LIEUX ET LOGIQUES : SUR LA PULSATION DU VOIR ET DU DIRE DANS L'IMAGINAIRE DU MATHEMATICIEN AU TRAVAIL[1]

René Guitart (Université Paris 7)

1-IMAGINAIRE. MATHEMATIQUE. TRAVAIL — L'imaginaire *c'est* l'exercice du lien, *quand* — dirais-je à la manière de Jacques Lacan, excellent logicien — *ce qui pense croit aux rapports*.

L'imagination mathématique est *imagination de preuves*.

Au moment hasardeux de l'invention risquée du lien neuf, c'est la bonne écriture et l'impossible qui sont convoqués dans l'imaginaire, par la volonté d'intelligence.

L'intelligence est d'abord la capacité de se mettre au travail, d'être *attentif* à ce qui s'imagine.

In fine ce à quoi le génie mathématique travaille, le désir au cœur du mathématicien : imaginer l'imagination.

Le lien donc : ce dans quoi le mathématicien au travail est jusqu'au cou. En mathématique, la substance des objets est prétexte à imaginer, mais le vrai motif reste la preuve, soit le fait même de faire du lien, plutôt que l'imagination d'objets, lesquels sont secondaires, prétextes à preuves. Par exemple, voir le mouvement, voir le mouvement de la pensée, voir la pensée comme mouvement entre des rapports, c'est de l'imaginaire, du lien et de l'imagination du lien. Et dire ce mouvement que l'on verrait soi-disant, ou aussi bien prétendre qu'il n'y a pas de rapport possible, ce n'est pas seulement une tromperie réelle qui laisse une trace littérale, mais c'est aussi la mise en œuvre explicite de la croyance illusoire à la transmission comme mise en relations de choses, pensées et mots. Illusion nécessaire, bien sûr. L'affaire de cet extraordinaire ratage de la transmission, soit de l'imaginaire qui est en cours, est à considérer proprement hors romantisme esthétisant, strictement au point de

---

[1] Conférence le 12 janvier 2006, au Colloque *Sciences et Imaginaires*, 12-13 janvier 2006, Mundaneum & Université de Mons-Hainaut.

l'intelligence humaine, froide. La pensée des indéfinis raboutages et dénouages du lien, de l'organisation re-présentative en général des mondes de pensées, cela s'appellerait peut-être la mathématique. Henri Bergson proposait que « notre représentation des choses naîtrait, en somme, de ce qu'elles viennent se réfléchir contre notre liberté »[2] ; posons dans le même fil : la re-présentation résulte du télescopage de notre déplacement dans l'imaginaire, monde ouvert des liens possibles, avec les contraintes que le réel y fait surgir comme par hasard. De ce point de vue, les applications dans la réalité, à tort confondue avec le réel ou le pointage d'impossible, et les questions de formalisations rigoureuses, à tort encore confondues avec les enjeux symboliques ou de bonnes écritures, sont, aux mathématiques, secondaires, et n'interviennent que lorsqu'il s'agit de leurs vérifications comme savoirs assurés. La question est d'imaginer et rigoureusement noter ce qu'on imagine, ce que l'on coupe et ce que l'on colle. Le mathématicien à ceci de particulier qu'il s'intéresse à cette intelligence-là, souci qui n'en fait évidemment pas quelqu'un de plus intelligent que d'autres ; simplement, il travaille à l'intelligence, au lien, et un bon mathématicien, un intégrateur — s'il en était — travaillerait intelligemment à l'intelligence, imaginerait fructueusement l'imagination pure. Et il y a quelque chose de paradoxal dans cette « attention», de devoir aussi être « zen », calme, effacé, distraite[3], d'une « distraction » qui n'est pas celle que critique Joseph Jacotot[4].

2-VOIR ET DIRE. DIAGRAMMES — Rapportant ce qu'il entend des conceptions de Joseph Jacotot, Jacques Rancière écrit, notamment : « L'acte de l'intelligence est de voir et de comparer ce qu'elle voit. Elle voit d'abord au hasard. Il lui faut chercher à répéter, à créer les conditions pour voir à nouveau ce qu'elle a vu, pour voir des faits semblables, pour voir des faits qui pourraient être la cause de ce qu'elle a vu. Il lui faut aussi former des mots, des phrases, des figures, pour dire aux autres ce qu'elle a vu »[5].

Jean-Clet Martin écrit que pour Michel Foucault, suivant le livre que Gilles Deleuze lui consacre, pour aller à

[2] H. Bergson, *Matière et mémoire*, PUF, 1968, p. 34.

