Université Denis Diderot Paris 7 (Semestre septembre 2008 - décembre 2008)

Cours de Mathématiques MP1

Licence, première année, groupes A1, B1, B2, B3, D1

Un CORRIGÉ du PARTIEL du 22 novembre

Exercice n° 1 – Nombres complexes (8 points)

Première partie.
On note $j = \exp(2\pi i/3)$ (en particulier j est un nombre complexe tel que $j^2 + j + 1 = 0$).

a) *Calculer les parties réelle et imaginaires des solutions de l'équation :*

$$z^2 - 2iz + j = 0.$$

On calcule $\Delta = (-2i)^2 - 4j = -4 - 4j = 4j^2$ d'où les deux racines $z_1 = \frac{2i+2j}{2} = -\frac{1}{2} + i(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $z_2 = \frac{2i-2j}{2} = \frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

b) *Montrer que tout nombre complexe solution de*

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \qquad (*)$$

est aussi solution de $z^4 = 1$ et en déduire les trois solutions de $(*)$.

On observe que $(z^3+z^2+z+1)(1-z) = 1-z^4$ donc $z^3+z^2+z+1 = 0$ équivaut à $z^4-1 = 0$ ET $z \neq 1$. Les solutions de $z^4 - 1 = 0$ sont les racines 4-èmes de l'unité c'est-à-dire $\pm 1, \pm i$ et les solutions de $(*)$ sont donc -1, i et $-i$.

c) *Si $w = \frac{z+1}{z-1}$, exprimer z en terme de w. En déduire les parties réelle et imaginaire ainsi que le module et un argument de chaque solution dans $\mathbf{C}$ de l'équation :*

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right) + 1 = 0.$$

Un petit calcul montre que si $z \neq 1$ et $w \neq 1$ on a:

$$w = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow wz - w = z + 1 \Leftrightarrow z(w-1) = 1 + w \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{w-1}.$$

La valeur $w = -1$ correspond donc à $z = 0$; La valeur $w = i$ correspond donc à $z = \frac{1+i}{i-1} = -i$ et la valeur $w = -i$ correspond donc à $z = \frac{1-i}{-i-1} = i$.

Deuxième partie.
On rappelle la formule du binôme de Newton : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ et la formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

d) *Déduire de la formule du binôme la formule (valable pour $z \in \mathbf{C}$) :*

$$nz(1+z)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} z^k$$

[Indication : on pourra utiliser la dérivation ou remarquer que $n\binom{n-1}{j} = (j+1)\binom{n}{j+1}$.]

La dérivée de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ est $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$ et celle de $(x+1)n$ est $n(x+1)^{n-1}$; en multipliant par x on obtient bien

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k.$$

La formule ainsi démontrée pour $x \in \mathbf{R}$ reste valable pour $x \in \mathbf{C}$ car c'est une égalité de polynômes ou encore on peut introduire une dérivation complexe.
Une autre méthode consiste à observer que

$$n\binom{n-1}{j} = n\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} = (j+1)\frac{n!}{(j+1)!(n-1-j)!} = (j+1)\binom{n}{j+1},$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\binom{n}{j+1}x^{j+1} = z\sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}x^j = nz(z+1)^{n-1}.$$

e) *On définit les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\sin(k\theta)$ ainsi que $U_n := S_n + iT_n$. Calculer le module et un argument de U_n.*

On a

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(k\theta) + i\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\exp(ik\theta) = ne^{i\theta}(1+e^{i\theta})^{n-1}.$$

Comme d'habitude on écrit $1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = e^{i\theta/2}2\cos(\theta/2)$ et on en tire:

$$U_n = n2^{n-1}\cos(\theta/2)^{n-1}e^{i\theta\frac{n+1}{2}}.$$

Ainsi $|U_n| = n2^{n-1}|\cos(\theta/2)|^{n-1}$, et un argument est donné par $\theta\frac{n+1}{2}$ si $\cos(\theta/2)^{n-1} > 0$ et $\theta\frac{n+1}{2} + \pi$ si $\cos(\theta/2)^{n-1} < 0$.

