ALGÈBRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES
ET GÉOMÉTRIE DES OVALES CARTÉSIENNES*

Évelyne BARBIN et René GUITART

Hermite écrit au début de l'introduction de son *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* de 1873 : "Les éléments des mathématiques présentent deux divisions bien tranchées : d'une part, l'Arithmétique et l'Algèbre ; de l'autre, la Géométrie. Rien de plus différent, à leur début, que les considérations et les méthodes propres à ces deux parties d'une même science, et, bien qu'associées dans la Géométrie analytique, elles restent essentiellement distinctes si loin qu'on les poursuive, et paraissent se rapporter à des aptitudes et à des tendances intellectuelles spéciales. Ce double point de vue de l'Algèbre et de la Géométrie se retrouve dans le Calcul différentiel et le Calcul intégral ; on peut dire en effet de ces nouvelles branches de Mathématiques qu'elles sont comme une Algèbre plus vaste et plus féconde, appliquées à des questions de Géométrie inaccessibles au calcul élémentaire, telles que la quadrature des courbes, la détermination des volumes limités par des surfaces quelconques, la rectification des courbes planes ou gauches, etc." [Hermite 1873].

Hermite termine sa liste par le problème de la rectification des courbes, qui est lié à l'introduction des intégrales elliptiques, et notre propos est justement d'examiner un "double point de vue" de l'algèbre et de la géométrie dans l'histoire des fonctions elliptiques. Parler d'algèbre et de géométrie à propos des fonctions elliptiques pourra étonner un lecteur moderne. L'inspection de deux ouvrages sur les fonctions elliptiques, distants d'un quart de siècle, peut expliquer ce sentiment. Dans celui de Cayley de 1876, *An elementary treatrise on elliptic functions*, nous trouvons la signification géométrique des fonctions elliptiques, avec des problèmes de rectifications de courbes, et le traitement algébrique des fonctions elliptiques, avec l'établissement de nombreux formulaires reliant ces fonctions [Cayley 1876]. Dans celui de Whittaker et Watson de

*: ceci est la version longue de ce qui paraît sous le même titre en version allégée en 2001 à la SMF. Les parties d'ici supprimées seront cependant utiles à reprendre plus tard.

1902, *A course of Modern Analysis*, nous ne trouvons plus, ni courbes, ni formulaires [Whittaker et Watson 1902].

Notre propos historique ira ici à l'encontre de cet effacement a posteriori, par un examen des relations que des mathématiciens établissent, à partir de 1860 et jusque vers 1910, entre l'algèbre des fonctions elliptiques et la géométrie des ovales cartésiennes, en termes d'application ou d'interprétation d'un domaine dans l'autre.

Descartes introduit les ovales dans les années 1630 pour résoudre un problème optique de réfraction, il les décrit dans *La géométrie* de 1637 par mouvement et par relation algébrique. Quételet les remet à l'honneur deux siècles plus tard pour résoudre un problème optique de caustique, il en étudie les propriétés et il en donne en particulier deux descriptions géométriques. Il montre que les ovales sont enveloppes de cercles dont les centres sont sur un cercle donné et dont les rayons sont proportionnels à la distance du centre à la circonférence d'un autre cercle donné, et qu'elles sont les projections stéréographiques de l'intersection d'une sphère et d'un cône. Chasles consacre une note de son *Aperçu historique des méthodes en géométrie* de 1837 aux ovales, où il souligne l'intérêt de ses nombreuses descriptions [Barbin et Guitart 1998].

Les premières rectifications des ovales cartésiennes sont données dans les années 1850 par Roberts et Genocchi, qui montrent que les arcs d'ovales s'expriment à l'aide d'arcs d'ellipses. Elles sont obtenues à partir de l'équation polaire de l'ovale, comme "faits de calcul". Depuis le début du 19ème siècle, dans la lignée des travaux de Monge, les mathématiciens ont introduit de nouvelles approches géométriques, qui sont mises en concurrence avec les calculs analytiques. Aussi, les résultats de Roberts et Genocchi sont à nouveau démontrés, une dizaine d'années plus tard, par Darboux et Mannheim, à partir des descriptions géométriques des ovales de Quételet. Pour leurs auteurs, la production et la publication de démonstrations géométriques répondent au désir de donner une explication "philosophique" aux calculs. Cet esprit est aussi celui qui inspire les recherches d'interprétation géométrique des intégrales elliptiques comme arcs de courbes algébriques, et celui qui anime les démonstrations géométriques du théorème d'addition des fonctions elliptiques, publiées par Darboux et Laguerre en 1867.

Les démonstrations de Darboux et de Laguerre prennent place dans le contexte des recherches sur les systèmes orthogonaux de surfaces et de courbes, qui font suite aux travaux de Lamé de 1837 et de Kummer de 1847. En 1864, Darboux et Moutard exhibent des systèmes de surfaces orthogonales du quatrième degré, qui les conduisent à deux notions de courbe du quatrième degré équivalentes, celle de courbe cyclique pour le premier, et celle de courbe anallagmatique pour le second. Ces notions correspondent à un élargissement des deux descriptions géométriques de Quételet, et les courbes se transforment par projections stéréographiques en ovales cartésiennes. Lorsqu'en 1867, Darboux prouve l'orthogonalité des systèmes d'ovales homofocales, il montre aussi que les ovales fournissent une interprétation géométrique du théorème d'addition, et surtout, qu'elles constituent la forme algébrique même de l'intégrale solution. La même année, Laguerre démontre le théorème d'addition des fonctions elliptiques à l'aide des courbes anallagmatiques, via le théorème de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits à deux coniques. De la sorte, il emprunte le chemin inverse de celui de Jacobi qui, en 1828, veut appliquer les fonctions elliptiques au problème de Poncelet.

Les travaux sur la représentation des fonctions elliptiques procurent un autre point de vue sur les résultats des deux géomètres français. À partir de 1869, les mathématiciens anglophones s'intéressent aux courbes du quatrième degré introduites par Casey sous le nom de quartiques bicirculaires, car elles ont les points cycliques comme points doubles. Ces courbes correspondent en fait à celles de Darboux et de Moutard, mais c'est sous ce nom que la postérité anglophone les connaîtra. Les ovales font parties des quartiques bicirculaires qui ont les points cycliques comme points de rebroussement. Dans les années 1880, Greenhill démontre que les images des droites parallèles aux axes du plan complexe par les fonctions elliptiques de Jacobi et de Weierstrass sont des quartiques bicirculaires. Il déduit ainsi, à partir du formulaire elliptique, des propriétés géométriques de ces courbes, en particulier l'orthogonalité d'un système d'ovales homofocales. Son chemin va donc à l'inverse de celui de Darboux. Celui que prend Bacon en 1913 est à double sens, car elle a le souci, à la fois, d'établir les propriétés géométriques des ovales à partir de la fonction $\wp$ de Weierstrass, et d'interpréter géométriquement l'algèbre des fonctions elliptiques à l'aide des ovales.

Algèbre des arcs de courbes et géométrie des intégrales elliptiques

Dans la seconde moitié du 17ème siècle, des rectifications de courbes, comme celle de l'ellipse, et des problèmes physico-mathématiques conduisent les mathématiciens à des intégrales qu'ils ne savent pas résoudre, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas ramener à des courbes algébriques ou logarithmiques, et qu'ils appellent intégrales transcendantes[1]. Ainsi, en juin 1694, Jacques Bernoulli recherche la courbe élastique [Bernoulli 1694], c'est-à-dire la courbe formée par une lame élastique dont l'une de ses extrémités est attachée à un plan perpendiculaire et qui est pliée par un poids attaché à l'autre extrémité. Il lui est impossible d'intégrer l'équation à laquelle il est conduit, ni celle qui donne la rectification de la courbe élastique :

$$ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} .$$

[1] sur l'histoire des intégrales elliptiques, voir par exemple l'ouvrage de M. Kline [Kline 1972, p.411-422] et le mémoire de C. Houzel [Houzel 1978] .

Pour résoudre le problème de la courbe élastique, Jacques Bernoulli cherche une courbe algébrique dont la rectification se ramène à celle de la courbe élastique, et il trouve la courbe lemniscate d'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Cet épisode historique et les travaux ultérieurs sur la rectification de la lemniscate sont exemplaires de la manière dont les mathématiciens du 18ème siècle considèrent les intégrales transcendantes. Nous pouvons analyser leurs travaux comme quatre tentatives pour circonscrire et pour régler algébriquement le monde des intégrales transcendantes.

Premièrement, il s'agit, comme pour Bernoulli, d'interpréter une intégrale transcendante comme la rectification d'une courbe algébrique. C'est dans cet esprit qu'Hermann donne en 1723 un raisonnement de géométrie infinitésimale pour ramener une quadrature, à une quantité algébrique près, à la rectification d'une courbe algébrique[2]. Ce résultat est retrouvé par Legendre dans son *Traité des fonctions elliptiques* de 1825 [Legendre 1825, p.591]. Deuxièmement, il s'agit d'établir des relations algébriques entre des arcs d'une même courbe, bien que ces arcs s'expriment par des intégrales transcendantes, ce qui conduit aux "théorèmes d'addition" des intégrales elliptiques. Ainsi, dans son article "De integratione aequationis differentialis" [Euler 1761], Euler traite de manière purement calculatoire l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}\ , \qquad (1)$$

et il remarque qu'elle a deux intégrales solutions : $x^2 y^2 + x^2 - y^2 - 1 = 0$ et $x = y$. Il vérifie alors que

$$x^2 + y^2 + c^2x^2y^2 = c^2 + 2\ xy\sqrt{1-c^4} \qquad (2)$$

est l'intégrale complète de l'équation[3]. De ceci, il résulte que si

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + \int\frac{dc}{\sqrt{1-c^4}} \qquad (3)$$

alors les bornes d'intégration x, y et c sont liés par l'équation algébrique (2), puisque la différentielle de (3) est aussi une solution de (1). Ce résultat est ce qu'on appelle le "théorème d'addition d'Euler". Troisièmement, il s'agit d'obtenir l'arc d'une courbe comme combinaison algébrique d'arcs de courbes "simples", ellipses ou hyperboles. Ainsi, dans les années 1714-1718, Fagnano démontre qu'un arc de lemniscate s'écrit comme somme d'un arc d'ellipse, d'un arc d'hyperbole et d'une expression algébrique [Fagnano 1718]. Quatrièmement et en définitive, il s'agit d'obtenir toutes les intégrales transcendantes d'une certaine forme générale comme combinaison algébrique d'un

[2] le résultat est publié dans les *Actes de Leipzig* de 1723, p.174, cité dans l'article d'Allégret de 1873 [Allégret 1873]

[3] Bertrand écrit dans son *Cours d'Analyse* de l'Ecole Polytechnique de 1875-76 qu'Euler a obtenu l'intégration par "divination", en tâtonnant [Bertrand 1875, p.67]

nombre fini d'intégrales transcendantes, qui puissent être interprétées comme les rectifications de courbes simples. En termes cartésiens, il s'agit de décomposer des choses complexes en choses simples à l'aide de relations simples [Barbin 1998]. Les relations simples sont les relations algébriques. Les choses simples pour les mathématiciens sont les arcs d'ellipses, éventuellement les arcs d'hyperboles. La terminologie "intégrale elliptique" correspond à cette conception. Elle correspond à la tentative de Legendre à la fin du siècle, mais il ne peut plus se contenter d'arcs d'ellipses et d'hyperboles.

La recherche de la décomposition d'intégrales transcendantes en éléments simples est au cœur des investigations de Legendre en 1793 [Legendre 1793]. À cette époque, les mathématiciens s'intéresse à l'intégrale transcendante de la forme générale

$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$ où P est une fraction rationnelle et R un polynôme de degré quatre.

Legendre reprend les raisonnements de son *Mémoire sur les transcendantes elliptiques* de 1793 [Legendre 1793] dans son *Traité des fonctions elliptiques* de 1825 [Legendre 1825]. Il démontre d'abord que toute intégrale de la forme générale se ramène à trois espèces d'intégrales, qu'il appelle "fonction elliptique" :

- l'intégrale de "première espèce" $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$;
- l'intégrale de "seconde espèce" $E = \int \Delta d\phi$, qui est l'arc d'ellipse ;
- l'intégrale de "troisième espèce" $\Pi = \int \frac{d\phi}{(1 + n \sin^2 \phi)\Delta}$;

avec $\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$.

Il reste ensuite à interpréter les intégrales de la première et de la troisième espèce comme des arcs de courbes algébriques simples. Legendre exhibe une courbe du sixième degré donc les arcs s'expriment par des intégrales de première espèce, tout en souhaitant que l'on découvrit d'autres courbes répondant au problème. Ceci est sans doute l'aboutissement de plusieurs tentatives, car il écrit : "Il est très remarquable que notre nouvelle formule conduise si facilement à la solution d'un problème que nous avons regardé comme fort difficile, et qui paraît n'admettre aucune autre solution ; celui de trouver une courbe algébrique dont les arcs représentent généralement la fonction elliptique de première espèce" [Legendre 1825, p.590]. Plusieurs géomètres du 19ème siècle vont explicitement relever le défi, et tenter de répondre au souci géométrique exprimé par Legendre [Cayley 1876, p.35-41 et p.350-357].

Ainsi, dans une note de 1843, Serret répond au vœu de Legendre en montrant que toute intégrale de première espèce peut être représentée comme somme ou différence de deux arcs d'ovales cassiniennes [Serret 1843a]. Puis dans un mémoire de 1845, il montre qu'il existe une infinité de courbes algébriques répondant au problème, qu'il nomme "courbes elliptiques" [Serret 1845]. Dans son rapport sur ce mémoire, Liouville salue les résultats de Serret en ces termes : "La réduction des quadratures des rectifications, considérée en général, et la résolution des équations indéterminées dont elle dépend, appartiennent à une branche étendue et difficile de l'Analyse, que l'on a jusqu'ici à peine effleurée. Le succès que M. Serret vient d'obtenir dans cette matière délicate donnera lieu sans doute à de nouvelles tentatives dont la science profitera"[4]. Comme il l'écrit dans la note qui suit l'article de Serret, les résultats obtenus permettront "de pouvoir transporter immédiatement, et dans toute leur élégance, aux arcs de courbes les propriétés si curieuses de ces fonctions [elliptiques]. […] et l'on voit assez combien son travail mérite l'attention des géomètres" [Serret 1845, p.296].

