POUR UNE MODELISATION QUALITATIVE EN TERMES DE CATEGORIES

René Guitart

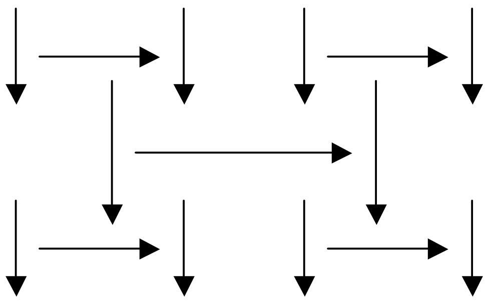
1. LA PULSATION NATURELLE DANS LA NOTION DE MODELE MATHEMATIQUE

Admettons, comme le propose Herbert Stachowiak[1], que le modèle M soit toujours modèle de quelque chose (représentation), représentant des « originaux » O, qui sont naturels, artificiels, voire d'autres modèles, que le modèle ne soit pas identique à l'original mais en constitue une présentation réductrice (compression) c, et que le modèle soit instrumental pour de l'interprétation en vue de certains actes ou pensées (pragmatique). Sur la question cruciale ici de l' « original », nous renvoyons aux travaux indispensables de Charles Alunni[2].

Soit pour commencer l'idée d'une flèche, qu'on rattachera évidemment à la théorie du signe développée par Charles S. Peirce[3] :

$$c : O \rightarrow M,$$

qui montre l'original O comme un objet source (éventuellement mythique ou fictive) et le modèle comme objet but (le plus pratique possible) ; et chaque objet O ou M est a son tour de la forme d'une flèche $F \rightarrow f$, qui va de sa cause ou fondement vers son effet ou fonctionnement, etc. Immédiatement donc nous sommes installé dans du diagramme de toutes dimensions, comme nous en avions déjà envisagé la nécessité[4] à propos de la question de la représentation. Le fond visuel où s'inscrit notre pensée organisatrice est donc celui d'une grille de bifurcations indéfinies :



Précisons tout de suite que nous ne voulons pas déborder vers la notion générale du modèle considérée comme agencement non nécessairement mathématique de multitudes de savoirs et comme « lieu » d'une activité sociale, mais que nous voulons nous restreindre à

[1] H. Stachowiak, *Allgemeine Modelltheorie*, Springer, Wien, 1973.

[2] C. Alunni, 1) La langue en partage, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1989, n°1. Armand Colin, p. 59-68. 2) *Tradition — Transmission — Traduction, l'action d'un foncteur universel*, HDR, Ecole Normale Supérieure, 15 novembre 2003.

[3] C. S. Peirce, *Collected Papers*, vol. I-VI : 1931-35 par C. Hartshorne, P. Weiss ; vol. VII-VIII : 1958 par W. Burks, Harvard, Harvard University Press.

[4] R. Guitart, Que peut-on écrire et calculer de ce qui s'entend ?, dans Assayag, G., Nicolas F. et Mazzola G. (dir.), *Penser la musique avec les mathématiques ?,* Collection « Musique/Sciences », Ircam-Delatour France, 2006, p. 139-158.

l'idée du modèle considéré comme « objet médiateur cognitif entre théorie et observation » [5], et même dans ce cas n'envisager que ce qui relève exclusivement du mathématique.

L'idée de modèle pulse entre idéal à réaliser et réalisation empirique d'un idéal : on pensera par exemple aux sens équivoques du terme « modèle » dans les phrases « Je voudrais ce modèle de chaussure » et « Ce modèle me fait mal au pieds ». Et « Modèle » pulse encore entre fiction libre et explication, entre imitation et expression, traduction et trahison, duplication et duplicité, construction et déconstruction, transposition et interprétation, copie et motif, etc. Il y a là un vaste champ pulsatif à constituer.

Mais nous n'irons pas si loin pour cette fois, et nous tiendrons compte essentiellement des seules conséquences des deux alternatives du concept et du savoir-faire, du monde et de l'entendement que nous explicitons maintenant, et à cause desquelles, même dans notre limitation au mathématique, l'idée de modèle admet encore en gros quatre acceptions ou orientations, au demeurant bien évidentes : modèle théorique de la théorie (EC), théorique de la pratique (MC), pratique de la théorie (EF), pratique de la pratique (MF).