[3] R. Guitart, *Sur les places du sujet et de l'objet dans la pulsation mathématique*, in *Revue du centre de Recherche en Éducation, Questions Éducatives, L'École et ses marges*, n°22-23, Didactique des mathématiques, Publications de l'Université de Saint-Étienne, 2003, 49-81, p. 61.

[4] J. Rancière, *Le maître ignorant. Cinq leçons sur l'émancipation intellectuelle*, 10-18 n°3730, 2004, Fayard 1987.

[5] *Le maître ignorant*, p. 94-95.

l'essentiel, le problème consiste à : « déterminer le rapport des visibilités (espace-temps) aux énoncés et mots d'ordres (concepts) »[6]. « Ce qu'on voit ne se logeant jamais dans ce qu'on dit, la conjonction paraît impossible. Il y a coupure radicale et pourtant rapport dans le non-rapport […] le visible et l'énonçable, ces deux formes, s'insinuent l'une dans l'autre comme dans une bataille, ou mieux, comme dans un coup de dé ».

In fine, il y a identification dans le texte mathématique entre l'espace discursif que constitue en se développant le texte, et tout autre espace dont le texte traiterait.

C'est comme pour une certaine musique : il y a un même plaisir à écouter les variations Goldberg ou à lire les calculs de Lagrange sur la résolution des équations par séries. On y investit l'effet ouvert d'un même déplié nécessaire.

Il y faut quelque chose du diagramme, le diagramme étant considéré comme ce qui se dit *et* se voit.

Dans l'après-coup de l'énoncé, toute discursivité évacuée, ne nous reste que la logique élémentaire ; et le visible ne laisse au-delà des regards que le diagrammatique ; et ce n'est pas rien. Précisons qu'« entre la logique élémentaire et une poétique diagrammatique capable d'appeler des mutations, la relation est celle du dedans et du dehors, combat de l'interne et de l'externe, de l'organique et de l'inorganique »[7]. C'est là, ou point d'accouplement du logique et du diagrammatique, que le mathématicien travaillera à voir et dire le lien. Il s'agira d'imaginer discours et figures du lien, d'en produire raisons et formes, et rapports et pulsations d'icelles.

Un texte mathématique se propose ainsi à voir comme un espace, en lieu et place d'un autre dont il traiterait. L'entendement se donne là à voir à soi-même, au point de son procédé. C'est ainsi que nous comprenons Jean-Pierre Cléro qui écrit : « Il se pourrait bien que l'un des plus grands intérêts à lire les textes mathématiques […] soit un plaisir de déployer des espaces à partir de signes. […] parce que les espaces qu'il [l'esprit] y trouve sont, en partie, des espaces qui le constituent »[8]. Le voir mathématique est le reste mathématique du regard, la figure fait trace en raisons de l'image ; le dire mathématique est le reste mathématique du discours, l'algorithme fait trace en raisons de la parole. Puis image et parole, réduits en figures et

[6] J.-C. Martin, *La philosophie de Gilles Deleuze*, PBU n°563, Payot 2005, Payot & Rivages 1993, p. 162.

[7] *La philosophie de Gilles Deleuze*, p. 216.

[8] J.-P. Cléro, *Les raisons de la fiction*, Armand Colin, 2004, p. 438-439.

algorithmes, se confondent en graphique, ou, comme disent les mathématiciens aujourd'hui, en diagrammes. In fine, le texte mathématique est un diagramme, qui montre et parle des diagrammes. Tout ce que le mathématicien pense entre aussitôt dans un processus d'auto-éviction, d'évidement, de réduction au diagrammatique, aux effets fonctionnels, là où les objets ne sont plus des corps substantiels mais des signes de croisements dans des réseaux. Le diagramme vu et dit, point focal du voir en dialogue. Sur le diagramme, le mathématicien pivote de logique à géométrie, de dire à voir, et inversement, et c'est cette pulsation qui nous intéresse ici. Il n'y a pas nécessité d'imaginer d'abord des sujets et ensuite pour chacun des facultés de voir et dire déposées en eux par l'esprit de la raison. On pourrait aussi considérer, à la manière de Johnny Robert[9], d'abord des « voir » et « dire », desquels émergeraient corps et mondes.

3-STRUCTURES PHYSIQUES. VOIR LE CHAOS — Dans l'histoire mathématique, d'abord, dans l'antiquité grecque, le logique fait preuve avec le géométrique qui atteste. Dire, voir et compter sont alors les trois motifs distincts de preuves, relevant de trois physiques : la profération de paroles, l'occupation des lieux, le passage des instants ou l'égrènement de petits cailloux ; voire de trois arts, de trois imaginations : poésie, dessin, musique. La question de l'imagination proprement mathématique serait donc celle du lieu commun mathématique de ces trois imaginations.