Dès 1843, encouragé par Chasles, Serret entreprend une étude approfondie de la lemniscate, dont les arcs s'expriment par l'intégrale de première espèce, afin d'exhiber une propriété de cette courbe "qui puisse mettre sur la voie d'une représentation géométrique convenable des transcendantes elliptiques". [Serret 1843b, p.496]. Il publie trois ans plus tard un article intitulé "Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première espèce", dans lequel il écrit que cette étude l'a "conduit à deux propriétés, commune à toutes les courbes elliptiques de la première classe, et qui fournissent, pour ces courbes, un mode uniforme de génération d'une extrême élégance. Ces propriétés peuvent servir à définir les courbes elliptiques de la première classe, dont la théorie deviendra, dès lors, entièrement indépendante des considérations analytiques qui me les ont fait découvrir" [Serret, 1846].

Selon Liouville et Serret, les relations entre géométrie des courbes et analytique des intégrales elliptiques fonctionnent donc différemment. Alors que le premier souhaite appliquer les "élégantes" propriétés des intégrales elliptiques à la géométrie, le second veut donner une représentation des intégrales elliptiques par des courbes aux propriétés géométriques tout aussi "élégantes". À la même époque, et faisant suite aux travaux de Gudermann, Roberts cherche à interpréter géométriquement les intégrales elliptiques à l'aide d'arcs de courbes sphériques [Roberts 1843, 1845]. Dans un papier de 1843, extrait d'une lettre adressée à Liouville, il indique une courbe sphérique analogue à la lemniscate, dont il écrit qu'elle "fournit très simplement une représentation géométrique de la première transcendante elliptique, ce que Legendre a beaucoup désiré". Trente ans plus tard, dans un important "Mémoire sur la représentation des transcendantes", Allégret donne une approche globale du problème de la représentation des intégrales transcendantes par des arcs de courbes algébriques [Allégret 1873]. Il montre qu'une intégrale elliptique de la troisième espèce s'exprime à l'aide d'arcs d'inverses d'épicycloïdes, et il explique comment une somme de transcendantes

[4] dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXI, 1845, p. 283, cité par M. Chasles [Chasles 1870, p.174-175].

exprimables par des arcs de courbes algébriques s'exprime elle aussi comme un arc de courbe algébrique.

Les rectifications des ovales cartésiennes, dans les années 1850 à 1872, que nous allons examiner un plus loin doivent être resituées dans ce contexte de prégnance géométrique forte. Nous commençons par donner quelques éléments de l'histoire des ovales[5], jusqu'en 1840.

Descriptions optiques, géométriques et algébriques des ovales cartésiennes

Les ovales sont introduites par Descartes dans les années 1630, pour répondre à un problème optique, celui de trouver la forme d'un dioptre tel que si les rayons incidents viennent d'un même point F alors les rayons réfractés passent par un même point G. Dans *La géométrie* de 1637, Descartes définit les ovales de trois façons, par une construction point par point, par un "mouvement bien réglé" et de manière algébrique [Descartes 1637, p.379-387]. Sa description algébrique est la suivante (fig.1) : soient F et G deux points, et A un point de FG, alors la courbe est définie par

$FC = c + z$ et $GC = b - \frac{e}{d}z$, avec $AG = b$, $AF = c$ et $\frac{d}{e}$ la "mesure des réfractions".

Les ovales sont donc des courbes à deux foyers F et G telles que

$$FC + \frac{d}{e}\,GC = c + \frac{d}{e}\,b.$$

La construction par "mouvement bien réglé" fait apparaître un troisième foyer aligné aux deux premiers, sans que Descartes le mentionne explicitement.

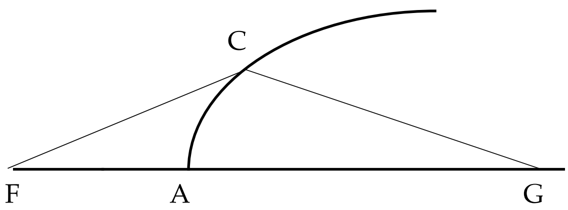

fig.1

Les ovales ne semblent pas avoir été étudiées par les mathématiciens du 18ème siècle. Elles sont réintroduites par Quételet au début du 19ème siècle, sous le nom de lignes aplanétiques, en réponse à un autre problème optique, celui de déterminer les caustiques secondaires par réfraction du cercle. Dans son mémoire de 1829, Quételet entreprend une étude des ovales [Quételet 1829]. Soient F et F' deux points, ρ et ρ' les deux "rayons vecteurs" MF et MF' menés d'un point M de l'ovale, il définit les ovales par l'équation bi-polaire

$$\rho' - \rho n = r.$$

[5] pour une étude plus détaillée, voir l'article de E. Barbin et R. Guitart [Barbin et Guitart 1998].

Puis, en notant c la distance des deux foyers et α l'angle que le "rayon vecteur" FM forme avec le diamètre FF', il obtient l'équation polaire d'une ovale :

$$\rho^2 - 2\,\rho\,\frac{c\cos\alpha + nr}{1-n^2} = \frac{r^2 - c^2}{1-n^2}\,.$$

Il remarque que l'ellipse et l'hyperbole sont des cas particuliers d'ovales, et que, l'équation polaire étant du second degré, l'ovale se compose en général de deux branches, tantôt unies, tantôt séparées. En effet, l'allure générale d'une ovale complète consiste en deux branches contenues l'une dans l'autre ; l'ovale intérieure est convexe en forme d'œuf, et l'ovale extérieure est convexe ou cordiforme. Le produit de deux racines de l'équation polaire étant constant, le produit des "rayons vecteurs" menés dans une même direction d'un même foyer aux deux branches de la courbe est constant. Ainsi, les deux branches de l'ovale s'échangent dans une transformation par rayons vecteurs réciproques, ou inversion, de pôle un foyer.

À partir des "coordonnées rectangulaires", Quételet démontre que les ovales sont des projections orthogonales de l'intersection de deux cônes qui ont leurs axes perpendiculaires au plan des courbes. Dans ces coordonnées, l’ovale est une courbe du quatrième degré dont l’équation se ramène à:

$$[(1 - n^2)\,(x^2+y^2) - 2\,c\,x + c^2 - r^2]^2 = 4\,n^2\,r^2\,(x^2+y^2)^2.$$

La propriété optique des ovales, qui intéresse Quételet, lui permet de décrire les ovales comme enveloppes de cercles centrés sur un cercle. Soit (S) un demi-cercle et soit F un point de son diamètre, F est le foyer d'où partent les rayons lumineux qui viennent se réfracter en des points O de (S) (fig.2). Par définition, la caustique secondaire par réfraction du demi-cercle (S) est l'enveloppe (A') des cercles (O) de centres O et de rayons Oa' tels que le rapport de OF à Oa’ soit constant et égal à l’indice de réfraction. Elle touche un cercle (O) en deux points a'_1 et a', où Oa'_1 et Oa' sont le rayon réfracté et son symétrique par rapport à la tangente OT au cercle (O). Quételet démontre que (A') est une demi-ovale de foyers F et F', où F' est un point fixe obtenu comme intersection du diamètre de (S) et du cercle (C) centré sur OT et passant par O et F. Il montre aussi que la droite qui joint a' et a'_1 passe par un point fixe c du diamètre de (S), et ce point est le troisième foyer de l’ovale.

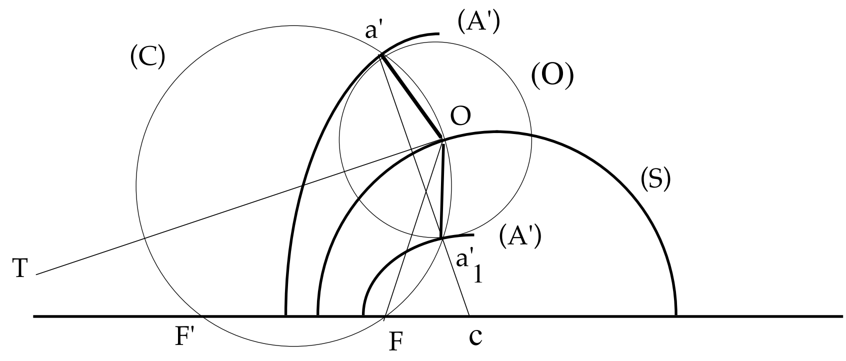

fig.2

D'après un résultat très général sur les caustiques obtenu par Quételet quatre ans plus tôt [Quételet, 1825], il en résulte que les ovales s'obtiennent aussi comme projections stéréographiques de la courbe de pénétration d'une sphère et d'un cône droit, l'œil étant placé à l'extrémité du diamètre de la sphère parallèle à l'axe du cône.

Dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* de 1837, Chasles consacre une note de trois pages aux ovales cartésiennes, où il cite les résultats de Quételet [Chasles 1837, p.350-353]. Il remarque l'existence d'un troisième foyer et il donne une construction géométrique très simple des ovales. Il écrit : "On ne saurait avoir trop de moyen différents de décrire une même courbe, parce que chacun exprime une propriété caractéristique de la courbe, d'où dérivent naturellement plusieurs autres propriétés, qui n'apparaissent pas aussi aisément dans les autres modes de description". Ces descriptions s'avéreront à ce point essentielles, qu'un quart de siècle plus tard, des mathématiciens définiront des familles de courbes en les généralisant : la famille des cycliques pour Darboux et la famille des anallagmatiques pour Moutard.

Arcs d'ovales cartésiennes et arcs d'ellipses

En 1850, W. Roberts démontre que la différence de deux arcs d'ovales définis à partir d'un foyer est un arc d'ellipse [Roberts 1850], puis en 1855, Genocchi démontre qu'un arc d'ovale est somme de trois arcs d'ellipse[6] [Genocchi 1875]. Leurs résultats sont obtenus de manière purement calculatoire, en partant de l'équation polaire de l'ovale. Quelques années plus tard, deux mathématiciens parviennent à donner des démonstrations géométriques de ces résultats, Mannheim pour le premier en 1862 [Mannheim 1862] et Darboux pour le second en 1878 [Darboux 1878a], en s'appuyant sur les descriptions géométriques des ovales de Quételet.

Dans son "Théorème sur les arcs des lignes aplanétiques", Roberts énonce : "Soient P_1 et P_2 deux points qu'un rayon vecteur, issu d'un foyer, détermine sur la courbe ; soient aussi P'_1 et P'_2 deux points qu'un second rayon vecteur, tiré du même foyer, détermine d'une manière semblable. La différence des deux arcs $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$ sera égale à un arc d'ellipse" [Roberts 1850] (fig.3).

[6] l'article est publié en 1855 dans un recueil périodique de Turin, *Il Cimento*, puis en 1864 dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, tome VI, il est connu en France après sa publication dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences en 1875, voir la note de Darboux [Darboux 1878b].

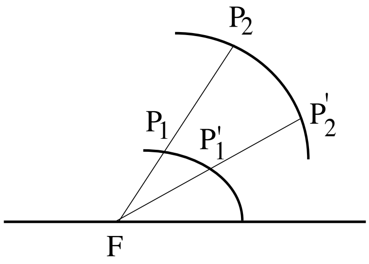

fig.3

Il considère une courbe d'équation polaire de pôle F

$$r^2 - 2\,r\,\Omega + \alpha = 0, \qquad (1)$$

où Ω est une fonction de l'angle polaire ω, et α une constante. En notant s_1 et s_2 deux arcs correspondants à une même valeur de ω, il obtient

$$s_1 + s_2 = 2 \int \sqrt{\frac{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}{\Omega^2 - \alpha}}\ \Omega\, d\omega \quad \text{et} \quad s_1 - s_2 = 2 \int \sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}\ d\omega.$$

Puis il considère le cas où la courbe est une ovale d'équation r + mr' = n, il identifie son équation polaire

$$r^2 - 2\,r\,\frac{n - m^2 c \cos\omega}{1 - m^2} + \frac{n^2 - m^2 c^2}{1 - m^2} = 0$$

à la précédente. En notant s_1 et s_2 les arcs définis entre des angles polaires ω_0 et ω_1, il obtient

$$s_1 - s_2 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{n^2 - 2nc\cos\omega + m^2}\ d\omega,$$

qu'il reconnaît comme un arc d'ellipse de grand axe 2(n + c) et d'excentricité $2\,\frac{\sqrt{nc}}{n + c}$.

Mannheim revient sur le théorème de Roberts dans son article "Sur les arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles" de 1862 et le démontre à l'aide de raisonnements géométriques et optiques [Mannheim 1862]. Il commence par interpréter géométriquement une courbe d'équation polaire (1) comme enveloppe (E) de cercles centrés sur une courbe donnée et orthogonaux à un cercle donné. En effet, soit (A) la courbe d'équation $\rho = \Omega$, (B) l'enveloppe des perpendiculaires IM menées aux rayons vecteurs PI de (A), et (E) l'enveloppe des cercles de centres M orthogonaux au cercle de centre P et de rayon $\sqrt{\alpha}$ (fig.4). Soient C et C' les points de contacts du cercle centré en M avec l'enveloppe (E). En raisonnant sur deux cercles infiniment proches centrés sur (B) et sur leur axe radical, Mannheim és sur (B) et sur leur axe radical, Mannheim démontre que C et C' sont sur IP. On a alors :

- PC + PC' = 2 PI et PI = Ω par définition de (A), donc PC + PC' = 2 Ω,
- PC . PC' = PT^2 car les cercles sont orthogonaux, donc PC . PC' = α.

Par conséquent PC et PC' sont solutions de l'équation polaire de départ.