	Concept	Savoir-Faire
Entendement	EC	EF
Monde	MC	MF

La première alternative porte sur le sens de « cognitif ». Si l'on considère que le modèle produit un lien de connaissance entre un phénomène observé et une théorie, ce lien est-il de nature (concevable) ou de fonctionnement (exécutable) ; c'est-à-dire le modèle déclenche-t-il le savoir sur l'objet en surplomb d'icelui et en semblant indiquer sa nature substantielle constitutive, comme quand on lit une carte, ou bien propose-t-il un lieu théorique d'activité, tel que l'activité en ce lieu soit éprouvable comme homologie à l'activité du système, comme quand on circule dans un labyrinthe ? Ceci n'est pas sans rapport avec une question centrale de l'intelligence artificielle : veut-on fabriquer une machine dont l'intérieur soit analogue à celui de notre cerveau, ou bien veut-on une machine dont les productions soit analogues à celle de notre cerveau ? Comprendre et modéliser le cerveau, est-ce comprendre la nature de ses constituants ou la nature de ses productions ? Le modèle permet-il de le voir ou de se mettre à sa place ? Retenons que dans le terme « cognitif » il y a cette pulsation entre connaissance accomplie et connaissance différée et à faire, entre compréhension par concept et compréhension par savoir-faire, les deux aspects étant aussi l'un la raison d'être de l'autre. L'enjeu est entre, d'une part, la compréhension théorique, qui forme du lien achevé entre théories, de l'idéologique pur, et d'autre part la compréhension en acte, qui forme de la résonance ouverte entre gestes, et partant entre les gens, les praticiens d'artisanats, entre des savoir-faire. Concernant la modélisation de la musique, nous nous rencontrons ici, dans l'attention à cette première alternative, avec la proposition de François Nicolas[6] d'élargir à un « ordre du faire » la question du rapport entre mathématique et musique, de sorte à « faire de la mathématique à partir de la musique, faire de la musique à partir de la mathématique ».

---

[5] M. Armatte, La notion de modèle dans les sciences sociales : anciennes et nouvelles significations, *Math. et Sciences Humaines*, n°172, 2005 (4), p. 91-123.

[6] F. Nicolas, Pour des rapports d'un type nouveau entre mathématiques et musique, en germe dans l'échange Euler/Rameau de 1752, *Journée « Mathématique et musique », SMF*, 21 juin 2008.

Nous proposons alors de mettre en place ici des éléments d'une méthode de modélisation mathématique catégoricienne qui soit générale dans son principe, et valable notamment aussi bien du côté des concepts que du côté des savoir-faire.

La seconde alternative vise les deux points suivants : ou bien mettre plutôt l'accent sur l'observation et la supposition qu'il y a un monde réel à observer, etc., l'objet réel, ou bien mettre plutôt l'accent sur l'intelligibilité, la supposition qu'il y a l'entendement, le sujet maître. Il s'agit tantôt de modélisation d'une nature externe, d'une étrange répétition du monde, tantôt de modélisation de la compréhension interne, d'une outil d'auto-analyse de l'entendement. Dans les deux cas on tombe donc sur le paradoxe qu'il y ait nécessité pour connaître de répéter quelque chose. Et nous avons ensuite le paradoxal qu'entre les deux points il est urgent de ne pas choisir, si nous voulons envisager une théorie et une pratique de la modélisation accomplies.

Nous voudrions donc mettre en place les éléments de notre méthode de modélisation mathématique catégoricienne — en termes de constructions universelles, de limites et de cohomologies — méthode qui reste générale dans son principe, et qui soit valable aussi bien du côté de l'analyse intégro-différentielle du monde physico-chimique, que du côté des bases de la théorie logico-ensembliste des modèles.

Une théorie unique pour deux objets traditionnellement distincts, voire opposés : le monde des sensations et des productions de la nature, d'où la physique ou théorie de la nature, et le monde de l'intelligibilité mathématique et des artifices du démonstratif, soit la mathématique, la théorie des théories.