La preuve est logico-géométrique, dans un plan « grec » continu proposé à un voir acéré, à dire ; à Babylone, et dans la chine ancienne, la suffisante conviction tient à la réussite à chaque coup vérifiable du procédé de calcul, dans un plan « chinois »[10] discret d'écoute attentive, à comptabiliser à vue.

Question d'un lieu commun, au prix d'une perte assumée du propre de chacune des trois imaginations. Aujourd'hui — mais en arriver à une telle formulation prend du temps et fait bien des histoires — on dirait peut-être : imaginer le structurel commun. Question : comment l'imagination mathématique est-elle devenue l'imagination des structures ?

---

9 J. Robert, *Lieux et logiques : Voir en dialogue. Des accords du visible*, in Colloque *Sciences et imaginaires*, 12-13 janvier 2006, Mundaneum & Université de Mons-Hainaut.

10 R. Guitart, *Sur les places du sujet et de l'objet dans la pulsation mathématique*, in *Revue du centre de Recherche en Éducation, Questions Éducatives, L'École et ses marges*, n°22-23, Didactique des mathématiques, Publications de l'Université de Saint-Étienne, 2003, 49-81, p. 72.

En tous cas, en ses origines la mathématiques traiterait de trois structures physiques, et imaginerait ainsi le monde, en ferait un ordre possible, une « structure » comme on dit aujourd'hui. Galileo Galilei fermera cette procédure en avançant que l'univers « est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans l'intermédiaire desquels il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot »[11]. Cela signifie qu'à la science il attribue la mathématique (c'est-à-dire, pour lui, la géométrie) comme imagination, et que par là il détermine la « science moderne ». Mais il y fallait encore le remplacement cartésien de la vérité logico-géométrique par la vérité propre du calcul. On connaît, depuis, la suite des rapprochements et éloignements fructueux qui ont eu lieu entre la mathématique et la physique, chacune servant d'imaginaire à l'autre, y compris jusqu'à l'erreur féconde. En tout état de cause, nous avons une pulsation d'imaginaires : les sciences de toutes sortes sont un vivier de prétextes de hasards à mathématiques, comme les mathématiques sont ressources virtuelles pour ces sciences. Mais je voudrais laisser cette pulsation à son rôle de prétexte crucial — le prétexte de voir le chaos, c'est-à-dire de faire monde. Et il resterait à pointer l'imaginaire propre de l'acte de chaque science, et l'imaginaire propre de l'acte mathématique, nonobstant ses prétextes externes, au point où, précisément, il s'agit de la mathématique même et de ses motifs internes. Même si l'on croit que la mathématique émerge d'un vouloir voir en monde, ensuite elle se poursuit du fait de vouloir se voir elle-même, de vouloir s'imaginer. Quand la mathématique refuse d'être à elle-même un chaos.

4-PREUVE ALGEBRIQUE. VERITE — La mathématique arabe invente l'« algèbre » qui tient ensemble l'arithmétique et le géométrique, d'une même disposition de noms, d'un même régime de manipulations desdits noms : al-jabr et al-mukabala.

Avec le calcul, le garant est donc la géométrie de l'écriture, et la preuve d'une situation diagrammatique est le système de ses parcours.

L'imagination nouvelle du chercheur sera l'imagination de la pénétration dans les diagrammes et l'imagination de leurs déploiements, imaginations dans l'écriture et son acte.

---

[11] Galilée, *L'essayeur*.

On arrive ainsi, sous le nom de calcul diagrammatique, à un point d'identification majeure entre la vérité, sa preuve et son imagination.

Invention arabe de l'algèbre, qui pose pour toujours l'occasion de transferts d'imagination entre l'arithmétique et le géométrique, la vérité restant cependant encore l'apanage de la géométrie. Mais s'observe[12,13], au tournant des 16ème et 17ème siècles, de Girolamo Cardano à René Descartes, comment cela bascule, comment émerge la preuve algébrique quand la géométrie ne peut plus ou ne doit plus servir de garant de rigueur. La preuve devient alors, dirais-je, « algébrique » voire « diagrammatique » en fait, résultant des seuls effets surveillés d'apparitions et disparitions dans un jeu de couper-coller dans des écritures.

Les parcours qui valent pour des dires, qui ne sont pas sans leurs propres règles d'agencements géométriques, à annoncer, à figurer, etc. Sans oblitérer les anciennes ressources, logiques ou géométriques, on comprend que le dire et le voir étendent ainsi leurs espaces imaginaires à ce qui leur est commun ; de la sorte la solution de continuité dans l'imaginaire entre voir et dire s'évanouit.