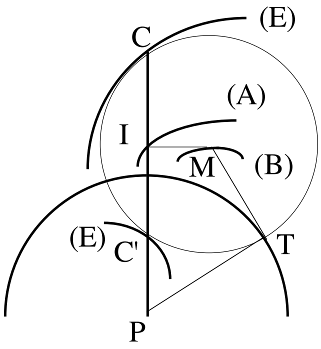

fig.4

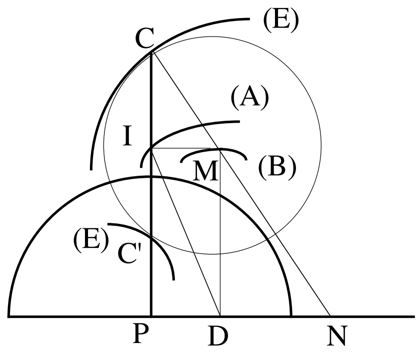

fig.5

Mannheim traduit ensuite géométriquement les résultats de Roberts pour $s_1 + s_2$ et $s_1 - s_2$. Il considère s_1 et s_2 deux arcs correspondants de (E) pour un même arc de (B). Soit D l'intersection de la normale en I à (A) avec la perpendiculaire en P à IP, alors MD est aussi la normale en M à (B) (fig.5). La dérivée Ω' de Ω par rapport à ω est égale à la sous-normale PD de (A). Par conséquent, les résultats de Roberts se traduisent par

$$s_1 + s_2 = 2 \int \frac{\mathrm{MC \times PI}}{\mathrm{IC}}\, d\omega \quad \text{et} \quad s_1 - s_2 = 2 \int \mathrm{MC}\ \ d\omega.$$

Soit N l'intersection de CM avec la perpendiculaire en P à PI. Le "théorème de Thalès" permet d'obtenir les deux formules suivantes :

$$s_1 + s_2 = 2 \int \mathrm{MN}\ \ d\omega \text{ et } s_1 - s_2 = 2 \int \mathrm{MC}\ \ d\omega.$$

Pour "faire bien comprendre à quoi tient la simplicité" de ces formules, Mannheim en donne une démonstration directe [Mannheim 1862, p.124] par la géométrie infinitésimale. Il considère (B) une courbe et (E) l'enveloppe de cercles centrés en M sur (B) et dont les rayons "varient suivant une loi quelconque".

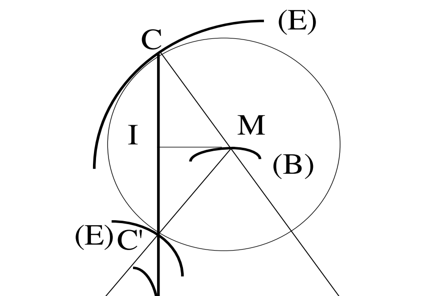

fig.6

Soient C et C' les points où un cercle touche (E), (H) l'enveloppe des cordes CC', P le point où CC' touche (H), N et N' les points d'intersection des normales CM et C'M à (E) avec la normale en P à (H) (fig.2). Considérons ds_1 et ds_2 "les arcs élémentaires déterminés sur (E) par deux cordes infiniment voisines", et dω "l'angle de contingence" en P de la courbe (H), c’est-à-dire "l’angle de deux tangentes consécutives" de la courbe. Mannheim a démontré dans une "Note de géométrie infinitésimale"[7] que "deux tangentes consécutives d'une courbe (A) interceptent sur deux courbes (B), (C) deux arcs infiniment petits dont le rapport est le même que celui des normales à des arcs, terminées à la normale de la courbe A", il obtient ici que

$$ds_1 = NC\, d\omega \text{ et } ds_2 = N'C'\, d\omega.$$

En raisonnant comme dans la figure précédente, la tangente MI à la courbe (B) est perpendiculaire à la corde CC', et par conséquent dω est aussi l'angle de contingence en M de la courbe (B). En remarquant que les triangles CMC' et NMN' sont isocèles, la somme et la différence des deux égalités précédentes donnent bien

$$ds_1 + ds_2 = 2\, MN\, d\omega \text{ et } ds_1 - ds_2 = 2\, MC\, d\omega.$$

Mannheim en conclut que c'est parce que les angles que font les cordes CC' avec les deux branches de (E) sont égaux que les formules "sont aussi simples".

Il reste à se ramener à des arcs d'ellipses. Pour cela, Mannheim utilise un résultat démontré par Quételet dans son "Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques" [Quételet 1825] : soit F un point lumineux et soit (S) la courbe où s'effectuent les réfractions, alors la différence entre deux arcs de la caustique secondaire correspondants à un même arc de (S) est exprimable en arc de la podaire de (S) relative au point F, c'est-à-dire du lieu des pieds des perpendiculaires menées de F aux tangentes de (S). Dans le cas où (S) est un cercle, Quételet a montré que la caustique secondaire est une ovale cartésienne (fig.2). Or l'arc de la podaire d'un cercle est exprimable en arc d'ellipse, par conséquent, la différence des arcs correspondants de l'ovale est exprimable comme arc d'ellipse. Ce n'est pas tout à fait le résultat de Roberts, puisque celui-ci considère des arcs compris entre deux droites issus d'un foyer de l'ovale. Pour obtenir le résultat de Roberts, il reste à remarquer que le point P de la figure de Mannheim (fig.6), qui est le point fixe c de la figure de Quételet (fig.2), est le troisième foyer de l'ovale.

Le théorème de Genocchi énonce que "tout arc d'une ovale de Descartes se réduit à la somme de trois arcs d'ellipse", il est publié à Turin en 1855 mais il n'est communiqué à l'Académie des Sciences de Paris qu'en 1875 [Genocchi 1875]. Genocchi part de l'équation polaire de l'ovale, écrite

$$\rho^2 + 2\, \rho\, (a \cos\omega + b) = c.$$

Ce qui donne

$$\rho + a \cos\omega + b = \sqrt{c + (a \cos\omega + b)^2}$$

$$\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\omega^2 = \frac{a^2 + b^2 + c + 2ab \cos\omega}{c + (a \cos\omega + b)^2}\, d\omega^2.$$

Il en déduit que l'arc de l'ovale s est tel que ds = dU – dV, avec

$$\frac{dU}{d\omega} = \sqrt{a^2 + b^2 + c + 2ab \cos\omega}$$

[7] publiée dans les *Annali di Matematica*, voir l'ouvrage de M. Chasles [Chasles 1870, p.295 et p.298].

$$\frac{dV}{d\omega} = (a\cos\omega + b)\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c + 2ab\cos\omega}{c + (a\cos\omega + b)^2}}.$$

En deux pages de calculs, il exprime U comme arc d'ellipse, puis utilisant le théorème de multiplication de Landen[8], il exprime V comme somme de deux arcs d'ellipses. Genocchi écrit au début de sa note : "Je vais résumer les transformations qui amènent ce résultat que j'envisage simplement comme un *fait de calcul*, en laissant à d'autres la recherche plus difficile d'une explication géométrique ou philosophique"[9].

Darboux se réfère explicitement à cette phrase pour donner une "explication, une raison d'être du théorème que désirait M. Genocchi" dans sa note de 1878, "Sur la rectification des ovales de Descartes" [Darboux 1878a]. Nous avons vu que Quételet a remarqué que le produit de deux racines de l'équation polaire d'une ovale étant constant, le produit des rayons vecteurs menés dans une même direction d'un même foyer f aux deux branches de la courbe est constant. Ainsi, les deux branches de l'ovale s'échangent par une inversion de pôle un foyer, ou encore relative à un cercle de centre f. Ceci est vrai pour les deux autres foyers f' et f" de l'ovale. Darboux écrit que "l'explication géométrique ou philosophique" du théorème de Genocchi peut se trouver dans "une propriété géométrique remarquable dont jouissent les ovales de Descartes", à savoir que les trois cercles d'inversion de foyers f, f' et f" sont orthogonaux deux à deux. En effet, puisque deux cercles sont orthogonaux si et seulement si les inversions associées commutent, cela implique que si on prend les inverses d'un point de la courbe par rapport aux trois cercles, et son symétrique par rapport à l'axe des foyers, puis les inverses de ces nouveaux points par rapport aux trois cercles, etc., on obtient seulement huit points de la courbe (fig.7).

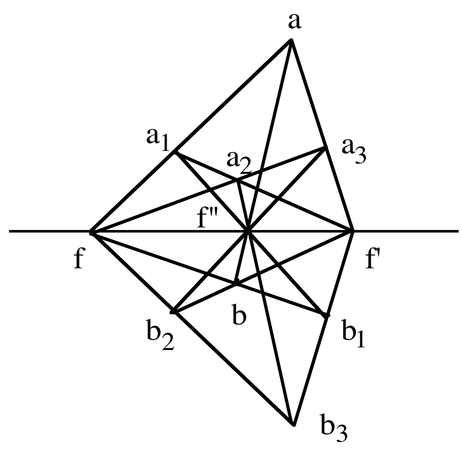

fig.7

Darboux note a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3 les huit points inverses les uns des autres et (a) l'arc décrit par le point a. Il va montrer, en tenant compte de la symétrie des points

---

[8] le théorème se trouve dans un article de Landen publié dans *Phil. Trans. of Royal Soc.*, LXV, 1775, p.285.

[9] l'expression "fait de calcul" est écrite en italiques dans le texte.

et des arcs de la figure, que l'application répétée du résultat de Roberts permet de "déterminer sans calcul des arcs décrits par les huit points". Pour le foyer f on a

$$(a) - (a_1) = E(k) \text{ et } (a_3) - (a_2) = E'(k)$$

où E et E' désignent des arcs d'ellipses de même module k, c'est-à-dire de même excentricité. De la même façon, les foyers f' et f" donnent

$$(a) - (a_3) = E(k') \text{ et } (a_1) - (a_2) = E'(k'),$$

$$(a_3) - (b_3) = E(k'') \text{ et } (a_2) - (b_2) = E'(k'').$$

En remplaçant les arcs (b_2) et (b_3) par leurs symétriques (a_1) et (a), on déduit des six équations que

$$2\,(a) = E(k) + E(k') + E(k'').$$

Cette formule, comme celles obtenues dans les autres recherches sur les intégrales elliptiques, constitue un essai de combinatoire "algébrique" des rectifications d'arcs sur la base d'arcs simples.

L' algèbre des fonctions elliptiques

Avec l'introduction des fonctions elliptiques, définies comme inverses d'intégrales, les mathématiciens mettent en place une "algèbre" de fonctions, dont les formules étendent celles des fonctions trigonométriques La première tentative concerne l'intégrale obtenue avec la rectification de la lemniscate. En effet, à partir de 1797, Gauss s'intéresse à la lemniscate, et il écrit plusieurs textes qui ne seront publiés qu'après sa mort, les "Älteste untersuchungen über lemnistakische funktionen" [Gauss 1981, p.145-171]. Guidé par l'analogie avec les fonctions trigonométriques, il introduit la fonction inverse de l'intégrale transcendante. Pour les fonctions sinus et cosinus on a :

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,,\ \frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,,\ \sin u = x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u.$$

De la même façon, les fonctions "lemniscatiques" sinlemn (notée sl) et coslemn (notée cl), sont telles que :

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\,,\ \frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\,,\ \mathrm{sl}\,u = x,\ \mathrm{cl}\left(\frac{\tilde{\omega}}{2} - u\right) = \mathrm{sl}\,u.$$

D'après le théorème d'Euler sur l'égalité des arcs de lemniscate, il obtient

$$\mathrm{sl}^2 u + \mathrm{cl}^2 u - \mathrm{sl}\,u.\mathrm{cl}\,u = 1, \qquad (1)$$

analogue de la formule trigonométrique $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$. Avec le théorème d'addition d'Euler, il obtient

$$\mathrm{sl}\,(u + v) = \frac{\mathrm{sl}\,u.\mathrm{cl}\,v + \mathrm{sl}\,v.\mathrm{cl}\,u}{1 - \mathrm{sl}\,u.\mathrm{sl}\,v.\mathrm{cl}\,u.\mathrm{cl}\,v}\,, \qquad (2)$$

analogue de la formule trigonométrique $\sin(u + v) = \sin u.\cos v + \sin v.\cos u$.

Gauss s'intéresse aussi à la division d'un arc de lemniscate en arcs égaux. Par analogie avec la division du cercle, il introduit les fonctions sl z et cl z pour un complexe z. Par changement de variable t = it' dans l'intégrale, il définit sl (iv) = i sl v, puis, à l'aide de la formule (1), il obtient que cl (iv) = 1 / cl v. Il obtient ensuite, à partir de la formule (2), que

$$\mathrm{sl}\,(u + iv) = \frac{\mathrm{sl}\,u + i\,\mathrm{cl}\,u.\mathrm{sl}\,v.\mathrm{cl}\,v}{\mathrm{cl}\,v - i\,\mathrm{cl}\,u.\mathrm{sl}\,v.\mathrm{sl}\,u}.$$

Il s'ensuit que la fonction complexe sl est doublement périodique de période $2\tilde{\varpi}$ et $2i\tilde{\varpi}$:

$$\mathrm{sl}\,(u + iv) = \mathrm{sl}\,(u + 2\tilde{\varpi} + iv)) = \mathrm{sl}\,(u + iv + 2i\tilde{\varpi}).$$

Dans la première moitié du 19ème siècle, Abel, Jacobi, puis Weierstrass, constituent chacun une famille de fonctions elliptiques définies comme inverses de certaines intégrales elliptiques. Ils cherchent à établir des formulaires algébriques reliant ces fonctions dans une combinatoire substitutive finie, mais aussi à obtenir toutes les intégrales elliptiques à partir de ces fonctions, quitte à élargir les opérations sur les fonctions, des opérations algébriques aux opérations différentielle, intégrale et composition. Parmi ces algèbres de fonctions, celles de Jacobi et de Weierstrass seront utilisées dans les travaux ultérieurs sur les ovales cartésiennes.

Les premiers travaux de Jacobi sur les intégrales elliptiques sont repris dans son "Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum" de 1829 [Jacobi 1881, p.49-239]. Il considère ϕ = am u, comme la fonction inverse de l'intégrale elliptique de "première espèce" de Legendre, et les fonctions

$$\sin\phi = \sin \mathrm{am}\, u,\ \cos\phi = \cos \mathrm{am}\, u \text{ et } \Delta\,\phi = \Delta\,\mathrm{am}\, u = \sqrt{1 + k^2 \sin^2\theta}\,.$$

Les fonctions sin am, cos am, et Δ am seront notées plus simplement par Gudermann sn, cn, dn. Le paramètre k dont elles dépendent est appelé module. Autrement dit, sn, cn et dn sont, avec $k^2 + k'^2 = 1$, les fonctions réciproques des intégrales :

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}}\ ,\ \int_z^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(k'^2+k^2t^2)}}\ ,\ \int_z^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(t^2-k'^2)}}\ .$$

Jacobi nomme ces fonctions des "fonctions elliptiques".