Le premier aspect est pris en charge d'une part par la géométrie différentielle et notamment ses idées régulatrices de *courbure* et de *variation*, et d'autre part par l'analyse probabiliste et statistique, et ses idées régulatrices *d'espérance conditionnelle* et de *série statistique* ; soit, dans les deux cas par la MONSTRATION DE DIFFERENCES, plutôt à voir. C'est dans cette manière que l'on traite traditionnellement de modélisation mathématique en sciences de l'ingénieur et en sciences sociales, et plus largement dans la science « appliquée ». Là les nombres décimaux jouent explicitement le rôle clé d'ultimes points d'effectivité. Le modèle propose de mesurer et de confronter des nombres, et utiliser le modèle consiste en suivant un processus à vérifier des résultats mesurés. L'activité empirique associée est la mesure pratique et le montage expérimental prescrit. Agir parmi les choses.

Le second aspect est pris en charge par la théorie des modèles et les notion-clés de *présentation* algébrique et de *validité* logique et les idées de *vérité* et *preuve*, par la DEMONSTRATION D'IDENTITES, plutôt à entendre. C'est ainsi que l'on aborde la science mathématique « pure ». Là les lettres et les dispositifs figurativo-littéraux sont indispensables à la mise en scène. Le modèle propose de concevoir plus clairement et simplement un arrangement à priori trop complexe, et utiliser le modèle consiste à profiter de sa clarté pour comprendre le concept. L'activité empirique associée est la réflexion théorique et la contemplation des formes. Dire les formes pensées.

Mais, au moment d'être effectivement exercées, mesures et réflexions sont inséparables, et ultimement nombres et lettres sont de même nature (point d'une pulsation essentielle à l'acte de calcul)[7], faire de la « différence » ne va pas sans l'idée du « même », et réciproquement, si bien que les deux modélisations ne sont pas si distinctes, chacune pénétrant l'autre à son corps défendant : il y a là une pulsation qui fait constitution de l'une part l'autre.

Ces affirmations deviennent évidentes quand tous les termes sont de part et d'autre, côté nombre et côté lettre, entendus en termes de diagrammes, et notamment lorsque pour le moins les nombres comme les configurations sont pensés comme de même nature, comme des

---

[7] R. Guitart, *Quais as diferenças entre nùmeros e letras ?*, UNIBAN, Sao Paulo, 02 de Maio de 2008.

catégories. Chaque nombre ou chaque lettre ne tient sa nature mathématiquement efficace que du fait d'être un élément au sein d'un système, en fait un objet au milieu d'une catégorie, et partant, via la localisation ou la construction de la forme (cf. le paragraphe 4) d'être finalement soi-même une catégorie. C'est par là que l'on passera du numérique a-sensé au qualitatif, représenté par une catégorie. Reste alors à comprendre le calcul sur les nombres et fonctions numériques, le calcul différentiel et la détermination de la courbure, en termes catégoriques : ce qui est réalisable en terme de classifiants de catégories, théories de formes et cohomologies. Et il faudrait faire de même pour les calculs de probabilités et statistiques, ce que nous imaginons tout à fait faisable.

Il faudrait donc comprendre ces deux univers techniques, géométrico-probabiliste et algébrico-logique, d'un même point de vue, qui sera LE POINT DE VUE DIAGRAMMATIQUE. On observe de plus que l'analyse systémique catégoricienne suivant ce point de vue diagrammatique permet de ne pas avoir à trancher la première alternative sur le sens du mot « cognitif ».

La théorie de la modélisation que nous visons vaudrait encore pour la composition musicale, pour l'analyse de discours (voir par exemple notre proposition d'articulation de l'acte et du logique dans une telle analyse[8]), pour l'analyse des systèmes vivants (voir surtout le livre d'Andrée C. Ehresmann et Jean-Paul Vambremeersch e[9]), etc., qui sont des domaines où justement la coupure et la tension entre la sensation et le concept n'est pas nécessairement situable à la manière traditionnelle historiquement avérée que l'on connaît entre production physique et preuve mathématique, entre d'un côté un « mécanisme à causes » et de l'autre une « rigueur en calculs », quand causes immédiates dans le monde et calculs en développements de l'observateur sont donc artificiellement disjoints.