Dès lors que ce qui vaut pour preuve est l'algèbre la plus générale, soit le calcul en méthode à partir d'éléments simples posés et disposés, que « toute la science humaine consiste uniquement à voir d'une manière distincte comment ces natures simples concourent ensemble à la composition des autres choses »[14], dès lors donc l'imaginaire sera la constitution, de scansions et concaténations, du monde de la combinatoire générale. Imaginer mathématiquement se souligne de gestes d'invasions et évasions de ce monde. Je dirai que la preuve algébrique atteint le stade du diagrammatique quand précisément elle se décharge des significations de ses signes et se charge de sa propre organisation, dont elle fait de nouveaux signes en elle. Il s'agit donc encore d'imaginer quels gestes du calcul sont pertinents au point de devenir expressément des éléments sur lesquels à leurs tours on calculera. Ce dont je propose d'entendre que la conscience et la mathématique est dégagée maintenant, après d'autres affaires de fondement ensemblistes et une longue histoire, par la théorie mathématique des catégories[15]. Mais laissons cela ; le point à

---

[12] B. Larvor, Proof in C17 algebra', in *Fonder autrement les mathématiques*, Philosophia Scientiæ, Cahier spécial 5, Éd. Kimé, 2005, 43-59.

[13] E. Barbin, *L'héritage du troisième degré : Cardan, Viète, Descartes*, in *La pensée scientifique de Girolamo Cardano*, Les Belles lettres, à paraître en 2006.

[14] R. Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. Sirven, vrin, Paris, 1970, p. 92.

[15] R. Guitart, *La structuration catégoricienne comme calcul des gestes mathématiques*, in *Colloque Impact des catégories. 60 years of category*

l'instant est que, si la preuve, c'est-à-dire le lieu même de l'illusion mathématicienne, l'imaginaire mathématique en personne, est désormais dans le calcul diagrammatique, il faut bien, que la vérité soit celle de Descartes[16,17], l'évidence qui nous tombe dessus dans l'acte du calcul, le tomber pile d'une écriture sur une intuition.

5-PULSATION ENTRE MONTRER ET DEMONTRER — L'idée de *pulsation mathématique*[18] en générale est ceci : un « geste de pensée » très spécial, que le mathématicien sait faire, et qui consiste paradoxalement en un va-et-vient permanent entre sens et non-sens, entre maîtrise et abandon, et relève d'une profonde ironie vis-à-vis de l'égalité et de l'identité.
Le but de la mathématique est de « voir ce que l'on dit, dire ce que l'on voit[19], c'est impossible intégralement : entre voir ce que l'on pense et dire ce que l'on pense, il y a une dialectique non-résolutive »[20].

Dans la démonstration mathématique, l'action de pensée touche à l'oreille et à l'œil, indissociables, mobilisés en vue de produire l'évidence : plus rien à dire de ce que l'on voit, plus rien à voir sauf ce qui est dit. « Lisez et regardez les démonstrations non pas comme preuves seulement, mais comme mises en scènes de monstrations [..] Q'une démonstration emporte la conviction, c'est bien sous condition que l'encore invisible (impossible à montrer) y soit, par un jeu invisible aussi rendu visible, sous réserve que le purement monstratif y soit à la fois masqué et éclatant »[21].

Theory in Historical and Philosophical Retrospect. Paris. École Normale Supérieure, October 10-14, 2005.

[16] E. Barbin, *La méthode analytique de Descartes et l'évidence comme détermination de la vérité*, in *Analyse & démarche analytique. Les neveux de Descartes.* Actes du 11ème colloque inter-irem épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Reims, 10-11 mai 1996. Éd. IREM de Reims.

[17] R. Guitart, *Évidence et étrangeté. Mathématique, psychanalyse, Descartes et Freud*, PUF, 2000.

[18] R. Guitart, *La pulsation mathématique, rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire*, L'Harmattan, 1999.

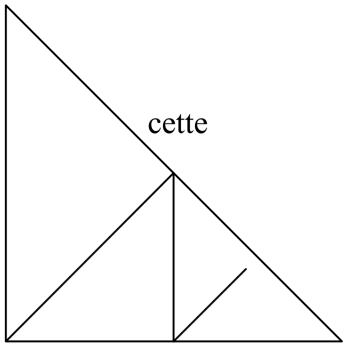
[19] R. Guitart, *Voir ce qu'on dit, dire ce qu'on voit*, *Bulletin de l'APMEP*, N°431, nov-déc. 2000,pp. 793-812.

[20] *La pulsation mathématique,* p. 162.

[21] *La pulsation mathématique,* p. 161.

6- VOIR ET DIRE LA SERIE GEOMETRIQUE — Considérons le dessin ci-après : il donne à voir un demi-carré de côté 2, d'aire 1, et à voir cette aire comme la somme infinie que l'on écrit :

1 = 1/2+1/4+1/8+…



On peut aussi « prouver » cette formule en « disant » :

S =1/2 +1/4 +1/8+…
2S =1 +1/2 +1/4+…
2S-S= 1+1/2-1/2+1/4-1/4+…
S = 1.