Les fonctions sn, cn, dn vérifient $\mathrm{sn}^2(u) + \mathrm{cn}^2(u) = 1$, $\mathrm{dn}^2(u) + k^2\,\mathrm{sn}^2(u) = 1$, $\mathrm{sn}(-u) = \mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}(u)$, et $\mathrm{dn}(-u) = \mathrm{dn}(u)$. Jacobi obtient les formules d'addition qui expriment sn(u+v), cn(u+v), dn(u+v) en fonction de sn(u), sn(v), cn(u), cn(v), dn(u) et dn(v). Par exemple,

$$\mathrm{sn}\,(u+v) = \frac{\mathrm{sn}(u).\mathrm{cn}(u).\mathrm{dn}(v) + \mathrm{sn}(v).\mathrm{cn}(v).\mathrm{dn}(v)}{1 - k^2.\mathrm{sn}^2(u).\mathrm{sn}^2(v)}\ .$$

Il étend la fonction sn aux complexes en prenant sn(iu,k) = i tan am(u,k'), où k et k' sont les modules de sn et am. Les fonctions complexes sn, cn, et dn sont doublement périodiques, de périodes respectives 4K et 2iK', 4K et 2(K + K'), 2K et 4iK' avec

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \theta}} \text{ et } K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi}}.$$

Elles ont besoin d'être définies seulement dans un rectangle du plan complexe (pour la fonction sn, voir fig.8), dans lequel elles ont deux pôles.

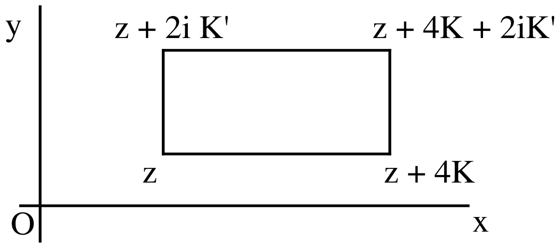

fig.8

Un autre système de présentation des fonctions elliptiques est proposé un peu plus tard par Weierstrass, qui s'intéresse au sujet dans les années 1850 en lisant les travaux d'Abel et de Jacobi [Weierstrass 1856][10]. Il réduit les intégrales elliptiques générales à trois genres :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \quad \int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

et il inverse la première intégrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \text{ en notant } \wp(u) = x, \text{ avec la condition } g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0,$$

qui assure que les trois racines du polynôme cubique sont distinctes [Weierstrass 1892]. La fonction $\wp(u)$ est une fonction doublement périodique. Weierstrass démontre que toute intégrale elliptique peut s'exprimer à l'aide de $\wp(u)$ et de $\wp'(u)$, et il obtient le théorème d'addition

$$\wp(u + v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\surd'(u) - \surd'(v)}{\surd(u) - \surd(v)}\right)^2 - \wp(u) - \wp(v).$$

La théorie des fonctions elliptiques ne se limite pas à cette combinatoire algébrique. Les mathématiciens recherchent aussi des développements de ces fonctions en produits ou en séries infinies. C’est le cas par exemple des fonctions Θ et H introduites par Jacobi. Dans les années 1840, cette approche analytique et l’exploration de la double périodicité servent de point de départ pour une nouvelle définition des fonctions elliptiques par Hermite [Belhoste 1996], par Liouville (Liouville 1880], et par Eisenstein [Eisenstein 1847]. Dans ses "Leçons sur les fonctions doublement périodiques" de 1847, Liouville démontre, en la développant en série de Fourier par rapport à une de ses périodes, qu'une fonction entière doublement périodique est

[10] sur les travaux de Weierstrass, voir la dissertation de Mittag-Leffler [Mittag-Leffler 1876].

constante[11]. Il en déduit qu'une fonction méromorphe doublement périodique a au moins deux pôles, ou un pôle double, dans le parallélogramme des périodes ω et ω'. Liouville établit ensuite que, dans le parallélogramme des périodes, le nombre de zéros d'une fonction méromorphe doublement périodique est égal au nombre de ses pôles (en comptant les multiplicités), ce nombre est appelé l'ordre de la fonction. Il établit aussi que, dans le parallélogramme des périodes, la somme des zéros est congrue à la somme des pôles modulo les combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes ω et ω'. Il démontre enfin qu'une fonction méromorphe doublement périodique ϕ d'ordre 2 est telle que $\phi'^2 = P(\phi)$, où P est un polynôme de degré trois ou quatre, autrement dit, ϕ est une fonction elliptique de première espèce. Nous avons ici la définition moderne des fonctions elliptiques comme fonctions méromorphes doublement périodiques.

Système orthogonal d'ovales homofocales et théorème d'addition d'Euler

Dans un "Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température", présenté en 1833 devant l'Académie des Sciences, Lamé introduit la notion de "coordonnées elliptiques", qui consiste à repérer un point de l'espace à l'aide de trois surfaces du second ordre homofocales qui passent par ce point [Lamé 1837]. Cinq ans plus tard, auprès de la même assemblée, il généralise cette notion à celle de "coordonnées curvilignes", qui consiste à repérer un point par trois surfaces orthogonales qui passent par ce point [Lamé 1840]. La théorie de Lamé est le point de départ de nombreuses recherches, en géométrie comme en physique. En 1870, Chasles écrit "qu'elle s'est introduite dans les recherches de tous les géomètres. La plupart des travaux les plus remarquables, depuis une trentaine d'années en renferment des applications" [Chasles 1870, p.149]. En particulier, Kummer démontre en 1847 que tout système de courbes orthogonales est homofocal [Kummer 1852][12].

Le 1er août 1864, Serret et Bonnet présentent à l'Académie des Sciences deux notes, la première de Darboux et la seconde de Moutard, qui ont obtenu indépendamment une même généralisation de la notion de "coordonnées elliptiques" à l'aide d'un système de surfaces orthogonales homofocales du quatrième ordre. C'est ainsi que, dans le cadre de la théorie de Lamé, Darboux et Moutard introduisent deux familles de courbes planes, dont les propriétés généralisent celles des ovales cartésiennes. Ces courbes permettent en 1867 de donner deux interprétations géométriques du théorème d'addition d'Euler. Nous présentons dans cette partie celle de Darboux, et dans la partie suivante, celle de Laguerre.

---

[11] ce cours n'est édité qu'en 1880, mais les travaux de Cauchy, d'Hermite et de Liouville ont inspiré l'ouvrage didactique de 1859 de Briot et Bouquet [Belhoste 1996, p.28].

[12] son article paraît dans le *Journal de Crelle*, t.XXXV, 1847, p.5-12, et sa traduction française en 1852.

Dans ses "Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales" de 1864, Darboux étend le résultat de Kummer aux systèmes triples de surfaces orthogonales, puis il exhibe un nouveau système de surfaces orthogonales [Darboux 1864a]. Remarquant que des ovales homofocales forment un système orthogonal, il cherche et il obtient les conditions pour lesquelles l'équation

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + \alpha x^2+ \beta y^2+ \gamma z^2 - h = 0$$

peut être celle d'un système triple orthogonal de surfaces. Puis il donne quelques propriétés géométriques de ces surfaces, dont l'une est "essentielle", à savoir que toute sphère les coupe suivant une courbe qui appartient à une surface du second degré. Il est important de noter ici que la même année Darboux publie un court article, intitulé "Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré", où il énonce que cette intersection est une courbe à trois foyers, situés sur la sphère, d'équation

$$a\, r + a'\, r' + a''\, r'' = 0,$$

et que la projection stéréographique donne les ovales de Descartes [Darboux 1864b].

L'année suivante, Darboux développe ses résultats dans ses "Recherches sur les surfaces orthogonales" [Darboux 1865]. Il consacre la note I de cet article aux sections planes de son système de surfaces orthogonales, dont il montre que ce sont des courbes du quatrième degré, passant par les points cycliques et comprenant en particulier les ovales de Descartes. Il écrit qu'elles "ont été étudiées complètement, et l'on connaît leurs principales propriétés", que l'on "peut déduire des propriétés des coniques sphériques toutes les propriétés des courbes du quatrième degré, qui en sont les transformées par projection stéréographique". Par exemple, on en déduit les systèmes orthogonaux de courbes du quatrième degré homofocales. Ce sentiment de Darboux explique en grande partie le traitement géométrique ultérieur qu'il donnera de ces courbes. Les méthodes géométriques du 19ème siècle, celles de Monge ou de Poncelet, vont ainsi fournir un nouvel aspect géométrique des fonctions elliptiques. En effet, toujours dans la Note I, Darboux remarque que l'intégration de l'équation différentielle du système orthogonal des courbes du quatrième ordre donne "un nouveau moyen d'arriver à l'intégrale de l'équation d'Euler [...] sous une forme assez remarquable". Il ne reviendra sur cette remarque que deux ans plus tard, car le 14 juillet 1866 il soutient sa thèse devant Chasles, Jordan et Hoüel.

Notons qu'en 1866, dans un article "On Certains Properties of the Cartesian Ovals, treated by the Method of Vectorial Co-ordinates", Crofton cherche de "nouvelles propriétés" sur les ovales [Crofton 1866]. Il écrit que "les ovales cartésiennes semblent avoir de tout temps attiré une attention considérable, bien que les tentatives pour trouver leurs propriétés n'aient pas rencontré un grand succès". Il pense faire mieux en utilisant l'équation bi-polaire de l'ovale (appelée "vectorial co-ordinates"), qui semble "naturellement" indiquée, vue la définition de la courbe. Il démontre, en particulier, que deux ovales cartésiennes sécantes ayant deux foyers communs sont orthogonales si et seulement si elles ont le même troisième foyer. Il ne mentionne pas l'article de Darboux de 1865, qui contient ce résultat, et même, dans un cadre plus général.

Dans son article de 1867, "Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques", Darboux écrit : "j'ai avancé que l'on pouvait déduire d'une classe remarquable de courbes une démonstration géométrique nouvelle du théorème d'Euler relatif à l'addition des fonctions elliptiques. Je me propose dans cette Note, de développer cette démonstration" [Darboux 1867]. Il y démontre qu'un système d'ovales homofocales de Descartes constitue un système double orthogonal, c'est-à-dire que par tout point du plan il passe exactement deux ovales orthogonales, ce qui l'amène à donner une nouvelle preuve du théorème d'addition d'Euler. Ce faisant, il exhibe un lien étroit entre l'ovale et la fonction elliptique sn, en donnant une expression très simple des coordonnées d'un point d'une ovale à l'aide de la fonction elliptique.

Dans ce mémoire, Darboux ne mentionne pas l'article de Crofton. Il part lui aussi de l'équation bi-polaire de l'ovale, mais il traite de manière homogène les trois foyers. Il considère l'équation de l'ovale $nr + r' = h$, relative à deux foyers F et F' tels que $FF' = c$ (fig.9). Il détermine d'abord de manière simple le troisième foyer F''. D'après "un théorème peu connu de Géométrie" (c'est ce que l'on appelle aujourd'hui la relation de Stewart), on a la relation suivante entre MF, MF' et MF'' :

$$\overline{MF}^{2}.\, \overline{F'F''} + \overline{MF''}^{2}.\overline{FF'} - \overline{MF'}^{2}.\overline{FF''} = \overline{FF'}\,.\overline{FF''}\,.\overline{F'F''}\ ,$$

ou bien, en posant $F'F'' = x$,

$$xr^2 + cr''^2 - (c + x)\, r'^2 = cx\,(c + x).$$

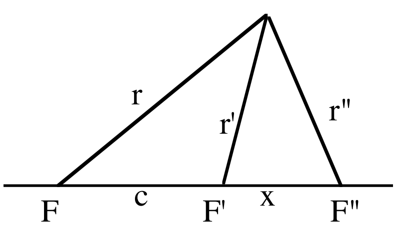

fig.9

En remplaçant r' par sa valeur en fonction de r, on en déduit une équation qui relie r et r''. Cette équation doit être linéaire, car F'' est le troisième foyer, et cette condition s'écrit :

$$c^2n^2 - h^2 + cx\,(n^2 - 1) = 0, \qquad \text{(C)}$$

ce qui permet d'obtenir x. L'équation de l'ovale relative aux foyers F et F'' est alors :

$$cr'' = hr - \frac{n(h^2 - c^2)}{n^2 - 1}\ .$$

Pour exprimer que des ovales ont les mêmes foyers, Darboux définit k et α tels que

$$c + x = \frac{c}{k^2} \quad \text{et} \quad h = c\sqrt{1 - \alpha^2}\ ,$$

et l'équation (C) devient $n = \sqrt{1 - k^2\alpha^2}$. Par conséquent, les ovales cherchées ont pour équations relatives à F et F', et à F et F" :

$$r\sqrt{1 - k^2\alpha^2} + r' = c\sqrt{1 - \alpha^2} \qquad (1)$$

$$r\sqrt{1 - \alpha^2} - r'' = \frac{c}{k^2}\sqrt{1 - k^2\alpha^2}\,. \qquad (2)$$

Lorsque α varie, on obtient un système d'ovales homofocales. De plus, pour un point quelconque de coordonnées r et r', il y a deux valeurs de α telles que l'équation (1) soit vérifiée, donc il passe par ce point deux ovales. En différentiant (1) et (2), on obtient

$$dr\sqrt{1 - k^2\alpha^2} + dr' = 0 \text{ et } dr\sqrt{1 - \alpha^2} - dr'' = 0.$$

A partir de ces équations différentielles et des équations (1) et (2), en éliminant α, Darboux obtient une équation différentielle remarquable par sa simplicité :

$$r'\,dr - r\,dr' = c\,dr''. \qquad (E)$$

Une simple réécriture de cette équation permet de démontrer en même temps une propriété des tangentes, qui assure l'orthogonalité du système d'ovales, et le théorème d'addition. En effet, Darboux prend pour axes de coordonnées l'axe des ovales et sa perpendiculaire au point F (fig.10), alors

$$r^2 = x^2 + y^2,\ r'^2 = (x - c)^2 + y^2,\ r''^2 = \left(x - \frac{c}{k^2}\right)^2 + y^2.$$

