Partiel OT3

(lundi 19 novembre 2007)

Exercice 1 Soit dans $\mathbb{R}^3$ les points $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) a — Montrer que l'équation $-x + y + 2z - 11 = 0$ est l'équation du plan Π médiateur du segment AB (c'est-à-dire que Π est orthogonal à AB en son milieu).

b) Trouver les coordonnés du point d'intersection P entre le plan Π et la droite Δ orthogonale à ce plan et passant par C.

2) a — Donner une base orthonormée $\epsilon = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que le vecteur n unitaire normal au plan Π et le vecteur e_1 soient colinéaires.

b — Déterminer la matrice de passage Q de la base canonique $\kappa = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$ vers la base ϵ. Quelle est la valeur du déterminant de Q ?

Exercice 2 Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et l'équation $SX = B$.

1) a — Résoudre $SX = B$ par la méthode du pivot.

b — Résoudre $SX = B$ par les formules de Cramer.

2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que sa matrice par rapport à la base canonique $\kappa = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$ soit ${}_\kappa f^\kappa = S$, et soit $\epsilon = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = i + j$, $e_2 = j + k$, $e_3 = k + i$. Donner la matrice ${}_\epsilon f^\epsilon = T$ de f relativement à la base ϵ.

Exercice 3 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que M est une matrice de rotation autour d'un axe passant par l'origine.

2) Déterminer l'axe et l'angle de ladite rotation.

3) La matrice M est la matrice de passage de la base canonique $\kappa = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$ vers une base $\epsilon = (e_1, e_2, e_3)$. Donner les vecteurs e_1, e_2 et e_3 en fonction de i, j, k.

4) Donner les coordonnées x', y' et z' d'un point de $\mathbb{R}^3$ dans la base ϵ en fonction des coordonnées x, y et z du même point dans la base κ. Expliciter la matrice inverse de M.

Exercice 4 Dans le cas du cation allylique CH_2—CH—CH_2, l'énergie E des électrons qui sont délocalisés sur l'ensemble de la molécule (électrons du système π) est une valeur propre de la matrice $H = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont deux coefficients réels.

1) Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de H.

2) Sachant que $a > 0$ et $b < 0$, classer les 3 valeurs propres trouvées par ordre croissant. Dans cet ordre on les notera $E_1 \leq E_2 \leq E_3$.

3) Trouver le vecteur propre e_1 associé à E_1.

4) Soient e_2 et e_3 les vecteurs propres associés à E_2 et E_3. Donner l'expression de H_D, la matrice de H dans la base des vecteurs propres e_1, e_2, e_3.