Ainsi on a deux intuitions, l'une géométrique, à voir, et l'autre algorithmique, qui peut se dire.

Nous laissons au lecteur le *plaisir de prouver* lui-même que, pour tout entier b > 0 on a :

$$1/b = 1/(b+1) + 1/(b+1)^2 + 1/(b+1)^3 + \dots$$

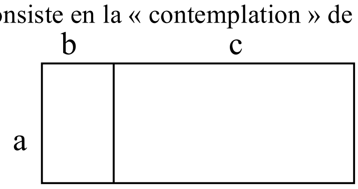
(nous venons de voir la preuve de cette formule de sommation dans le cas b = 1 ; le cas b quelconque se fait de même).

Dans l'imaginaire du mathématicien au travail, cette « évidence » de la sommation de la série géométrique demeure une image-ressource cruciale, un savoir-faire, un geste disponible. Et simultanément beaucoup de la mathématique peut être compris comme participant de la « critique » de l'une ou l'autre de ces preuves.

7- DISTRIBUTIVITE ET ASSOCIATIVITE — On connaît la formule de distributivité de produit sur sommes d'entiers :

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c.$$

La preuve visuelle consiste en la « contemplation » de la figure



En revanche, la preuve discursive algorithmique, pour des entiers, serait basée sur la donnée du nombre 0, de l'opérateur suc qui a un entier n associe son successeur noté suc(n) (et qui, après définition de l'addition, s'avérera être suc(n) = n+1, en notant 1 = suc(0)), le principe de récurrence [qui assure qu'une propriété d'entiers est vraie pour tout entier n si elle est vraie pour 0 et si, pour tout entier n, elle est vrai pour suc(n) dès qu'elle l'est pour n], puis la donnée de la définition « par récurrence » de l'addition + et du produit ×, par les schémas de définition :

$$m+0=_{def} m, \qquad m+suc(n) =_{def} suc(m+n),$$
$$m\times 0 =_{def} 0, \qquad m\times suc(n) =_{def} m\times n+m.$$

La preuve de la distributivité du produit sur la somme, suivant le principe de récurrence (sur la variable c) se réduit alors à constater que $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$ est vrai pour $c = 0$, soit

$$a\times(b+0) = a\times b + a\times 0,$$

puis à montrer, supposant que l'on ait

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c,$$

que l'on a alors

$$a\times(b+suc(c)) = a\times b + a\times suc(c).$$

Or cela se transforme en

$$a\times suc(b+c) = a\times b + a\times suc(c),$$
$$(a\times(b+c))+a = a\times b + (a\times c+a),$$
$$(a\times b + a\times c)+a = a\times b + (a\times c+a).$$

Ce dernier point à son tour est vrai comme cas de l'associativité de la somme qui s'écrit, pour u, v et w quelconque : $(u+v)+w = u+(v+w)$, ce qui, à son tour, se prouve par récurrence (sur w), en constatant que $(u+v)+w = u+(v+w)$ est vrai pour $w = 0$, soit

$$(u+v)+0 = u+(v+0),$$

puis que, si l'on assume $(u+v)+w = u+(v+w)$, alors on a

$$(u+v)+suc(w) = u+(v+suc(w)),$$

ce qui se vérifie par les transformations

$$suc((u+v)+w) = u+(suc(v+w)),$$
$$suc((u+v)+w) = suc(u+(v+w)).$$

On appréciera la géométrie de cette page de calcul.

8- L'IRRATIONALITE DE e — Le mathématicien au travail disposant de la sommation de série géométrique, de la distributivité et l'associativité, est en position de poursuivre son rêve. En voici un cas important.

On considère le nombre e qui vaut approximativement 2,718 …, et précisément donné par l'algorithme d'une série

$$e = 1+1/2 +1/6 + 1/24+ \dots .$$

soit

$$e = 1+1/2 +1/(2.3) + 1/(2.3.4)+ \dots .,$$

soit, en notant $n! = 1.2.3 \dots .n$,

$$e = 1+1/2! +1/3! + 1/4!+ \dots .$$

En réalité, ce nombre est le nombre précis tel que la surface entre l'axe des x et le graphe de la courbe $y = 1/x$, et entre les abscisse 1 et e soit égale à 1. Nous laissons le lecteur se renseigner ailleurs sur ce point géométrique de la théorie des logarithmes et exponentielles, par où le côté « visuel » de l'entité e apparaît. Nous laissons aussi le