C'est que dans ces cas — du vivant, du discours, et de la musique — à la racine se trouve la difficulté de traiter du *rythme*, dont la saisie demande de tenir croisés ce qui fait loi et ce qui fait interprétation vivante de ladite loi, *et* ce qui fait exception, comme y insiste Pierre Lusson[10] ; in fine il faut là — pour le dire en reprenant un joli titre de Philippe Sollers — comme une paradoxale *théorie des exceptions*. À vrai dire cela sera possible si l'on ne considère plus comme allant de soi les notions d'identité et de mêmeté, si le recours à la mêmeté est explicitement posé et analysé, comme nous en traitons avec l'idée d'*assimilation*, et comme l'analyse diagrammatique générale nous laisse, à tout instant de l'élaboration, la possibilité de le flécher.

Le point de vue diagrammatique permettra l'effacement du rôle des causalités physiques, logiques, mathématiques, ou de la volonté[11]. Par exemple une bonne théorie de la preuve procède d'une mise en scène simultanée des hypothèses, des diverses branches possibles des déductions, des conclusions, en un certain « espace du calcul ». De même dans l'étude d'un système vivant l'émergence ne peut peut-être se représenter que de façon mixte, sans que causes du monde et calculs d'observation soient séparables, ni en temps ni en espace. Quand à l'analyse de discours où la question est le sens, là aussi il faut comprendre qu'un modèle fournira en acte, comme acte d'un calcul, l'analogue des jeux interprétatifs équivoques dont l'effectuation constituent le sens. L'intelligibilité et la prévision ne seront pas livrées toutes faites explicitement, mais procèderont implicitement de protocoles d'écritures et calculs en des lieux définis, de façon réflexive donc.

---

[8] R. Guitart, *L'assimilation et l'excès de l'acte sur le logique*, in *Mélange Jacques Roubaud*, Mezura 49, Inalco, 2001, 209-227.

[9] A. C. Ehresmann and J.-P. Vambremeersch, *Memory Evolutive Systems. Hierarchy, Emergence, Cognition*, Studies in Mutlidisciplibarity vol. 4, Elsevier, may 2007, 402 p.

[10] P. Lusson, *Vade Mecum de la théorie (index)*, 11 p. version communiquée en 2008.

[11] A. Schopenhauer, *De la quadruple racine du principe de raison suffisante*, Édition complète (1813-1847), Vrin, 1991.

En cette affaire, l'intelligibilité mathématique devrait être mise en position de s'inclure son propre geste « intempestif » producteur de notions ou conceptions, et de le concevoir distinctement, tandis que du côté de la production physique il faut creuser l'intervention réelle en elle du symbolique et de la littéralité, et déterminer clairement comme imaginaire la numérisation pure. Ici deux idées fausses liées sont à bien contrecarrer : d'une part qu'un modèle scientifique soit seulement ce qui machinalement fournira des réponses univoques chiffrées associables à des mesures observables ; d'autre part que la lettre symbolique n'agisse que pour faire comprendre et non pas dans le « vrai monde des choses ». Ces idées fausses, on le voit, sont associées à la première alternative, sur la question même du sens pulsatif du terme « cognitif ».

À terme il s'agirait de *modéliser l'acte même de modéliser*, et là justement la pratique catégoricienne conviendrait tout spécialement, elle qui sait se saisir d'elle-même et s'analyser mathématiquement comme geste, elle qui est un calcul des gestes mathématiques[12].

C'est sous couvert de ces considérations préalables indispensables sur la pulsation dans la notion de modèle mathématique entre le théorique et le pratique, qu'il faut envisager dans son entièreté la question de la modélisation en musique, avec donc en sous-produit la question, à laquelle nous ne nous ne risquerons pas de répondre : modéliser mathématiquement la musique ou l'acte musical est-il un acte disjoint de l'acte musical lui-même, ou du moins de l'acte de prise de sens de la musique ? Dans le domaine qui nous est plus familier de la modélisation de l'acte de discours et du sens des discours, notre réponse à la question analogue est positive.

Nous faisons cette hypothèse que le sens, des discours notamment, des discours mathématiques plus spécifiquement, n'est pas dans ce que ces discours spécifient mais dans ce qui en émerge en acte, précisément dans la pratique mathématique ouverte de l'invention de modèles de ces discours. Ce sens, pulsatif encore, est comme une installation sur l'objet d'étude de la pulsation générale entrevue ci-avant pour le sens de « modèle » et qui maintient le souci de modéliser. Au point de l'objet, la pulsation du sens aura lieu en vertu de l'hésitation sur le modèle. Et si de plus on comprend que tous les modèles nécessaires sont diagrammatiques, alors c'est, in fine, l'équivoque sur le sens de la flèche « $\rightarrow$ » — de marquer parfois une similitude et parfois un changement — qui œuvre au sens au niveau le plus élémentaire.