Puis il passe au plan complexe en prenant, au lieu de x et de y, les variables u et v telles que $u = x + iy$ et $v = x - iy$, et obtient

$$r^2 = uv,\ r'^2 = (u - c)(v - c),\ r''^2 = \left(u - \frac{c}{k^2}\right)\left(u - \frac{c}{k^2}\right).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (E), et en élevant au carré pour faire disparaître les radicaux, il trouve :

$$\frac{du^2}{u(u - c)\left(u - \frac{c}{k^2}\right)} = \frac{dv^2}{v(v - c)\left(v - \frac{c}{k^2}\right)}\,. \qquad (E')$$

Notons θ, θ' et θ'' les angles que font respectivement MF, MF' et MF" avec l'axe de l'ovale, et V l'angle de la tangente à la courbe en M avec ce même axe (fig.10), alors

$$\frac{u}{v} = e^{2i\theta},\ \frac{u - c}{v - c} = e^{2i\theta'},\ \frac{u - \frac{c}{k^2}}{v - \frac{c}{k^2}} = e^{2i\theta''} \text{ et } \frac{du}{dv} = e^{2iV}.$$

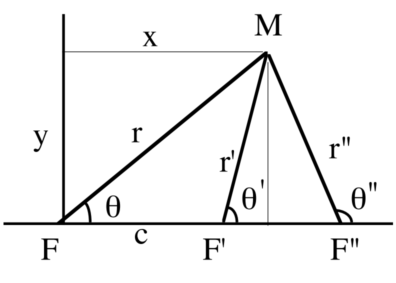

fig.10

Par conséquent, l'équation (E') donne

$$e^{4iV} = e^{2i\theta}\, e^{2i\theta'} e^{2i\theta''},\ \text{c'est-à-dire, } V = \frac{\theta + \theta' + \theta''}{2} + k\,\frac{\pi}{2}\,. \qquad \text{(T)}$$

Ainsi, on obtient pour V deux valeurs qui diffèrent d'un angle droit, et les deux ovales qui passent par M sont donc bien orthogonales. La relation (T) fournit aussi un moyen très simple d'obtenir la tangente en un point de l'ovale.

L'équation différentielle (E') a pour solutions les deux courbes d'équations (3) et (4), obtenues à partir de (1) et (2),

$$\sqrt{1 - k^2\alpha^2}\,\sqrt{uv} + \sqrt{(u-c)(v-c)} = c\sqrt{1-\alpha^2} \qquad (3)$$

$$\sqrt{1-\alpha^2}\,\sqrt{uv} - \sqrt{\left(u - \frac{c}{k^2}\right)\left(v - \frac{c}{k^2}\right)} = \frac{c}{k^2}\sqrt{1 - k^2\alpha^2}\,. \qquad (4)$$

En posant $u = cx^2$ et $v = cy^2$, Darboux obtient ainsi le théorème d'addition d'Euler, à savoir que l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+k^2x^2)}} = \frac{dy}{M\sqrt{(1-y^2)(1+k^2y^2)}}$$

a pour solutions les deux équations

$$\sqrt{1-k^2\alpha^2}\ xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \sqrt{1-\alpha^2} \qquad (5)$$

$$\sqrt{1-\alpha^2}\ xy - \frac{1}{k^2}\sqrt{(1-k^2x^2)(1-k^2y^2)} = \frac{1}{k^2}\sqrt{1-k^2\alpha^2}\,. \qquad (6)$$

Darboux en déduit ensuite une expression des coordonnées x et y d'un point de l'ovale à partir de la fonction elliptique sn. En effet, si on pose

$$\int \frac{du}{\sqrt{u\,(u-c)\left(u - \frac{c}{k^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+k^2x^2)}} = \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{c}}$$

alors

$$u = c\ \mathrm{sn}^2(\alpha + i\beta) = x + iy,$$

$$x = \frac{c}{2}\ \mathrm{sn}^2(\alpha + i\beta) + \frac{c}{2}\ \mathrm{sn}^2(\alpha - i\beta),$$

$$y = \frac{c}{2i}\ \mathrm{sn}^2(\alpha + i\beta) - \frac{c}{2i}\ \mathrm{sn}^2(\alpha - i\beta).$$

Il précise que, lorsque α est constant et que β varie, on a toutes les courbes d'un système d'ovales, et que, lorsque α est constant et que β varie, on a toutes les courbes orthogonales aux premières. L'image par la fonction sn^2 de deux perpendiculaires, l'une d'abscisse constante et l'autre d'ordonnée constante, sont deux ovales orthogonales : on dira que les ovales "représentent" la fonction elliptique sn^2.

À la fin de son article, Darboux s'intéresse plus largement aux courbes planes ou sphériques d'équation

$$a\,r + b\,r' + c\,r'' = 0,$$

avec trois foyers quelconques situés dans le plan ou sur la sphère qui contient la courbe. Il montre que ces courbes ont nécessairement un quatrième foyer, cocyclique avec les trois autres. Il démontre aussi que ces courbes sont, de quatre manières différentes, enveloppes de cercles orthogonaux à un cercle fixe, et ayant leurs centres sur une conique sphérique. Ce sont donc, en utilisant la terminologie introduite par Moutard en 1864, des courbes anallagmatiques du quatrième ordre [Moutard, 1864a, 1864b].

Darboux revient sur l' interprétation géométrique du théorème d'addition d'Euler dans son ouvrage de 1873, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires*. Il appelle "cycliques sphériques" les courbes obtenues par intersection d'une sphère et d'une surface du second degré, et "cycliques planes" les courbes planes déduites de celles-ci par transformation par rayons vecteurs réciproques. Les cycliques planes comprennent, entre autres, la lemniscate, les ovales cartésiennes et les ovales cassiniennes. Une cyclique possède quatre foyers cocycliques, et toute cyclique se transforme en ovale de Descartes par une transformation par rayons vecteurs réciproques, dont le pôle est un des foyers situés sur la sphère contenant la cyclique.

Dans la partie "Des rapports entre la théorie générale des cycliques et celle des fonctions elliptiques" [Darboux 1873, p.75-76], Darboux montre que, si une équation

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{dv}{\sqrt{f_1(u)}}$$

avec f(u) et $f_1(v)$ deux polynômes imaginaires conjugués du 4ème degré, est telle que le premier membre se ramène par une homographie à

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k\xi^2)}}$$

alors elle est intégrable algébriquement et la courbe représentée par l'intégrale est une cyclique plane quelconque. Il met d'abord en évidence les propriétés focales de la courbe, puis il remarque, comme dans le cas de l'ovale, que l'équation différentielle conduit à une construction simple de la tangente aux cycliques. Il obtient en fait une généralisation de l'équation (T) de l'article de 1867 :

$$2V = 2K + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + M.\ \pi.\ (T)$$

où V, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont les angles que font avec l'axe des abscisses la ltangente en un point M de la courbe et les droites joignant M aux quatre foyers. Autrement dit, la propriété des tangentes des cycliques planes constitue une interprétation géométrique de l'équation eulérienne. Darboux conclut que l'équation différentielle est "intégrée par le système des cycliques planes, homofocales et orthogonales".

Un "lien intime" entre courbes anallagmatiques et fonctions elliptiques

Moutard appelle anallagmatique une surface qui se transforme en elle-même par une transformation par vecteurs réciproques, et il démontre qu'elle est le lieu des intersections successives d'une sphère orthogonale à une sphère fixe, dite principale, et dont le centre décrit une surface fixe, dite directrice [Moutard 1864a]. Dans son article "Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre", il appelle focale l'intersection de la sphère principale et de la surface directrice, et il démontre que des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre homofocales, c'est-à-dire qui ont la même focale, forment un système triplement orthogonal [Moutard 1864b]. Nous avons dit que ce résultat est présenté à l'Académie des Sciences en même temps que celui de Darboux, et que celui-ci montre en 1867 que les intersections d'une sphère et d'une surface du second degré sont des courbes anallagmatiques du quatrième ordre. Les propriétés des ovales obtenues par Quételet exprimaient donc cette identité dans le cas particulier de courbes planes à trois foyers alignés.

En 1867, Laguerre publie un article intitulé "Sur quelques applications de la géométrie au calcul intégral", où il cite la remarque faite par Darboux en 1865 à propos du théorème d'addition sur les fonctions elliptiques, et où il établit un lien entre fonctions elliptiques et courbes anallagmatiques, via le théorème de Poncelet [Laguerre 1905, p.35-40]. Il rappelle que Jacobi a montré le "lien intime qui unit la théorie de Poncelet sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à des coniques à celle des fonctions elliptiques", en faisant voir comment "on pouvait effectuer géométriquement l'addition et la multiplication des fonctions elliptiques avec un système de cercles". Il écrit que "le but de cette Note est de résoudre d'une façon complète et générale la question posée par Jacobi", puisque ce dernier a remarqué que la considération plus générale d'un système de coniques devait conduire à des résultats analogues.

Poncelet a démontré dans son *Traité des propriétés projectives des figures*, publié en 1822, que "quand un polygone quelconque est à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à un autre, il en existe une infinité de semblables qui jouissent de la même propriété à l'égard des deux courbes ; ou plutôt tous ceux qu'on essayerait de décrire à volonté, d'après ces conditions, se fermeraient d'eux-mêmes sur ces courbes. Et réciproquement, s'il arrive qu'en essayant d'inscrire à volonté, à une section conique, un polygone dont les côtés en touchent une autre, ce polygone ne se ferme pas de lui-même, il ne saurait nécessairement y en avoir d'autres qui jouissent de cette propriété" [Poncelet, 1865, p.349-350]. Six ans plus tard, Jacobi montre que les fonctions elliptiques permettent d'explorer le cas particulier où les coniques sont des cercles [Jacobi, 1828]. Notons que cet article est republié en français en 1845, dans le Journal de Liouville, sous le titre suivant : "Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire : Trouver la relation entre la distance des centres de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone" [Jacobi, 1845].

Jacobi considère deux cercles, dont l'un, de rayon R et de centre C, contient l'autre, de rayon r et de centre c, et le point P où le diamètre commun Cc coupe le premier cercle. Par un point quelconque A du premier cercle, on mène une tangente au second, qui coupe le premier cercle en A', puis on mène de la même manière A'A", etc., de sorte à obtenir une ligne polygonale. Jacobi note CP = r, cC =a, cP = R +a, l'angle ACP égale à 2φ, l'angle A'Cp égale à 2φ', etc., et il obtient les équations trigonométriques :

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi'' + \varphi}{2} = \frac{R - a}{R + a} \operatorname{tang} \varphi', \qquad (1)$$

Puis il écrit : "Sous cette forme, il saute aux yeux que ces équations coïncident avec celle qu'on donne pour la multiplication des transcendantes elliptiques". Il va ainsi exploiter une analogie entre la transcription trigonométrique de la situation géométrique et le formulaire elliptique. En effet, soit

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \chi^2 \sin^2\varphi}} = u,\ \varphi = \operatorname{am}(u),\ \alpha = \operatorname{am}(t),\ \varphi' = \operatorname{am}(u+t),\ \varphi'' = \operatorname{am}(u+2t),$$

avec χ une constante et α un angle quelconque, alors on sait, d'après le formulaire des fonctions elliptiques, que

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi + \varphi''}{2} = \sqrt{1 - \chi^2 \sin^2\varphi}\ \operatorname{tang} \varphi'. \qquad (2)$$

En identifiant les équations (1) et (2), Jacobi calcule χ et α, et il remarque que "c'est une circonstance bien remarquable que les grandeurs χ et α sont entièrement indépendantes de φ et de u". Cela implique que le choix du point initial A n'intervient pas dans l'existence d'un polygone inscrit dans un des deux cercles et circonscrit à l'autre, ni dans le nombre de fois que le polygone parcourt la circonférence. Jacobi termine en écrivant : "M. Poncelet a étendu ce théorème au système de deux coniques. Il ne serait peut-être pas sans intérêt pour la théorie des fonctions elliptiques, d'établir des considérations analogues immédiatement sur le système de deux coniques".

Par la suite, beaucoup de géomètres s'intéressent au théorème de Poncelet et à cette remarque de Jacobi[13], dont en particulier Chasles (Chasles 1843, 1844] et Cayley [Cayley 1853]. Poncelet publie lui-même en 1862 une "Note historique, critique et philosophique à propos des théorèmes sur l'inscription et la circonscription simultanée des polygones aux coniques" [Poncelet 1862, p.480-498]. Il écrit que Jacobi "a prétendu faire dériver [les théorèmes] a posteriori de la théorie purement algébrique des fonctions elliptiques", alors qu'il a plutôt "déduit de l'ouvrage de 1822 une élégante construction pour l'addition et la multiplication des intégrales elliptiques de première espèce". À propos d'un continuateur de Jacobi, il juge "peu naturel et encore moins philosophique,

---

[13] sur l'histoire du théorème de Poncelet, on peut se reporter à l'historique de Mackay [Mackay 1887] et à celui de Bos et ali [Bos 1987]. Pour un traitement moderne, on peut lire l'article de Griffiths et Harris [Griffiths et Harris 1978].

de tirer directement de la connaissance [des relations entre fonctions elliptiques], la démonstration a posteriori, de théorèmes généraux aussi simples de géométrie". Le statut du travail de Jacobi est aussi examiné par Moutard dans sa note sur les "Rapprochements entre les méthodes de la géométrie pure et celles de l'analyse algébrique", publiée à la suite de celle de Poncelet [Poncelet 1862, p.509-535]. Il distingue deux voies qui consistent, l'une "à chercher dans la géométrie la solution de certains problèmes d'analyse" et l'autre "à déduire de transformations faites dans un but analytique la solution de problèmes de géométrie", pour estimer que "Jacobi n'a, en général, suivi explicitement que la dernière voie".

