les fonctions*

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1, +1], \quad \cos : [0, +\pi] \to [-1, +1], \quad \tan : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1, +1].$$

Montrer qu'elles sont continues strictement croissantes dérivables, qu'elles admettent donc des fonctions réciproques strictement croissantes dérivables notées

$$\arcsin : [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], \; \arccos : [-1, +1] \to [0, +\pi], \; \arctan : [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}].$$

Exercice 205 *1 — Étudier f définie pour $x \neq 0$ par* $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

2 — Étudier la fonction g définie par $g(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Exercice 206 *1 — Calculer la limite* $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$.

2 — On pose $\phi(u) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2(ux)}{x^2 \sin^2 x}$. Calculer $\phi(1)$. La fonction ϕ est-elle définie au voisinage de 1 ? Est-elle continue en 1 ? Est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 207 — *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $0 < g < f$, c'est-à-dire que $\forall x \in [a, b]\big(0 < g(x) < f(x)\big)$. Montrer qu'il existe un réel $k > 1$ tel que $kg \leq f$, c'est-à-dire tel que $\forall x \in [a, b]\big(kg(x) \leq f(x)\big)$.*

Exercice 208 — *Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues, $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que $\forall \lambda > 0\, \exists x \in [0, 1]\big(f(x) = \lambda g(x)\big)$.*

Exercice 209 — *Calculer* $\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$.

Exercice 210 — *Écrire la formule de Taylor au voisinage de 0 à l'ordre n pour la fonction* $\sin(x + \frac{\pi}{4})$.

Exercice 211 — *Calculer la limite* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\cosh x)}{\ln x}$.

Exercice 212 — *Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction* $\cosh^3 x$.

Exercice 213 — *Montrer que* $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$ *définit sur $]-1, +\infty[$ une fonction $f$qui est deux fois continûment dérivable. Est-elle trois fois dérivable ?*

Exercice 214 — *Montrer que pour tout $x > 0$ on a* $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$.

Exercice 215 — *Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a* $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n + 1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 216 *1 — Montrer que $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$, est définie pour $x \leq 0$ et pour $x > 1$.*

2 — Calculer $f'(x)$, et montrer que son signe est celui de $x - \frac{3}{2}$.

3 — Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4 — Montrer que $x = 1$, $y = x + \frac{1}{2}$, et $y = -x - \frac{1}{2}$ sont sdes asymptotes de la courbe $y = f(x)$. Précisez la position de $y = f(x)$ par rapport à ses asymptotes.

5 — Dessiner $y = f(x)$.

Exercice 217 *1 — Soit $y = f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Calculer y', le tableau de variation de y.*

2 — Déterminer les demi-tangentes à droite et à gauche au point $(0, 0)$.

3 — Montrer que $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ est une asymptote.

4 — Dessiner $y = f(x)$.

Exercice 218 *1 — Soit* $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$*. Préciser le domaine de définition de* f*. Montrer que, dans le domaine de définition de* f*, on a* $f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$ *et* $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$*.*

2 — Montrer que $y = f(x)$ *admet* $x = 1$ *pour asymptote verticale et* $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ *pour asymptote oblique.*

3 — Dessiner la courbe $y = f(x)$*.*

Exercice 219 *1 — Un cercle de rayon* R *roule sans glisser sur l'axe* $x'0x$*, à une vitesse uniforme, et* F *un point fixe de ce cercle est, à l'instant* $t = 0$ *au point* $M(0) = (0,0)$*, au contact en* $K(0) = (0,0)$ *de l'axe, le centre du cercle étant en* $C(0) = (0,R)$*. À l'instant* $t > 0$ *le cercle a tourné sur lui-même d'un angle de* t *radians, le nouveau point de contact est* $K(t) = (Rt, 0)$ *tandis que son centre s'est déplacé vers la droite jusqu'à la position* (Rt, R)*. Montrer qu'alors le point* F *a atteint la position*

$$M(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)).$$

2 — Montrer que l'on a les développements limités en $t = 0$ *d'ordre 3 :* $R(t - \sin t) = Rt^3 + t^3\epsilon_1(t)$*,* $R(1 - \cos t) = \frac{R}{2}t^2 + t^3\epsilon_2(t)$*, et en déduire le développement limité de* $M(t)$ *:*

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^3}{6} + t^3\vec{\epsilon}(t).$$

3 — Montrer qu'en $t = 0$ *la courbe partamétrée* $M(t)$ *admet un point de rebroussement, à tangente verticale. Dessiner la courbe au voisinage de* $t = 0$*.*

4 — Dessiner en entier la courbe $M(t)$*, appelée* cycloïde.