2. MODELES DES SENSATIONS : LOIS, SOLUTIONS, FORMES, ACCIDENTS : DIFFERENCES.

La modélisation mathématique à la manière du XVIIIème siècle en physique, à la façon des Euler, D'Alembert, Laplace, etc., avec la mise en place de l'équation différentielle et des conditions au bord d'un phénomène physique (cordes vibrantes, chaleur, électricité, gravitation, etc.) pose en quelque sorte la théorie du phénomène mondain accessible par sensations, sous la forme préalable de la description de valeurs tenues fixées et d'un flux ou transfert infinitésimal de charges supposé régi donc par une équation différentielle. Cette modélisation donne ensuite à développer ses qualités intelligibles comme celles de ladite équation, ses prévisions comme fonctions *solutions* d'icelle. Elle suppose la question du dégagement d'un calcul des phénomènes comme décrit par des différences réelles visibles à

[12] R. Guitart, 1) La structuration catégoricienne comme calcul des gestes mathématiques, Colloque Impact des catégories, 60 years of Category Theory in Historical and Philosophical Retrospect, oct. 10-14 2005, ENS, 13 octobre 2005. 2) La catégorisation ou la mathématisation des gestes mathématiques, Séminaire M. Serfati, IHP, 24 janvier 2007.

partir d'un dispositif supposé des différences infimes et indiscernables faisant office de principes créateurs desdits phénomènes, de *lois*. Bien entendu à défaut de résoudre l'équation, élémentairement ou par séries ou intégrales, on se tourne vers l'étude qualitative, locale ou globale, d'une solution ; et on comprend d'ailleurs que ce passage par la qualité est très-créatif souvent pour la résolution en formule explicite. On comprend également que la résolution explicite n'est pas si indispensable que cela pour l'intelligibilité recherchée, ni même pour les effets de prédictions, puisque l'algorithme efficace n'est pas nécessairement le plus élémentaire.

S'origine ensuite au XIXème siècle chez Gabriel Lamé particulièrement[13], avec son invention des coordonnées curvilignes générales, l'idée d'assimiler une situation physique à un système de coordonnées curvilignes, à savoir le système des coordonnées adaptés en lequel l'équation du système trouvera sa résonance naturelle, trouvera à décomposer naturellement ses solutions. On considèrera alors explicitement telle portion de l'espace euclidien muni de tel système de coordonnées curvilignes comme modèle premier du support géométrique initial d'un problème physique. Les différences finies faisant les phénomènes ne tombent plus dans l'aléatoire du choix arbitraire de telle ou telle grandeur comme trait descriptif, mais s'organisent pour produire un *espace* naturel intrinsèque de la loi elle-même. La question devient alors plus prioritairement qualitative, à savoir de connaître la forme de l'espace ainsi modelé, et comment en cette forme s'insèrent les formes des solutions.

Mais encore l'idée demeure qu'un modèle donne les lois de ce qui demeure régulièrement dans le phénomène. Pourtant les mathématiciens savent de plus en plus nettement au XIXème siècle que ce qui détermine une fonction ce sont ses singularités, les points où elle échappe à telle règle qui lui semblerait prescriptible, et on touche là un moment clé pour l'intervention de la dualité entre discret et continu dans la modélisation. Intégrant explicitement cette observation mathématicienne à sa conception qualitative de la modélisation, René Thom[14] part du principe que toute science est l'étude d'une phénoménologie, que les phénomènes objets de la discipline scientifique considérée apparaissent comme des *accidents* de formes définies dans un certain espace, l'espace substrat de la morphologie étudiée.

Dans les modélisations pour la physique, on utilise donc l'intégrale et les équations différentielles, les probabilités, les martingales, l'intégrale et les équations différentielles stochastiques[15], les statistiques, les espaces topologiques, les courbes et espaces numériques, les matrices, les groupes, etc. Tous ces procédés présentent trois aspects qui sont trois obstacles à leur reformulation purement diagrammatique.