f) *En déduire la valeur de S_n et T_n. Pour quelles valeurs de θ la somme S_n est-elle nulle ?*

En prenant partie réelle et imaginaire on obtient :

$$S_n = n2^{n-1}\cos(\theta/2)^{n-1}\cos(\frac{n+1}{2}\theta) \qquad \text{et} \qquad T_n = n2^{n-1}\cos(\theta/2)^{n-1}\sin(\frac{n+1}{2}\theta).$$

La somme S_n est nulle si et seulement si $\cos(\theta/2) = 0$ ou $\cos(\frac{(n+1)\theta}{2}) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta/2 = \pi/2 + k\pi$ ou $\frac{(n+1)\theta}{2}) = \pi/2 + k\pi$ (pour un $k \in \mathbf{Z}$) ou encore si $\theta = \pi + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{n+1} + \frac{2k\pi}{n+1}$.

Algèbre linéaire

On note $\langle e_1, \dots, e_k\rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $e_1, \dots, e_k$.

Exercice n° 2 (3 points)

Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbf{R}$ le système linéaire suivant possède-t-il une solution ? Décrire alors l'espace des solutions en précisant notamment sa dimension.

$$\begin{cases} 2x + y + 3w + 2t & = & 1 \\ 4x + 2y + z + 2w + 3t & = & 2 \\ 4x + 2y + 3z + 2w + t & = & a \\ 6x + 3y + 2z + 3w + 4t & = & 3. \end{cases}$$

Appliquons la méthode du pivot, l'existence de solutions correspond à l'absence de pivot sur la dernière colonne de la matrice échelonnée.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & a \\ 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -3 & a-2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a-2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a-2} \end{pmatrix}$$

(on fait apparaître en gras les pivots). On peut donc récrire le système équivalent :

$$\begin{cases} x + y/2 + t & = & 1/2 \\ z - t & = & 0 \\ w & = & 0 \\ 0 & = & a-2. \end{cases}$$

Bien entendu le système est sans solution si $a \neq 2$ (il y a alors un pivot sur la dernière colonne); si $a = 2$ alors les solutions s'écrivent en laissant libres (par exemple) y et t et en résolvant $x = -y/2 - t + 1/2$, $z = t$, $w = 0$ soit :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} - t + \frac{1}{2} \\ y \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; z, t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

L'espace des solutions est de dimension 2 (le nombre de variables libres).

Exercice n° 3 (4 points)

On considère dans $\mathbf{R}^4$ *les vecteurs lignes* $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1,1)$, $e_3 = (2,3,4,0)$ *ainsi que* $f_1 = (-1,2,-3,1)$, $f_2 = (-1,2,1,3)$, $f_3 = (-1,2,5,-1)$. *On pose* $E = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ *et* $F = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$.

a) *Calculer* $\dim(E)$ *et* $\dim(F)$.

Les espaces vectoriels E et F sont engendrés par 3 vecteurs et sont donc de dimension ≤ 3, ils sont de dimension 3 si et seulement les trois générateurs sont linéairement indépendants. Une relation de dépendance $xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ y + 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire après calcul $x = y = z = 0$. Ainsi les vecteurs e_1, e_2, e_3 sont indépendants et $\dim E = 3$. Une relation de dépendance $xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} -x - y - z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \\ -3x + y + 5z &= 0 \\ x + 3y - z &= 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire après calcul $x = y = z = 0$. Ainsi les vecteurs f_1, f_2, f_3 sont indépendants et $\dim F = 3$.

b) *Trouver des équations pour* E *et* F. *En déduire des équations et une base de* $E \cap F$.