Exercice 220 *On pose* $x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, y(t) = t^2 + \frac{2}{t-2}$*. Étudier la forme de la courbe au voisinage du point de paramètre* $t = 1$*.*

Exercice 221 *1 —On considère la courbe plane paramétrée*

$$M(t) = \Big(x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{(t-2)^2}{t^2-1}\Big).$$

Montrer qu'elle admet $y = 1$ *pour asymptote pour* t *au voisinage de* $+\infty$ *et de* $-\infty$*, et* $x = -\frac{1}{2}$ *pour* t *au voisinage de* -1*.*

2 — Montrer que la droite $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{2}$ *est une asymptote oblique pour* t *au voisiinage de* $+1$*.*

3 — Montrer que le point $M(2)$ *est un point de rebroussement de première espèce. Montrer que la pente au point* $M(2)$ *est* $\frac{1}{3}$*. Dessiner la courbe.*

Exercice 222 *On considère la* cardioïde *d'équation polaire* $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$*. Quelle est la nature du point 0 ? Dessiner la courbe.*

Exercice 223 *Déterminer les points multiples de la courbe* $M(t) = (t^2 - 2t, t^2 + t^{-2})$*.*

Exercice 224 *Trouver le centre de symétrie de la courbe d'équations* $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$*,* $y(t) = 2t^3 - 6t^2 + 13t + 11$*.*

Exercice 225 *1 — Soit* $u_n = \frac{n}{2^n}$*. Montrer que* u_n*, pour* $n > 0$*, est une suite décroissante minorée par* 0*. Montrer que* u_n *admet une limite* $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \lambda \geq 0$*.*

2 — Montrer que pour $n > 5$ *on a* $u_n < \frac{1}{n}$*. Montrer que* $\lim_{n\to\infty}(u_n) = 0$*.*

3 — On sait que $e = 2,718...$*. Montrer que* $\ln 2 > \frac{1}{2}$*.*

4 — Soit $f(x) = \frac{2^x}{x}$*. Montrer que* $f(x)$ *est une fonction strictement croissante sur* $[2, +\infty[$*.*

5 — Déduire de 2 et de 3 que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$*.*

Exercice 226 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$, et admettant une dérivée en tout point de $]0,1[$. En appliquant le lemme de Rolle à la fonction $f(x)+kx^2$, avec le nombre k bien choisi, montrer qu'il existe un $c \in]0,1[$ tel que $f(1) = \frac{f'(c)}{2c}$.*

Exercice 227 *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, et soit les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par cas :*

$$f(x) = \begin{cases} -x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ bx + c \ \ si \ \ 0 < x \leq 1 \\ 1 + 5(x-1) \ \ si \ \ 1 < x \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} -x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c \ \ si \ \ 0 < x \leq 1 \\ 1 + 5(x-1) \ \ si \ \ 1 < x \end{cases} .$$

1 — Déterminer b et c de sorte que f soit continue partout sur $\mathbb{R}$, et pour les valeurs ainsi trouvées déterminer les points où f est dérivable.

2 — Peut-on trouver a, b et c tels que g soit continue et dérivable partout ?

Exercice 228 *1 — Appliquer la formule de Taylor pour montrer que la partie régulière du développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x}$ est $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$.*

2 — Donner le développement limité de $\sqrt{1+\sin x}$ en 0 à l'ordre 3.

3 — Trouver $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+x}}{x^3}$.

Exercice 229 *Soit $a, b, c, p \in \mathbb{R}$, et soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par cas :*

$$h(x) = \begin{cases} -x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c \ \ si \ \ 0 < x \leq 1 \\ 1 + p(x-1) \ \ si \ \ 1 < x \end{cases} .$$

Peut-on trouver a, b, c et p tels que h soit continue et dérivable partout ?

Exercice 230 *1 — En appliquant la formule de Taylor donner le développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 5 de $\sqrt[3]{1+x}$.*

2 — Donner le développement limité de $\sqrt[3]{1+\sin x}$ en 0 à l'ordre 5.

3 — Déterminer la partie principale αx^k de $\sqrt[3]{1+\sin x} - \sqrt[3]{1+x}$.

Exercice 231 *1 — Montrer par récurrences que $2n+1 < n^2$ pour n assez grand, que $n^3 < 2^n$ pour n assez grand.*

2 — Soit $u_n = \frac{n^2}{2^n}$. Montrer que, pour n assez grand, u_n est une suite décroissante minorée par 0. Montrer que u_n admet une limite $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \lambda \geq 0$.

3 — Montrer que pour n assez grand on a $u_n < \frac{1}{n}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}(u_n) = 0$.

4 — Soit $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$. Déterminer une valeur A telle que $f(x)$ soit une fonction strictement croissante sur $[A, +\infty[$.

5 — Déduire de 3 et de 4 que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty$.

Exercice 232 *1 — Énoncer le théorème des accroissements finis pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

2 — Soit p un entier, et $f : [p, p+1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$. En appliquant le théorème des accroisssements finis à f, montrer que, pour tout entier p

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p}.$$

3 — Soit n et k deux entiers fixés. En appliquant le résultat de 2 pour toutes les valeurs de p de $p = n$ jusqu'à $p = kn$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} \leq \ln(kn) - \ln n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{kn-1}.$$

4 — Soit k un entier fixé, supérieur à 2. Pour $n \geq 1$ on pose

$$u_n(k) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}.$$

Montrer que, pour k fixé, $(u_n(k))$ est croissante avec n, majorée par $k-1$, et donc convergente.

5 — Montrer que

$$u_n(k) \leq \ln k \leq u_n(k) + \frac{1}{n} - \frac{1}{kn}.$$

6 — Montrer que $\lim_{n\to\infty}(u_n(k)) = \ln k$.