lecteur démontrer par lui-même que $2 < e < 3$, si bien que e n'est pas entier, par où il s'habituera à « dire » e.
En fait, on peut faire mieux que prouver que e n'est pas entier, et prouver que e *n'est pas rationnel*, c'est-à-dire n'est pas de la forme $e = a/b$, avec a et b entiers.
En effet en posant

$$v = 1+1/2 +1/3! + 1/4!+ \ldots +1/b!,$$

si l'on avait

$$e = a/b,$$

alors le nombre

$$w :=b!(e-v)$$

s'écrirait

$$w = a(b-1)! -[b(b-1)\ldots 5.4.3 + b(b-1)\ldots 5.4+\ldots+1],$$

et il *serait entier*.
Mais

$$w = b!.[1/(b+1)!+ 1/(b+2)!+\ldots\ ]$$

n'est pas entier, car,

$$w = 1/(b+1) +1/(b+1)(b+2) +1/(b+1)(b+2)(b+3)+\ldots,$$

et en comparant termes à termes avec la série géométrique

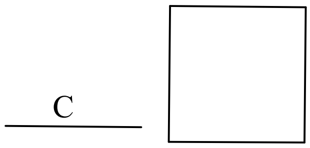
$$1/b = 1/(b+1) +1/(b+1)^2 +1/(b+1)^3+\ldots$$

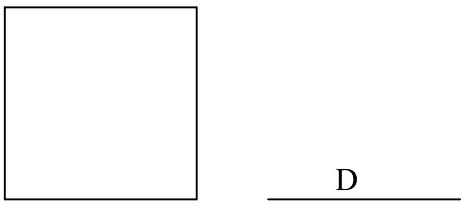
on obtient

$$0 < w \leq 1/b < 1.$$

Et ainsi est prouvé que w *n'est pas entier*, car il n'y a pas d'entier strictement entre 0 et 1.
Finalement, l'écriture $e = a/b$ est donc prouvée impossible.

9- LA DUPLICATION DU CARRE — Mais revenons à des préoccupations antiques, où précisément le mixte entre paroles et figures est posé comme tel d'emblé.
On demande, étant donné un carré sur une ligne donnée C, de construire un carré d'aire double, sur une ligne à trouver D.

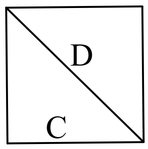


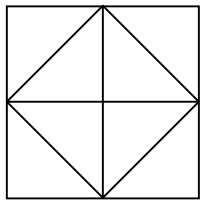


Le problème est considéré dans le *Ménon*, où Socrate « accouche » un jeune esclave, « géomètre à son insu », le fait « se ressouvenir » de la solution, précisant :

« Et, si tu ne veux pas *dire* le nombre, fais nous *voir* cependant en partant de laquelle [ligne D] »[22].

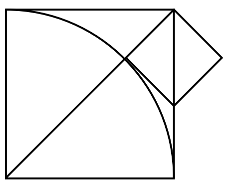
La ligne D cherchée est donc la diagonale du carré proposé.





Quant à en dire le nombre, soit le rapport D/C, cela est « impossible », car ce rapport est irrationnel, ne peux pas s'écrire a/b, avec a et b deux entiers. Il s'agit néanmoins de le voir et le saisir par une lettre qui le touche[23].

10- L'INCOMMENSURABILITE DE LA DIAGONALE AU COTE DU CARRE — Considérons la question suivante : un carré étant donné, de côté C et de diagonale D, est-il possible de trouver un segment U qui soit une unité commune pour C et pour D, c'est-à-dire qui soit contenu exactement un nombre entiers de fois c dans C et un nombre entiers de fois d dans D ? On dirait alors que C et D sont commensurable. Un premier sentiment, certainement partagé par beaucoup de personnes, serait que oui, pourvu que l'on prenne U assez petit. Mais en réalité cela est impossible, et cette incroyable impossibilité peut être prouvée. Cela fut fait, il y a plus de 2500 ans.



Si de la diagonale D du carré de côté C on ôte ce côté, formant une ligne C', et que l'on forme un carré de côté C', de diagonale D', alors on a C' = D-C et D' = C-(D-C), et une éventuelle unité U non nulle commune à C et D, et notamment inférieure à C, sera aussi commune à C' et à D', et notamment inférieure à C'. Mais pour la même raison elle sera commune à C'' et D'', et inférieure à C'', etc., et finalement nulle, car le théorème de Pythagore donne $D^2 = 2C^2 < (9/4)C^2$, donc $D < (3/2)C$, $C' < (1/2)C$: à chaque étape la figure est contracté de plus de moitié. L'unité commune U sera donc plus petite que $(1/2)^n B$, quelque soit l'entier n. En fait on conclut à l'incommensurabilité plus

[22] Platon, *Ménon ou de la vertu*, in *Œuvres complètes, vol. I*, La pléiade, Gallimard, 513-557, p. 533.
[23] É. Barbin, Saisir l'irrationnel : Dire, montrer, faire toucher, tenir, *Bulletin APMEP* n°400 Septembre 1995, 775-796.

tôt si l'on veut, rien qu'en sachant que la procédure de réduction du cas C,D au cas C',D' est répétable indéfiniment.