On a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E$ si et seulement si il existe x, y, z tels que $xe_1 + ye_2 + ze_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ c'est-à-dire si et seulement si le système linéaire suivant possède une solution :

$$\begin{cases} x - y + 2z &= a \\ y + 3z &= b \\ x + y + 4z &= c \\ y &= d \end{cases}$$

En éliminant une à une les variables ou en appliquant la méthode du pivot on transforme le système en les équations :

$$\begin{cases} x = a - 2b/3 + 5d/3 \\ y = d \\ z = b/3 - d/3 \\ 3a + 2b - 3c + 4d = 0 \end{cases}$$

Cette dernière équation est donc l'équation de E, c'est-à-dire que

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 3a + 2b - 3c + 4d = 0 \right\}.$$

Un calcul similaire (omis) montre que

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 2a + b = 0 \right\}.$$

On peut ainsi dire que

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 2a + b = 3a + 2b - 3c + 4d = 0 \right\}.$$

La résolution du système $2a + b = 3a + 2b - 3c + 4d = 0$ donne c, d variables libres et $a = -3c + 4d$, $b = 6c - 8d$ ou encore

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c + 4d \\ 6c - 8d \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux derniers vecteurs forment donc une base de $E \cap F$ qui est de dimension 2.

c) *Extraire une base de* $\mathbf{R}^4$ *de l'ensemble* $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$.

Remarquons que $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 3 + 3 - 2 = 4$ donc $E + F = \mathbf{R}^4$, ainsi la partie $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$ est génératrice et le théorème de la base incomplète (ou base extraite) nous garantit que l'on peut extraire quatre éléments de cette partie pour former une base. Si l'on choisit par exemple $\{e_1, e_2, e_3, f_1\}$ on doit simplement vérifier qu'ils sont linéairement indépendants (ce que le calcul confirme).
Nota : Si l'on connait les déterminants, cela revient à montrer que $\det(e_1, e_2, e_3, f_1) \neq 0$.

Exercice n° 4 (5 points)

Soit l'application de $\mathbf{R}^3$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *définie par* $f(x, y, z) = (-x+y+z, -6x+4y+2z, 3x-y+z)$.

a) *Déterminer la matrice* A *de* f *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *et vérifier que* $A^2 = 2A$.

D'après la définition de la matrice d'une application dans une base, la matrice de f s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ -6 & +4 & +2 \\ +3 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Un calcul direct montre bien que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ -6 & +4 & +2 \\ +3 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ -6 & +4 & +2 \\ +3 & -1 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & +2 & +2 \\ -12 & +8 & +4 \\ +6 & -2 & +2 \end{pmatrix} = 2A.$$

b) *Montrer que si* $v \in \mathrm{Im}(f)$ *alors* $f(v) = 2v$.

D'après la question précédente, $f \circ f = 2f$ donc si $v \in \mathrm{Im}(f)$, on sait que $v = f(u)$ (pour un certain $u \in \mathbf{R}^3$) et $f(v) = f(f(u)) = 2f(u) = 2v$.

c) *Calculer les dimensions de* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.

On sait que l'on a toujours $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbf{R}^3 = 3$. Calculons donc le noyau et sa dimension. On doit résoudre :

$$\begin{cases} -x + y + z & = & 0 \\ -6x + 4y + 2z & = & 0 \\ 3x - y + z & = & 0 \end{cases}$$

ce qui donne (après calcul) z libre et $x = -z$, $y = -2z$. Ainsi $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donné par $e_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est donc égale à 2.

d) *Montrer que* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont supplémentaires. (c'est-à-dire* $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$*).*

Il suffit de voir que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ car alors $\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f))$ vaudra 3 et donc $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}^3$. Si $v \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors $f(v) = 0$ et, d'après la question b) on a $f(v) = 2v$ donc $v = 0$.

e) *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$*, et, si* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *est la base de* $\mathbf{R}^3$ *formée par la réunion de ces bases (de* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$*), écrire la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}$.

On a déjà donné une base de $\mathrm{Ker}(f)$ avec le vecteur e_1. Un base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par deux vecteurs images indépendants, par exemple

$$e_2 = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ on peut écrire la matrice de passage P (de la base canonique à la base $\mathcal{B}$) et utiliser la formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$. Il est plus simple ici de revenir à la définition de A'. Puisque $f(e_1) = 0$ et $f(e_2) = 2e_2$, $f(e_3) = 2e_3$ on a donc

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$