Le premier obstacle est que ces procédés renvoient, quand ils se veulent mieux que qualitatifs, à savoir quand ils se veulent prédictifs, au plan pratique de l'observation ou de la vérification, à la mesure par des nombres réels finiement enregistrables, comme par exemple les nombres décimaux.

Ce qu'il faut contre ce premier obstacle, quand est souligné que les réels décimaux constituent un point d'ancrage de la pratique expérimentale avec une théorie, c'est bâtir une théorie de la pratique expérimentale et dans cette pratique pointer ce qui prétendument fait ancrage ou garantie de contact avec la réalité du monde. Si les nombres décimaux font l'unanimité, c'est parce que l'acte de mesurer et d'écrire avec eux nos mesures est à la portée de tous, et qu'ainsi les résultats sont transmissibles et manipulables, et que de ceci nous avons la tradition. Au fond de l'affaire, ces nombres décimaux sont des noms d'algorithmes

---

[13] G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Mallet-Bachelier, Paris, 1859.
[14] R. Thom, *Modèles mathématiques de la morphogenèse,* Accademia nazionale dei Lincei Scuola Normal Superiore di Pisa, MCMLXXI, 81 p., p. 1.
[15] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Second Edition, Version 2.1, Coll. Stochastic modelling and applied probabiliry n°21, Springer, 2005.

canoniques de références, et ils constituent un canon empirique, qui peut bien rester en l'état du côté des géomètres de terrain et arpenteurs, des statisticiens enquêteurs, etc. Du reste la distinction entre nombres et lettres ne va pas de soi, et c'est le point d'une pulsation dans le travail mathématique quotidien qui alimente le travail de la preuve[16]. Mais du côté de leur intervention dans l'expérimentation, ils peuvent trouver des manières d'apparaître parfaitement catégoriques. Par exemple, si E et F sont deux espaces topologiques, une fonction continue de E vers F détermine un morphisme de topos du topos shE des faisceaux sur E vers le topos shF des faisceaux sur F, si bien que l'espace F est remplaçable par le topos shF. Le canon des réels décimaux D peut certainement est remplacé par le canon K = shD. Ici donc on tombe sur l'usage grothendieckien de l'étude systématique des versions relatives des questions, passant du cas d'un topos au cas d'un *topos au-dessus d'un topos* donné K qui tient lieu de « réalité concrète ». Dans cette perspective les géométries algébrique et différentielle sont pas mal avancées, mais du côté des probabilités et statistiques un développement systématique manque encore, qui commencerait par la détermination axiomatique du gros site des probabilités de transitions, etc.

Le deuxième obstacle est que ces procédés semblent fondés en théorie sur les nombres réels et la spécification de l'ensemble des réels. Ce deuxième obstacle est très différent du premier.

Cet obstacle est largement surmonté par les inventions de Charles Ehresmann[17] sur les jets, les fibrations, les feuilletages, et la transmutation catégorique de ces inventions qu'il a opéré, en partie avec sa femme Andrée (Bastiani) Ehresmann, entre en gros 1957 et 1967 : on sait maintenant traiter de ces questions en termes de catégories d'opérateurs (ou de fibrations de Grothendieck), de catégorie double, de catégories structurées[18]. Un traitement catégorique de la géométrie différentielle est possible. Il est complété par l'idée plus axiomatique de William Lawvere de la géométrie différentielle synthétique[19,20] Et bien sûr il faut prendre en compte la mise en place fonctorielle de la géométrie algébrique par Alexandre Grothendieck, où les courbes ne sont plus que des schémas, le rôle spécifique du corps des réels étant effacé[21,22]. On constate que, de plus en plus, des vrais nombres réels ensemblistes concrets on n'use — au plan théorique — qu'avec modération, plutôt par l'effet d'axiomes intuitifs, et finalement, sans supposer pour de bon que l'ensemble de ces réels existe vraiment. Les réels non-standards ou mieux les réels de la géométrie différentielle synthétique font mieux l'affaire, au plan des conceptions.

Le troisième obstacle est l'hétérogénéité des procédés ou outils qui ne peuvent se mélanger et se comparer, et tout principalement l'usage d'un côté de spécifications topologiques, et de l'autre de spécifications algébriques. Le seul point de communication entre les procédés semble être par le bas, sous les concepts, au niveau numérique.