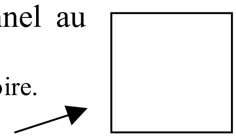
Ici, nouveau moyen inventé, l'*anthyphérèse* s'introduit, qui produira ses effets jusqu'à nos jours, sous les noms de « division euclidienne » et de « fractions continuées ».

Le point est que l'on prouve avec ce geste que quelque chose est impossible, au regard d'anciens moyens spécifiés. De la sorte la mathématique invente ses nouveaux procédés et fait aussi la preuve de la nécessité de cette nouveauté. Il convient d'apprécier comment, pour ces nouveaux moyens, et cette preuve, imaginés ensemble dans le cours de la preuve, sont très mêlés les appels aux intuitions visuelles et discursives : la preuve est-elle vue ou est-elle dite ?

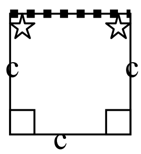
Une autre preuve, plus proprement discursive, à laquelle Aristote fait allusion comme « la preuve par le pair et l'impair », est aussi étourdissante : si r = D/C, alors $r^2 = D^2/C^2 = 2C^2/C^2 = 2$, et si r = d/c, avec d et c deux entiers dont on aura supprimer les facteurs communs éventuels, il vient $r^2 = 2 = d^2/c^2$, donc $d^2 = 2c^2$, de sorte que d^2 et donc aussi d est divisible part 2, soit d = 2d', avec d' entier. Mais alors $4d'^2 = 2c^2$, $2d'^2 = c^2$, et donc c^2 et aussi c est divisible par 2. Mais cela est absurde car alors 2 divise d et divise c, ce qui était supposé exclu.

11- QUEL CARRE ? QUEL NON-ABSURDE ? — On devra maintenant réaliser que ces développements sur la série géométrique, sur la duplication du carré, supposant Thalès et Pythagore, sont dans le régime de l'hypothèse du cinquième postulat d'Euclide, dont une variante (dite de Playfair) s'énonce : *par un point extérieur à une droite l'on peut mener une et une seule parallèle à ladite droite*. Mais de ce cinquième postulat, une variante moins connue dit : il existe un carré, c'est-à-dire un quadrilatère aux côtés égaux et aux angles droits. Autrement dit, tout ce que nous venons de présenter est sous l'hypothèse de croire au carré, sous l'hypothèse de prendre le carré comme Dieu fonctionnel au centre de la preuve.

S'en départir a eu lieu, mais c'est une autre histoire.
Ici, il s'agirait de prouver que l'on voit ici



un carré. La conclusion du débat sur les géométries non-euclidiennes, au 19ème siècle, prouve qu'il est impossible de prouver que ceci soit bien un carré, ou que d'ailleurs quelque carré puisse exister. L'impossibilité est, si l'on construit la figure ci-contre, avec trois côtés (les verticaux et l'inférieur, marqués c) égaux, et avec deux angles droits à la base (marqués d'un carré),



alors il faut montrer que le dernier côté (marqué en pointillé), qui joint les deux sommets des côtés verticaux est égal aux trois premiers (marqués c) et fait des angles (marqués d'une étoile) avec les côtés verticaux qui sont droits. C'est possible à démontrer avec le cinquième postulat, comme on, le voit aisément. Par contre c'est impossible à démontrer sans le cinquième postulat, et cette impossibilité peut effectivement se démontrer : s'il existe un carré, alors en le coupant par une diagonale, il existe un triangle « euclidien », c'est-à-dire dont la somme des angles vaut 2 droits (180°) ; alors de ce fait l'on déduit (cela s'appelle deuxième théorème de Legendre[24] [25]) que tout triangle est euclidien, ce qui implique l'axiome de Playfair, et le cinquième postulat.
Ceux qui « voit » le carré sont comme ceux qui « rencontre » Dieu. Exagérons encore un peu : la géométrie euclidienne est la religion du carré : nous croyons au carré.
Du côté du « dire, dans la dispute, est admis implicitement, d'abord, que pour toute proposition P (c'est-à-dire tout énoncé P pour lequel cela a du sens d'être vrai, et du sens aussi d'être faux), soit P est vraie, soit P est fausse, mais pas les deux ensembles. On appelle « absurde » ce qui aurait lieu si deux propositions contraires (c'est-à-dire ne pouvant être simultanément vraies) étaient pourtant toutes deux prouvées ; et le principe de raisonnement dit « par l'absurde » consiste à admettre que P est prouvé (et donc vraie) s'il est prouvé que non-P conduit à l'absurde, c'est-à-dire s'il est prouvé qu'en prenant non-P comme hypothèse, on peut démontrer deux propositions contraires. Ce principe de raisonnement par l'absurde est fragile, discuté depuis des siècles. Blaise Pascal, habilement, définissait le vrai comme ce dont il était certain qu'on ne puisse prouver que le contraire soit faux. Nous croyons donc que le vrai ne peut jamais nous conduire à l'absurde, que le faux peut effectivement nous y conduire, et donc, pour l'exprimer en raccourcit, nous identifions le vrai au non-absurde, et donc, puisque nous « posons » le vrai, nous croyons au non-absurde.