Avec son article de 1867, Laguerre se positionne dans la première voie. Il se situe explicitement dans la poursuite du travail de Chasles [Chasles, 1844], qui a "donné une représentation géométrique très élégante de l'addition des fonctions elliptiques au moyen d'un système de coniques homofocales". Alors que Jacobi dit "appliquer" le théorème d'addition des fonctions elliptiques à la géométrie, il veut donner une "application de la géométrie au calcul intégral". Avec la géométrie infinitésimale, il traduit la situation géométrique par une équation différentielle simple, et, avec sa théorie des coordonnées isotropes, il obtient simplement l'intégrale de l'équation comme courbe anallagmatique du quatrième ordre.

Laguerre examine d'abord la situation géométrique de Poncelet, celle d'une tangente à une conique joignant deux points d'une autre. Il note A et B deux coniques fixes, et T une tangente quelconque menée à la conique A, qui coupe la conique B en deux points m et μ. Il suppose que T se meut d'un déplacement infiniment petit, en restant tangente à A, et en coupant B en deux points m' et μ'. Il appelle V le point de rencontre de mm' et de $\mu\mu'$, ds et dσ les déplacements infiniment petits de m et μ. D'après la théorie des transversales, l'équation différentielle qui traduit la situation est :

$$\frac{ds}{mt.mV} = \frac{d\sigma}{\mu t.\mu V}$$

En notant r et ρ les rayons de courbure de la conique B aux points m et μ, $\pi(m)$ et $\pi(\mu)$ les puissances de m et μ relativement à la conique A, c'est-à-dire les valeurs du premier membre de l'équation de la conique en ces points, l'équation différentielle devient :

$$\frac{ds}{\sqrt[3]{r}\sqrt{\pi(m)}} = \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{\rho}\sqrt{\pi(\mu)}} \qquad (1)$$

D'après un théorème énoncé par Laguerre en 1865, dans le cas où la conique B est un cercle, les puissances $\pi(m)$ et $\pi(\mu)$ s'obtiennent simplement à partir des points a, b, c, d d'intersection de ce cercle avec la conique A, de sorte que l'équation (1) devient :

$$\frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{\mu a.\mu b.\mu c.\mu d}} \qquad (2)$$

Puis Laguerre considère une courbe anallagmatique du quatrième degré, c'est-à-dire, d'après les résultats de Moutard, une courbe enveloppe d'une famille de cercles orthogonaux à un cercle B et dont les centres décrivent une conique A. Il exprime ceci dans les termes de sa géométrie des imaginaires, reproduits dans son mémoire de 1870 "Sur l'emploi des imaginaires en géométrie", où il appelle droite isotrope une droite passant par les points cycliques I ou J de Poncelet [Laguerre 1905, p.88-108]. Dans cette géométrie, les deux coordonnées isotropes d'un point quelconque, par rapport à un axe et un point d'origine sur cet axe, sont les segments interceptés sur l'axe depuis cette origine par les deux droites isotropes issues du point donné. Alors l'anallagmatique est telle que, si on mène à A une tangente réelle extérieure au cercle B, coupant B en deux points imaginaires conjugués m et μ, alors les quatre droites isotropes passant par ces points se rencontrent en deux points réels M et *M*, dont le lieu est l'anallagmatique. Il retrouve donc ainsi, en géométrie des imaginaires, la situation géométrique de Poncelet.

Laguerre traduit ensuite cette description avec les coordonnées isotropes. Dans ce système, si x, y et x', y' sont les coordonnées de deux points, d leur distance, θ l'angle que fait la droite qui les joint à l'axe, on a :

$$x - x' = de^{i\theta}, \text{ et } y - y' = de^{-i\theta}.$$

En prenant l'origine au centre du cercle B, et en notant respectivement α, β, γ, δ et α', β', γ', δ' les abscisses et les ordonnées des points de rencontre de B avec la conique A, l'équation (2) devient

$$\frac{dx\, e^{\lambda i}}{\sqrt{(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,(x-\delta)}} = \frac{dy\, e^{-\lambda i}}{\sqrt{(y-\alpha')\,(y-\beta')\,(y-\gamma')\,(y-\delta')}}$$

Les points de rencontre de B avec la conique A sont les foyers de l'anallagmatique, donc l'intégrale de l'équation eulérienne est fournie par l'équation des anallagmatiques ayant pour foyers les quatre points de coordonnées α, α' ; β, β' ; γ, γ' ; δ, δ'.

Ce résultat est analogue à celui qu'obtient Darboux pour les courbes à trois foyers, qui, comme l'indique son article de 1867, sont des courbes à quatre foyers cocycliques identiques aux courbes anallagmatiques de Moutard. Chez Laguerre, comme chez Darboux, l'intégration de l'équation eulérienne passe par l'interprétation d'une propriété des tangentes aux courbes solutions. Chez le premier, elle est relative au théorème de Poncelet[14], tandis que chez le second, elle s'exprime par une relation angulaire (T) sur les tangentes, obtenue d'abord pour les ovales et étendue aux courbes cycliques planes.

Ovales et représentations géométriques des fonctions elliptiques

Nous avons vu que Darboux démontre en 1867 que les ovales homofocales forment un système de courbes orthogonales, et que c'est à cette occasion qu'il obtient

---

[14] Laguerre "développe dans tous ses détails cet aspect" dans un article de1872 des *Nouvelles Annales de mathématiques* [Laguerre 1905, p.269-274]

une représentation dans le plan complexe de la fonction elliptique sn^2. En revanche, dans un article paru en 1860, Siebeck s'est intéressé directement au problème de la représentation des fonctions elliptique sn et cn [Siebeck, 1860]. Par analogie avec la représentation des fonctions trigonométriques et hyperboliques en ellipses et hyperboles, il considère la famille de courbes de foyers donnés A et B, tels que si S et D désignent la somme et la différence des distances de P à A et B, alors

$$mS^2 + nD^2 = 4\,a^2,$$

avec m, n et a des paramètres. Il montre que les tangentes à ces courbes, appelées aujourd'hui courbes de Siebeck, vérifient une relation identique à la relation (T) que Darboux obtiendra pour les cycliques. Puis il démontre que, étant donné un point P du plan complexe d'affixe $z = u+iv$, si v est fixe et u constant alors l'image sn(z) de P par sn parcourt une des courbes de la famille de foyers +1 et -1, et si u est fixe et v constant alors l'image de P par sn parcourt une autre courbe de la même famille, homofocale et orthogonale à la première. Il démontre un résultat similaire pour la fonction cn. Ainsi, les courbes de Siebeck représentent les fonctions sn et cn. Dans un article qui fait suite, il s'attache aux propriétés géométriques de ses courbes [Siebeck 1861]. Il montre, en particulier, qu'elles sont isoptiques des ellipses, c'est-à-dire qu'elles sont le lieu des points d'où on voit une ellipse sous un angle donné.

Les relations entre les représentations des fonctions elliptiques et les systèmes de courbes homofocales font l'objet d'une étude systématique par Greenhill dans les années 1880. Mais son propos est moins de chercher une représentation géométrique des fonctions elliptiques que de déduire de cette représentation des propriétés des courbe. Dans son article de 1881, "On conjugate Functions of Cartesians and other Quartics", il cherche les courbes qui représentent les fonctions elliptiques de Jacobi, pour en déduire la propriété géométrique d'orthogonalité d'une famille de courbes homofocales [Greenhill 1881]. Les "quartics" dont il s'agit dans cet article sont les courbes introduites par Casey en 1867 sous le nom de quartiques bicirculaires, à savoir les courbes planes du quatrième degré qui passent deux fois par les points cycliques I et J [Casey 1867]. Si I et J sont des points de rebroussement et si les trois foyers réels sont alignés, alors on retrouve les ovales cartésiennes. Les quartiques bicirculaires sont identiques aux cycliques planes de Darboux et aux courbes anallagmatiques de Moutard. Mais les propriétés démontrées par les deux géomètres français semblent inconnues dans le monde anglophone, et elles sont attribuées couramment à Casey. Ceci fait l'objet d'une note de Laguerre en 1870, car Cayley a adjugé à Casey le théorème sur les anallagmatiques de Moutard [Laguerre 1905, p.136-137]. Concernant les quartiques bicirculaires, les mathématiciens anglophones citent le traité de Salmon[15], *A*

[15] la première édition de l'ouvrage de Salmon date de 1852, les éditions suivantes sont de 1878 et 1879. L'ouvrage est traduit en français par O. Chemin, et il paraît dans cette langue en 1884, puis en 1903.

Treatrise on the Higher Plane Curves, où elles sont traitées d'un point de vue algébrique [Salmon, 1879].

Dans l'article de 1881, Greenhill cite les résultats de Siebeck sur la représentation des fonctions sn et cn, mais il semble ignorer ceux de Darboux sur la fonction sn^2. Il procède par analogie avec les fonctions trigonométriques, en considérant d'abord l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = 2u, \text{ on a } z = \sin^2 u \text{ et les pôles sont 0 et 1.}$$

Soit le point $x + iy = \sin^2 (\xi + i\eta)$, notons r et r' ses distances aux points $z = 0$ et $z = 1$, alors

$$r = \sin (\xi + i\eta) \sin(\xi - i\eta) \quad \text{et} \quad r' = \cos(\xi + i\eta) \cos(\xi - i\eta),$$

d'où

$$r + r' = \cos 2i\eta \text{ et } r - r' = \cos 2\xi.$$

Par conséquent, les courbes qui représentent $\sin^2$ sont les ellipses et les hyperboles homofocales de foyers $z = 0$ et $z = 1$. Puis il considère l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = 2u, \text{ on a } z = sn^2\, u \text{ et les pôles sont 0, 1 et } \frac{1}{k^2}.$$

Soit le point $x + iy = sn^2 (\xi + i\eta)$, et soit r, r', r" ses distances aux points

$$z = 0, z = 1, z = \frac{1}{k^2},$$

alors

$$r = sn(\xi + i\eta)\, sn(\xi - i\eta) \quad \text{et} \quad r' = cn(\xi + i\eta)\, cn(\xi - i\eta) \text{ et } r'' = \frac{1}{k^2}\, dn(\xi + i\eta)\, dn(\xi - i\eta).$$

Greenhill obtient, en utilisant le formulaire des fonctions elliptiques, que

$$r' - r\, dn\, 2\xi = cn\, 2\xi \qquad \text{et} \qquad r' + r\, dn\, 2i\eta = cn\, 2i\eta,$$

$$r'' - r\, cn\, 2\xi = \frac{1}{k^2}\, dn\, 2\xi \qquad \text{et} \qquad r'' + r\, cn\, 2i\eta = \frac{1}{k^2}\, dn\, 2i\eta,$$

$$r''dn\, 2\xi - r'\, cn\, 2\xi = \frac{k'^2}{k^2} \qquad \text{et} \qquad r''dn\, 2i\eta - r'\, cn\, 2i\eta = \frac{k'^2}{k^2}.$$

Par conséquent les courbes qui représentent sn^2 sont deux ovales homofocales de foyers

$$z = 0, z = 1, z = \frac{1}{k^2}.$$

Greenhill en déduit que les deux ovales sont orthogonales, et il nomme ce résultat le "théorème de Crofton". Il démontre de même que la fonction elliptique sn est représentée par les courbes de Siebeck.

Son article se termine par la démonstration, à l'aide des fonctions elliptiques, du théorème qui énonce que les quartiques bicirculaires sont des courbes à quatre foyers formant un système doublement orthogonal. Il cite alors l'ouvrage de Salmon, et non les travaux de Darboux de 1864. Il fait enfin remarquer que tous les théorèmes s'obtiennent immédiatement par inversion d'un système d'ovales cartésiennes homofocales. Ceci explique que les ovales cartésiennes, bien qu'incluses maintenant dans une famille plus large de courbes, soient toujours étudiées par les mathématiciens de l'époque dans leur particularité et pour leur simplicité. C'est de nouveau le cas dans un article que Greenhill, publie cinq ans plus tard, "Some applications of Weierstrass's Elliptic functions", qui s'intéresse cette fois aux courbes qui représentent la fonction de Weierstrass $\wp$:

$$z = \wp\, u, \text{ avec } z = x + iy,\ u = \frac{1}{2}(\xi + i\eta) = \int_z^{\bullet} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}\ .$$

Il s'agit "d'exhiber l'usage des fonctions elliptiques de Weierstrass, en montrant leur application directe à de nombreux problèmes géométriques et physiques, et ainsi de donner des illustrations de la signification des formules analytiques exprimant leurs relations mutuelles" [Greenhill 1886]. Il étudie d'abord le cas particulier où

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 4\,(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3), \text{ avec } e_1, e_2 \text{ et } e_3 \text{ réels,}$$

et il montre que les courbes obtenues respectivement pour ξ constante et η constante forment un système d'ovales homofocales de foyers $z = e_1$, $z = e_2$ et $z = e_3$. Pour cela, il utilise la fonction σ de Weierstrass, dont la dérivée logarithmique est la fonction ζ qui a pour dérivée $-\wp$. Afin de reconnaître un système d'ovales homofocales dans la forme algébrique obtenue pour les courbes représentatives, il cite l'article de Darboux de 1867.

Greenhill expose ses résultats sur la représentation des fonctions elliptiques dans le chapitre sur "La double périodicité des fonctions elliptiques" de son célèbre ouvrage de 1893, intitulé *The applications of elliptic functions* [Greenhill 1895, p.390-422]. En effet, la double périodicité d'une fonction elliptique f et le calcul des périodes s'obtiennent en remarquant que les images des droites d'ordonnée ou d'abscisse constante sont des courbes fermées. De sorte que, lorsque $\xi + i\eta$ se déplace sur la droite d'ordonnée η, le point image finit, pour une valeur de la variable $\xi + 4K + i\eta$, par revenir sur la valeur $f(\xi + i\eta)$, et, lorsque $\xi + i\eta$ se déplace sur la droite d'abscisse ξ, le point image finit, pour une valeur de la variable $\xi + i\eta + i\,4K'$, par revenir sur la valeur $f(\xi + i\eta)$. Greenhill consacre une partie de ce chapitre à "La géométrie des ovales de Descartes". Respectant le propos de l'ouvrage, qui est celui de donner des "applications des fonctions elliptiques", il démontre le théorème de Genocchi à l'aide de calculs utilisant le formulaire elliptique des fonctions de Jacobi.