7 — Montrer en prenanr $k = 2$ et $n = 6$ que $0,653 < \ln 2 < 0,737$.

8 — Montrer que $\alpha := \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots \frac{1}{100}$ diffère de $\ln 2$ de moins de un centième.

9 — Montrer que $\alpha = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots \frac{1}{100} = \frac{46777547129160744208745267506295444613017}{69720375229712477164533808935312303556800}$. En déduire que $0,6709308 < \frac{4677754712}{6972037523} < \alpha < \frac{4677754713}{6972037522} < 0,6709309$, et $0,660 < \ln 2 < 0,681$.

Exercice 233 *1 — Soit p un entier, et $u > 0$, soit $f : [p, p+u] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$. En appliquant le théorème des accroisssements finis à f, montrer que,*

$$\frac{u}{p+u} \leq \ln(p+u) - \ln p \leq \frac{u}{p}.$$

2 — Montrer que $e^{\frac{u}{1+\frac{u}{p}}} \leq \left(1 + \frac{u}{p}\right)^p \leq e^u$, et en déduire que $\lim_{p\to\infty} \left(1 + \frac{u}{p}\right)^p = e^u$.

Exercice 234 *Soit $f : [-1, +1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & si\ \ x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & si\ \ x \in [-1, +1], \setminus\{0\} \end{cases}$. Montrer que f est continûment dérivable sur $]-1, +1[$.*

Exercice 235 *1 — Soit $f(x) = \ln(\ln x)$. En appliquant la formule des accroissements finis entre p et $p+1$, montrer qu'il existe A tel que pour $p > A$ on a*

$$\frac{1}{p \ln p} \leq \ln\ln(p+1) - \ln\ln p \leq \frac{1}{(p+1)\ln(p+1)}.$$

2 — En déduire que pour $p > A$ et tout N on a

$$\frac{1}{(p+1)\ln(p+1)} + \frac{1}{(p+2)\ln(p+2)} + \cdots + \frac{1}{(p+N)\ln(p+N)} \geq \ln\ln(p+N) - \ln\ln p.$$

3 — Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$ diverge.

Exercice 236 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit α et β les deux racines de l'équation*

$$x^2 - 2\lambda x + 1 = 0.$$

Calculer, en fonction de α et β les coefficients de la série de Taylor au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2-2\lambda x+1}$.

Exercice 237 *Soit N un entier fixé. Montrer que* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[N]{1+\sin x} - \sqrt[N]{1+x}}{x^3} = -\frac{1}{6N}$.

Exercice 238 *Exprimer sous la forme $a+bi$, avec $a,b \in \mathbb{R}$, les racines z_1 et z_2 de l'équation*

$$2z^2 + i\sqrt{2}\, z + 2i + 1 = 0.$$

Exercice 239 *Trouver la solution générale dans $\mathbb{R}^4$ du système d'équations :*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 3x_4 & = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 7x_4 & = 0 \end{cases}$$

On donnera la forme matricielle du système ainsi que la structure de l'ensemble des solutions.

Exercice 240 *1 — Soit A la matrice définie par*

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 1 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer A^{-1}.
2 — Soient $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (5,7,7)$ et $u_3 = (8,4,4)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que u_1, u_2 et u_3 sont linéairement indépendants. Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3 — Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et v un vecteur de coordonnées a, b et c dans la base canonique, autrement dit $v = (a,b,c)$.
Exprimer les coordonnées x, y et z de v relativement aux vecteurs u_1, u_2, u_3.

Exercice 241 *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{\sin x - x}{\tan x - x} + \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x} \Big).$$

Exercice 242 *Calculer le développement limité de*

$$f(x) = e^x \cos x \sin x + \sin x \ln(1+x)$$

à l'ordre 3 en 0.

Exercice 243 *1 — Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 9 & 12 & -3 \\ -12 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe un $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que*

$$MX = \lambda X, \quad X \neq 0.$$

On trouvera trois valeurs $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

2 — Pour chaque valeur $\lambda_i, i = 1,2,3$, trouver un vecteur $e_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ a_{3,i} \end{pmatrix}$ solution non nulle de $MX = \lambda_i X$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que la matrice $P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ est inversible. Calculer P^{-1}.

3 — Calculer PMP^{-1} *et* $P^{-1}MP$.

4 — Calculer M^{100}.

5 — Calculer $\exp M = I_3 + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{6}M^3 + \frac{1}{24}M^4 + \dots$.

6 — Calculer $\exp(tM) = I_3 + tM + \frac{1}{2}t^2M^2 + \frac{1}{6}t^3M^3 + \frac{1}{24}t^4M^4 + \dots$.

7 — En dérivant $\exp(tM)$ *trouver tous les systèmes de trois fonctions* $x(t)$, $y(t)$ *et* $z(t)$ *telles que*

$$\begin{cases} x'(t) &= -2x(t) \\ y'(t) &= 9x(t) + 12y(t) - 3z(t) \\ z'(t) &= -12x(t) + 8y(t) - 2z(t) \end{cases}$$