12- VOIR *ET* DIRE, CROYANCE DU MATHEMATICIEN — Nous avons la difficulté de croire sans preuve, et pourtant aucune preuve n'est possible sans une croyance interne à son procédé dont elle se soutienne, aucune démonstration n'est avancée sans pure et simple monstration, et sans se proférer. Notre difficulté avec le « sans preuve » se déploie en escamotages et métamorphoses de la pulsation entre voir et dire. On admettra que le mathématicien ancien « croyait » à ce qu'il voyait, du moins s'il pensait le voir rigoureusement, « mathématiquement », c'est-à-dire en vertu d'un « voir nécessaire » (?), et croyait à la déduction par l'absurde, de n'en pouvoir trouver la

[24] R. Bonola, *Non-euclidean geometry*, Dover, 1955, p. 57.
[25] J.-C. Pont, *L'aventure des parallèles*, éd. Peter Lang, Berne, 1986, p. 418.

faille et mettre ce principe en doute (?). Absolument *et* relativement cependant, car au point de sa double croyance il œuvrait déjà, avec elle, à ce qui la ferait vaciller, Il croyait aussi à une nécessaire corrélation entre le vrai visuel « vu » et le vrai logique « dit ». Quoique décelées et mathématiquement dénoncées, ces croyances anciennes ne sont pas obsolètes : la croyance à l'exactitude du fait de voir théorique (sinon, plus, la croyance au carré), et la croyance au bien-dire théorique (sinon plus, la croyance au non-absurde), voilà des croyances dont s'autorise implicitement telle ou telle preuve mathématique aujourd'hui encore. Faire des mathématiques, c'est voir et dire, et « voir c'est croire »[26], et dire c'est croire encore.

Le mathématicien croit au lien, à l'imagination donc avec laquelle il fait du lien, du lien vu et dit, même quand il a perdu quelques illusions, sur le carré, sur le non-absurde par exemple : les illusions à perdre restent inépuisables, il y en a autant que de natures. Une fois entré dans la modernité de la vérité par le calcul (en lieu et place du monde de la preuve logico-géométrique), il croit alors à la géométrie de l'organisation de sa page de calcul, à ce qu'il énonce exactement des lettres qui s'égrènent en ses diagrammes. Autre voir et autre dire, garantis encore par une croyance, celle dont Descartes a le souci : qu'il n'y ait pas de démon qui vienne brouiller les lettres au tableau noir pendant qu'il fait une petite pose-café. On croit au fait que la succession même du calcul soit re-saisissable d'une intuition évidente simple, on croit à la poursuite du calcul.

Que croire pour prouver ? Croire au Voir et au Dire, réduits éventuellement au fait du Calcul, à la poursuite du calcul, aux diagrammes, points de passage entre voir et dire, qui présente ou représente, à l'élaboration du lien, in fine croire à la mathématique elle-même sans fin, qui « ne s'autorise que d'elle-même » comme liberté de l'imaginaire pur, sans soucis des natures, sinon du réel de la littéralité. Et là, ce sont encore les faits unis de pouvoir voir et pouvoir dire que nous croyons possible. De ce point de vue, la mathématique est l'imagination de la critique en elle-même de ce qu'elle prétend signifier en ses productions par « voir » et par « dire », de la pulsation de « voir et dire » en ses preuves, ce dont le plus accompli est l'annonce de ce qu'elle prouve comme points d'impossibles, comme irrationnels, au-delà presque de sa propre capacité. La preuve qu'il n'y a pas de preuve, parfois, voilà le lieu logique natif de l'imagination mathématicienne, soit sa croyance.

---

[26] J. Robert, *Lieux et logiques : Voir en dialogue. Des accords du visible*, in Colloque *Sciences et imaginaires*, 12-13 janvier 2006, Mundaneum & Université de Mons-Hainaut.