Dans sa "Note on the Double Periodicity of the Elliptic Functions" de 1889, Franklin retrouve les résultats de l'article de Greenhill de 1881, mais comme il l'indique en note de bas de page "le point de vue de cet article est, toutefois, entièrement différente de celui de la présente note" [Franklin 1889]. En effet, l'esprit de sa note est celui des écrits de Darboux, de l'article de 1867 et de l'ouvrage de 1873, écrits qu'il semble ignorer. Il obtient pour les quartiques circulaires des résultats identiques à ceux obtenus par son prédécesseur français pour les cycliques planes.

Il remarque d'abord que, si une fonction w est définie par

$$z = \int^{w} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}}$$

il résulte "géométriquement" de l'examen des arguments de l'égalité complexe

$$\frac{dw}{dz} = i\sqrt{w - 1}\,\sqrt{w + 1}\ ,$$

que, lorsque z décrit une droite parallèle à l'axe des abscisses, l'angle que la tangente à la courbe décrite par w fait avec cet axe est égal à $\pi/2$ plus la moitié de la somme des angles que font avec cet axe les droites joignant w aux points d'abscisses 1 et –1. Or la propriété ci-dessus de la tangente est caractéristique de l'ellipse, donc w décrit une ellipse de foyers d'abscisses 1 et –1. L'examen des modules de l'égalité complexe donne

$$ds(w) = \sqrt{r_1 r_2}\ ds(z),$$

avec r_1 et r_2 les distances de w aux points d'abscisses 1 et –1, et lorsque w décrit un tour sur l'ellipse, z varie de la période 2π. De la même façon, lorsque z décrit une droite parallèle à l'axe des ordonnées, la courbe décrite par w est une hyperbole et la période correspondante est infinie.

Le même raisonnement est ensuite appliqué à des intégrales elliptiques. Ainsi, pour

$$dw = \sqrt{(w - a_1)(w - a_2)(w - a_3)(w - a_4)}\ dz$$

avec a_1, a_2, a_3, a_4 réels, il affirme que si z décrit une droite D alors w décrit une courbe, dont la tangente en w fait avec D un angle égal à la moitié de la somme des angles faits avec l'axe des abscisses par les droites joignant w aux points d'abscisses a_1, a_2, a_3, a_4. Franklin énonce que les tangentes à une quartique bicirculaire vérifient cette propriété, et qu'il en donnera une preuve algébrique simple dans un article à paraître[16] dans *American Journal of Mathematics*. En fait, il s'agit exactement de la propriété (T) des tangentes des cycliques planes de Darboux. Franklin conclut ainsi que la courbe intégrale de l'équation est une quartique bicirculaire.

Franklin termine en indiquant, dans toute sa généralité, la relation qui existe entre le théorème d'addition des fonctions elliptiques et la représentation de ces fonctions. Étant donnée une fonction w définie par l'équation

$$z = \int^{w} f(w)\, dw$$

[16] cet article paraît l'année suivante ([Franklin 1890b].

avec les coefficients de f réels, il montre que si l'équation générale des courbes décrites par w quand z se déplace parallèlement à l'axe des ordonnées Y, convertie en une équation en x et y par la substitution

$$x = X + iY \quad \text{et} \quad y = X - iY$$

est F(x,y,C) = 0, alors cette équation est la solution de l'équation

$$f(x)dx + f(y)dy = 0,$$

ou, encore, l'équation du théorème d'addition de la fonction w. Le résultat est identique quand z se déplace parallèlement à l'axe des abscisses X. Il met ainsi en évidence le rôle du passage des coordonnées cartésiennes en coordonnées circulaires, que Darboux utilise aussi dans son article de 1867. Il est à noter que Franklin consacre l'année suivante un article complet aux "applications des coordonnées circulaires" [Franklin 1890a].

Dans les travaux de Darboux et de Laguerre, les propriétés géométriques des courbes permettent de démontrer ou d'interpréter des propriétés algébriques des fonctions elliptiques, tandis que dans ceux de Greenhill, le formulaire elliptique permet de démontrer des propriétés géométriques de systèmes de courbes. Le propos de Bacon dans son article de 1913, "The Cartesian Oval and the Elliptic Functions $\wp$ and σ" est double [Bacon 1913]. Elle écrit : "L'objet de cet article est de montrer que les principales propriétés des ovales cartésiennes [...] peuvent être immédiatement déduites des fonctions elliptiques $\wp$ et σ, et qu'elles donnent une interprétation géométrique des formules standard de ces fonctions". Elle établit ainsi un véritable va-et-vient entre la géométrie des ovales et l'algèbre des fonctions elliptiques.

Bacon considère

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \quad \text{et} \quad x = \wp u,$$

avec les trois racines e_1, e_2 et e_3 du polynôme cubique réelles et distinctes :

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4\,(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

La fonction $\wp$ associée est doublement périodique, de période réelle $2\omega_1$ et de période imaginaire $2\omega_2$, et elle admet 0 comme seul pôle double dans chaque rectangle des périodes. La fonction $\wp'$ vérifie

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

elle a les mêmes périodes que $\wp$, et elle admet 0 comme seul pôle triple dans le rectangle fondamental. Bacon démontre un théorème d'addition pour la fonction $\wp$. Soient u, v et w tels que u + v + w = 0, considérons c et c' tels que u et v soient solutions de l'équation

$$\wp' = c\wp + c'$$

La fonction elliptique $\wp' - c\wp - c'$ a les mêmes périodes que $\wp$, et elle admet 0 comme seul pôle triple dans chaque rectangle des périodes. Donc elle possède dans chaque rectangle trois zéros dont la somme est congrue à zéro. Par conséquent, ces zéros sont u, v et w. Chacun de ces trois points est solution de

$$(c\wp u + c')^2 = (\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

$$\text{ou } 4\wp^3 u - c^2 \wp^2 u - (2cc' + g_2)\wp u - (c'^2 + g_3) = 0.$$

Par conséquent,

$$S_1 = \wp u + \wp v + \wp w = \frac{1}{4}\, c^2.$$

$$S_2 = \wp u\ \wp v + \wp u\ \wp v + \wp v\ \wp w = \frac{1}{4}(2cc' + g_2)\ .$$

$$S_3 = \wp u\ \wp v\ \wp w = \frac{1}{4}(c'^2 + g_3)\ .$$

Ce qui permet d'obtenir le théorème d'addition suivant :

$$\left(S_2 - \frac{1}{4} g_2\right)^2 = S_1 (4\, S_3 - g_3).$$

Ce théorème permet d'obtenir les courbes qui représentent la fonction $\wp$. Notons $x = \wp u$, et supposons que u décrive une droite parallèle à l'axe des imaginaires à une distance α. Posons $u = \alpha + i\beta$ et $\bar{u} = \alpha - i\beta$. Puisque

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{4.5}\, u^2 + \frac{g_3}{4.7}\, u^4 + \dots \text{ et } g_2 \text{ et } g_3 \text{ réels,}$$

on a $x = \wp u = (\alpha + i\beta)$ et $\bar{x} = \wp \bar{u} = \wp(\alpha - i\beta)$. Appliquons le théorème d'addition à

$$u = \alpha + i\beta \text{ et } v = \alpha - i\beta \text{ et } w = -2\alpha.$$

En notant $A = \wp 2\alpha$, le théorème donne

$$\left(x\bar{x} + A[x + \bar{x}] + \frac{1}{4} g_2\right)^2 = (x + \bar{x} + A)\,(4Ax\bar{x} - g_3).$$

En examinant le coefficient de x^2, elle reconnaît là l'équation d'une quartique bicirculaire ayant les points cycliques I et J comme points de rebroussement, et dont les trois foyers simples sont e_1, e_2 et e_3, c'est-à-dire une ovale. Bacon remarque que, en échangeant les rôles de α et de β, on obtient, de la même façon, que l'image d'une droite parallèle à l'axe des réels est une ovale de foyers e_1, e_2 et e_3. Elle précise que, quand un point parcourt les droites d'abscisses α et $2\omega_1 - \alpha$, alors son image par $\wp$ parcourt la partie extérieure de l'ovale (fig.11). En effet, on a

$$\wp(\alpha + i\beta) = \wp(2\omega_1 - \alpha - i\beta)$$

De même, quand un point parcourt les droites d'abscisses $\omega_1 - \alpha$ et $\omega_1 + \alpha$, alors son image par $\wp$ parcourt la partie intérieure de l'ovale.

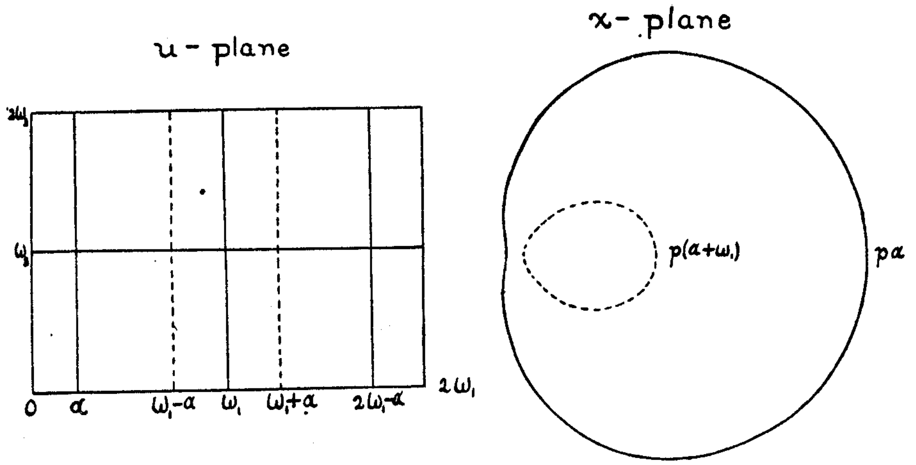

fig.11

Bacon déduit de la représentation de la fonction $\wp$ par des ovales de nombreuses propriétés des ovales, comme celle d'être l'enveloppe des cercles orthogonaux à un cercle donné et centré sur un autre cercle donné, ou comme l'invariance des ovales par inversion de pôle un foyer de la courbe, ou encore la détermination des intersections des ovales avec des cercles.

Géométrie des ovales : interprétation ou application des fonctions elliptiques ?

Dans les recherches que nous avons examinées, il s'agit toujours de relier une famille de courbes à une classe de fonctions. Mais les liens sont établis selon deux conceptions bien différentes, qui gouvernent les investigations et guident les procédures, que les mathématiciens expriment par deux termes, "interprétation" et "application". Aussi bien pour la représentation des intégrales elliptiques, que pour le théorème d'addition et la représentation des fonctions elliptiques, s'agit-il d'interpréter géométriquement les fonctions elliptiques et leurs propriétés ou, au contraire, s'agit-il d'appliquer celles-ci à la géométrie ? Cette alternative doit être examinée dans le contexte du renouveau géométrique du 19ème siècle. Elle s'inscrit dans un moment historique déterminé, celui de la rencontre de la nouvelle géométrie synthétique avec une théorie analytique féconde. L'examen spécifique des travaux reliant la géométrie des ovales et l'algèbre des fonctions elliptiques permet de saisir de manière précise cette rencontre, parmi les nombreux textes concernant aussi bien les investigations géométriques sur les courbes que les calculs sur les fonctions elliptiques. De ce point de vue, les travaux de Serret, de Darboux ou de Laguerre sont des traces chez ces héritiers de Monge de la volonté de développer et de promouvoir une géométrie pure.

La rencontre débute en 1828, avec l'application par Jacobi des fonctions elliptiques au problème de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrites à des coniques. L'article paraît en langue française en 1845, dans le Journal de Liouville. Deux ans auparavant, Chasles a jeté les bases d'un programme antagoniste : "La comparaison des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable, c'est-à-dire assignable en ligne droite, a paru jusqu'ici comme la plupart des questions de *périmètre*, devoir être exclusivement du domaine de l'analyse. Du moins, c'est par cette méthode, et comme donnant lieu à des exercices de calcul intégral, que les géomètres [...] ont traité ce sujet, qui n'est plus regardé aujourd'hui que comme une simple application de la vaste théorie des *transcendantes elliptiques*. [...] J'ai reconnu qu'en considérant ces questions sous un point de vue nouveau, on peut les traiter par la seule géométrie, et que cette méthode conduit à des résultats élégants et présente des avantages qui lui sont propres" [Chasles 1843]. Il faut noter que les démonstrations de Chasles s'appuient sur la considération de coniques homofocales, et que ses résultats s'étendent aux coniques sphériques. Ainsi, avec les ovales homofocales et les anallagmatiques, les résultats de Darboux et de Laguerre de 1867 prolongent ceux de Darboux, à l'esprit et à la lettre.

Chasles récidive l'année suivante avec "une construction géométrique des amplitudes dans les fonctions elliptiques" : "si l'on considère que tant de résultats, dont chacun exigerait en géométrie analytique, une démonstration différente et parfois difficile, dérivent aisément d'un seul théorème primitif [...], on verra, je crois, dans cette fécondité, et cette facilité de démonstration, un nouvel exemple des ressources que pourraient offrir les méthodes géométriques, si cette partie importante des sciences mathématiques était plus cultivée" [Chasles 1844]. Dans ses remarques, Liouville estime qu'il "serait bien à désirer que M.Chasles pût étendre ses ingénieuses considérations géométriques aux transcendantes d'un ordre plus élevé", car celles-ci ont de nombreuses applications. Nous avons vu que dans les années 1845-46, Liouville et Serret s'opposent sur la manière de comprendre les relations entre la géométrie des courbes et les propriétés des fonctions elliptiques, et que les recherches géométriques de Serret ont été encouragées par Chasles.

Quinze ans plus tard, c'est encore à propos du travail de Jacobi que Moutard distingue deux voies qui consistent, l'une "à chercher dans la géométrie la solution de certains problèmes d'analyse", et l'autre "à déduire de transformations faites dans un but analytique la solution de problèmes de géométrie". Il n'est pas indifférent que ces propos prennent place dans une note consacrée aux "rapprochements entre les méthodes de la géométrie pure et celles de l'analyse algébrique", parue en 1862 dans les *Applications d'analyse et de géométrie* de Poncelet [Poncelet 1862]. Elle fait suite à une "note historique, critique et philosophique" où Poncelet, examinant les différents théorèmes sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques distingue deux classes de géomètres, "souvent étrangères par le langage et dès lors rivales, hostiles l'une à l'autre". Il y a ceux comme Chasles et Steiner, qui imaginent de nouveaux principes généraux de démonstrations, et ceux comme Gergonne, Mobiüs et Plücker, qui recourent à de nouvelles transformations des figures. Ces géomètres sont français ou allemands. Mais il existe aussi une troisième classe de mathématiciens, qui "trop peu soucieux de la simplicité rigoureuse et de la clarté des anciens, se sont exclusivement livrés aux aspirations abstraites de l'analyse algébrique", et ils sont le plus souvent anglais ou italiens, comme Sylvester, Cayley, Salmon ou Brioschi.

Les propos de Poncelet sont polémiques et ils forcent les distinctions et les rivalités. Cependant, il est clair que dans leurs articles de 1867, Darboux et Laguerre se situent, le premier implicitement et le second plus explicitement, comme héritiers de Poncelet et de Chasles. Il apparaît aussi que leurs travaux soient étrangers à ceux des mathématiciens anglophones, et réciproquement. Même les dénominations des courbes considérées sont diverses, et elles correspondent à des manières différentes de concevoir les courbes. Le terme d'anallagmatique renvoie à leur propriété d'être invariantes par une transformation, dont Poncelet aime à rappeler qu'elle se rapporte à la très ancienne méthode anamorphique. Le terme de quartique bicirculaire exprime un classement algébrique des courbes selon leur ordre et leur position par rapport aux points cycliques. Enfin, le partage géographique que suggère Poncelet tient assez bien, lorsqu'il s'agit de géométriser ou bien d'appliquer les fonctions elliptiques.

Dans sa préface à l'édition des *Œuvres* de Laguerre, dont le premier tome paraît en 1898, Poincaré salue en Poncelet et Chasles les "initiateurs de la nouvelle réforme" : "Grâce à eux, ce n'est plus ni à un hasard heureux, ni à un longue patience que nous devons demander la solution d'un problème, mais à une connaissance approfondie des faits mathématiques et de leurs rapports intimes. Les longs calculs d'autrefois sont devenus inutiles, car on peut le plus souvent en prévoir le résultat". Il explique que Laguerre a joué un rôle important dans cette "réforme", par exemple à propos des propriétés sur les courbes et les surfaces anallagmatique. Pour Poincaré, "le célèbre théorème de Poncelet est une interprétation géométrique lumineuse de l'addition des arguments elliptiques", que Laguerre a encore éclairci. Il écrit que le théorème d'addition "si compliqué sous sa forme algébrique, est remarquablement simple et élégant sous son nouveau vêtement géométrique" [Laguerre 1898, p.IX]. Même si le sentiment de Poincaré nous est devenu étranger, la lecture historique contextualisée de travaux du 19ème siècle permet de montrer qu'il est bien présent tout au long de ce siècle, et qu'il a été le moteur de nombreuses investigations.

Bibliographie

ABEL, Niels Henrik

[1827] Recherches sur les fonctions elliptiques, *Journal von Crelle*, Bd.2-3, Berlin, 1827-28, *Œuvres complètes*, éd. Sylow et Lie, Christiania, 1881, tome I, p.263-388.

ALLÉGRET, M.,

[1873] Mémoire sur la représentation des transcendantes, *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, deuxième série, tome II, 1873, p.149-200.

APPELL, P., et LACOUR, E.,

[1896] *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications* (1896), 2ème éd., Gauthier et Villars, Paris, 1922.

BACON, Clara,

[1913] The Cartesian Oval and the Elliptic Functions $\wp$ and σ, *American Journal of Mathematics*, vol.XXXV, 1913, p.261-280.

BARBIN, Evelyne,

[1998] La méthode analytique de Descartes et l'évidence comme détermination de la vérité, in *Analyse et démarche analytique*, IREM de Reims, 1998, p.79-101.

BARBIN, Evelyne, et GUITART, René,

[1998] La pulsation entre les conceptions optiques, algébriques, articulées et projectives, des ovales cartésiennes, in *L'océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoise, européennes et indiennes*, IUFM de La Réunion, 1998.

BELHOSTE, Bruno

[1996] Autour d'un mémoire inédit : la contribution d'Hermite au développement de la théorie des fonctions elliptiques, *Revue d'histoire des mathématiques*, 2, p.1-66.

BERNOULLI, Jacques,

[1694] Solutio Problematis Leibnitiana, de Curva accessus recessus aqualibilis a puncto dato, mediante rectificatione curvae elasticae, *Acta Eruditorum*, juin 1694, p.262-276.

BERTRAND, Joseph,

[1875] *Cours d'Analyse*, Ecole Polytechnique, année 1875-76.

BOS, H.J.M., KERS, C., OORT, F., RAVEN, D.W.

[1987] Poncelet's closure theorem, *Expositiones Mathematicae*, 5, 1987, p.289-364.

CASEY, D.,

[1869] On the Bicircular Quartics, *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol.XXIV, p.457, 1869.

CAYLEY, Arthur,

[1853] Note on the geometrical representation of the integral, *Philosophical Magazine*, vol.V, 1853, p.281-284.

[1876] *An elementary treatrise on elliptic functions*, Deighton, Bell and Co, Cambridge, 1876.

[1889] A correspondance of confocal cartesians with the right lines of a hyperboloïd, *Messenger of Mathematics*, 1889, p.128-130.

CHASLES, Michel,

[1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 3ème éd., Gauthier-Villars, Paris, 1889.

[1843] Propriétés générales des arcs d'une section conique, dont la différence est rectifiable, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XVII, 1843, p.838-844

[1844] Construction géométrique des amplitudes dans les fonctions elliptiques – Propriétés nouvelles des sections coniques, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XIX, p.1239-1261.

[1870] *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Imprimerie nationale, Paris, 1870.

CROFTON, M. W.,

[1866] On Certains Properties of the Cartesian Ovals, treated by the Method of Vectorial Co-ordinates, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol.I, 1865-66, p.5-18.

DARBOUX, Gaston,

[1864a] Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome LIX, 1er août 1864, p.240-242

[1864b] Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré, *Nouvelles annales de mathématiques*, 2ème série, tome 3, 1864, p.199-202.

[1865] Recherches sur les surfaces orthogonales, *Annales de l'Ecole normale supérieure*, tome II, 1865, p.54-69.

[1866] Sur les surfaces orthogonales, *Annales de l'Ecole normale supérieure*, tome III, 1866, p.97-141.

[1867] Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques, *Annales de l'Ecole normale supérieure*, tome IV, 1867, p.81-91.

[1873] *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1873.

[1878a] Sur la rectification des ovales de Descartes, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome LXXXVII, juil-déc. 1878, p.595-597.

[1878b] Addition à la note sur la rectification des ovales de Descartes, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, tome LXXXVII, juil-dec. 1878, p.741.

[1880] Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome LXXXX, 1880, p.85-87.

[1905] *Étude sur le développement des méthodes géométriques*, Conférence à St-Louis en sept.1904, Gauthier-Villars, Paris, 1905, p.5-34.

DESCARTES, René,

[1637] *Discours de la méthode* (1637), rééd. Fayard, Paris, 1987.

D'ESCLAIBES, P.Robert,

[1880] *Sur les applications des fonctions elliptiques à l'étude des courbes du premier genre,* Thèse, Paris, Gauthier-Villars, 1880.

DU VAL, Patrick,

[1973] *Elliptic Functions and Elliptic Curves*, Cambrige University Press, 1973.

EISENSTEIN, G.

[1847] Genaue Untersuchungen der unendlichen Producte, aus welchen de Elliptische Funktionene als Quotienten Zusammengesetzt sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tome XXXV, 1847, p.153-274.

EULER, Leonhard,

[1761] De integratione aequationis differentialis, *Novi commentarii academae scientiarum Petropolitanae* (1756/7), 1761, p.37-57, *Opera Omnia*, 1912, vol.XX, p.58-79.

FAGNANO, G.C.,

[1718] Metodo per misurare la lemnistaca, *Gionali de'letterati d'Italia*, 29, 1718, *Opere mathematiche*, II, p.293-313.

FRANKLIN, F.,

[1889] Note on the Double Periodicity of the Elliptic Functions, *American Journal of Mathematics*, vol.XI, 1889, p.283-292.

[1890a] On Some Applications of Circular Coordinates, *American Journal of Mathematics*, vol.XII, 1890, p.161-190.

[1890b] On confocal Bicircular Quartics, *American Journal of Mathematics*, vol.XII, 1890, p.323-336.

GAUSS, Carl-Friedrich,

[1799] *Recherches arithmétiques*, trad. Poullet-Delisle, Courcier, Paris, 1807, reprod. Blanchard, Paris, 1953.

[1981] *Werke*, vol.X, Georg Olms Verlag, Hidelsheim - New York 1981.

GENOCCHI, A.,

[1875] Sur la rectification des ovales de Descartes, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, tome LXXX, janv.-juin 1875, p.112-115.

GOMES TEIXEIRA, Francisco,

[1908] *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Imprimerie de l'Université, Coïmbra, 1908.

GREENHILL, Alfred George,

[1881] On conjugate functions of Cartesians and other Quartics, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol.I, 1880-83, p.77-92.

[1886] Some applications of Weierstrass's Elliptic functions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol.XVII, 1885-86, p.355-379.

[1895] *Les fonctions elliptiques et leurs applications*, Carré, Paris, 1895, reprod. Gabay, Paris, 1993.

GRIFFITHS, Philippe, HARRIS, Joseph,

[1978] On Cayley's explicit solution to Poncelet's theorem, L'enseignement mathématique, IIe série, tome XXIV, 1978, p.31-40.

HERMITE, Charles,

[1870] *Résumé du cours d'Analyse de l'École polytechnique*, 1870-71, reprod. Ellipses, Paris, 1996.

[1873] *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris, 1873.

HOUZEL, Christian,

[1978] Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes, in DIEUDONNÉ, J., *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, vol.II, Hermann, 1978, p.1-113.

JACOBI, Carl GustaveJacob,

[1828] Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elemtargeometrie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tome III, 1828, p.376-389

[1845] Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome X, 1845, p.435-44.

[1881] *Gesammelte Werke*, Reimer, Berlin, 1881-1891, vol.1.

KLINE, Morris,

[1972] *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

KUMMER, Ernst Eduard,

[1852] Sur les systèmes de courbes algébriques planes qui se coupent orthogonalement et sur leur confocalité, *Nouvelles Annales de mathématiques*, tome XI, 1852, p.426-434.

LAGUERRE, Edmond,

[1898] *Œuvres*, tome I (1898), Académie des Sciences, réédition Chelsea Publishing Company Bronx, New York, 1972.

[1905] *Œuvres*, tome II (1905), Académie des Sciences, réédition Chelsea Publishing Company Bronx, New York, 1972.

LAMÉ, Gabriel,

[1837] Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome II, 1837, p.147-183.

[1840] Mémoire sur les coordonnées curvilignes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome V, 1840, p.313-347.

LEGENDRE, Adrien-Marie,

[1793] *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, du Pont et Didot, Paris, 1793.

[1825] *Traité des fonctions elliptiques*, Paris, vol. II, 1825.

LIOUVILLE, Joseph,

[1880] Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tome LXXXVIII, 1880, p.277-280.

MACKAY, J.S.

[1887] Historical Notes on a geometrical theorem and its developments, *Proceedings of the Edinbourgh Mathematical Society*, vol. V, 1886-1887, p.62-78.

MANNHEIM, Amédée,

[1862] Sur les arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2ème série, tome VII, 1862, p.121-135.

MITTAG-LEFFLER, Magnus Gösta,

[1876] *En metod att komma i analytisk besiining af de Elliptiska Funktionerna*, Dissertation, Imperial Alexander University, Finland, mars 1876.

MOUTARD, M.

[1864a] Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques, *Nouvelles Annales de mathématiques* , 2ème série, t.III (1864), p.306-309.

[1864b] Sur les surfaces anallagmatiques du 4ème ordre, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 2ème série, t.III (1864), p.536-541.

PONCELET, Jean-Victor,

[1862] *Applications d'analyse et de géométrie*, Mallet-Bachelet, Paris, 1862.

[1865] *Traité des propriétés projectives des figures*, 2éme édition, Gauthier-Villars, Paris, 1865.

QUÉTELET, Adolphe,

[1825] Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, *Mémoires Acad. de Bruxelles*, tome III, 1825, p.3-35.

[1829] Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires, *Mémoires Acad. de Bruxelles*, tome V, 1829, p.2-52.

ROBERTS, William,

[1843] Sur une représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome VIII, 1843, p.263-264.

[1845], Mémoire sur quelques propriétès géométriques relatives aux fonctions elliptiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome X, 1845, p.297-315.

[1850] Théorème sur les arcs des lignes aplanétiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome XV, 1850, p.194-196.

SALMON, Georges

[1879] *A Treatrise on the Higher Plane Curves*, Chelsea Publishing Company, 3ème éd., 1879.

SERRET, J. Alfred,

[1843a] Note sur les fonctions elliptiques de première espèce, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome VIII, 1843, p.145-154.

[1843b] Propriétés géométriques relatives à la théorie des fonctions elliptiques, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome VIII, 1843, p.495-501.

[1845] Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome X, 1845, p.257-293.

[1846] Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première classe, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XI, 1846, p.89-95.

SIEBECK

[1860] Ueber eine Gattung von Curven vierten grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammmenhängen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tome LVII, 1860, p.359-370.

[1861] Ueber eine Gattung von Curven vierten grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammmenhängen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tome LIX, 1861, p.173-184.

VLADUT, S.G.,

[1991] *Kronecker's Jugendtraum and modular functions*, Gordon and Breach, 1991.

WEIERSTRASS, Karl,

[1856] Theorie der Abelschen functionen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tome LII, 1856, p.62 et suiv.

[1892] *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der Elliptischen Functionen*, Schwarz, Berlin, 1892.

WEIL, André,

[1976] *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, NewYork, 1976.

WHITTAKER, E.T., et WATSON, G.N.,

[1902] *A course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1902.