---

[16] R. Guitart, Figure, lettre, preuve : la pulsation mathématique au lieu de l'écriture, Colloque *Mutations de l'écriture. Arts & Sciences.*, 19-20 octobre 2007, ENS, 19 octobre 2007 (repris au lycée Jean Renoir de Bondy, le 16 janvier 2008).

[17] C. Ehresmann, *Œuvres complètes et commentées*, éditées par Andrée C.Ehresmann, 8 vol., Amiens, 1984.

[18] R. Guitart, 1) Les conceptions mathématiques de Charles Ehresmann et la théorie des catégories, Séminaire d'épistémologie et histoire des idées mathématiques (responsable : Michel Serfati), IHP, Paris, 26 mars 2008. 2) The evolution of ideas of Charles Ehresmann from jets and fibrations to categories, UFRJ, Rio de Janeiro, May 9th, 2008.

[19] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry* (1981), C. U. P. 2006.

[20] R. Lavendhomme, *Leçons de géométrie différentielle synthétique naïve*, Louvain-la-Neuve, Institut de Mathématique, 1987 – 204.

[21] A. Grothendieck. J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Springer-Verlag 1971.

[22] Fantechi et al., *Fundamental Algebraic Geometry. Grothendieck's SGA Expained*, Math. Surveys and Mon. Vol. 123, AMS, 2005.

Ce troisième obstacle est franchi par l'idée de *régime d'assimilation*[23]. Cette théorie à été conçue initialement pour modéliser l'analyse de discours. Une application importante en est faite par Monique Sassier[24]. La question du sens d'un discours n'est pas si différente de celle du sens d'une interprétation de musique. Pour entendre cela, il faut y saisir le rôle de la vérité. C'est que par le biais de l'enjeu de vérité on doit traiter du sens des discours en termes de postures, différences et bougés, trois points en effet de nature musicale. Pour chaque point il faut indiquer comment une mise en œuvre mathématique de son principe est possible. Et puis il faut ensuite montrer comment au plan mathématique, dans la perspective de la théorie des catégories, les trois points sont intimement reliés ; ce que l'on voit naturellement dans cette théorie des *régimes d'assimilations*. En effet dans cette théorie on peut rendre compte, simultanément du calcul différentiel des formes et des modalités logiques, et unifier la question de la courbure et de la modalité logique (soit l'aspect géométrique de ce paragraphe 2 et l'aspect logique du paragraphe 3 suivant). On constate que toutes les modèles de théories (algébriques, topologiques, différentielles, statistiques) génèrent des régimes d'assimilations sous-jacents, et que par le biais de ces régimes elles s'épaulent et s'influencent, communiquent. Tout se passe comme si la seule théorie objective au plan d'un brassage homogène des données était celle des régimes, toute autre théorie étant une présentation subjective d'un régime qui s'ignore. Cela dit, les régimes eux-mêmes sont à proximités des catégories et des n-catégories, de sorte que l'on peut soutenir le slogan : toute modèle d'une structure détermine en substance une catégorie qui est en quelque sorte son support. On arrive aussi à cette idée par la construction de la fibration associée à un foncteur vers Ens, si l'on commence en considérant, dans le style de la théorie des esquisses mixtes dont nous parlons au paragraphe 3, un modèle comme un foncteur R : $\underline{S} \to \underline{\mathrm{Ens}}$.

3. MODELES DES THEORIES MATHEMATIQUES : REGLES ET AXIOMES, HOMOMORPHISMES, CONSTRUCTIONS DE MODELES, VALIDATION : IDENTITES.

La théorie des modèles logico-ensemblistes s'occupe de la saisie de phénomènes intra-mathématiques. au sein des productions mathématiques. Les modèles sont des ensembles munis de structures d'un type donné. Rappelons comment d'un point de vue catégorique la question peut s'entendre[25].

Une présentation sémantique d'une structure sur un ensemble E est comme élément de T(E) où T est un foncteur-type de Bourbaki-Ehresmann, ces foncteur-types étant engendrés par les produits cartésiens, les sommes, et le foncteur P qui à tout ensemble E associe l'ensemble P(E) des sous-ensembles ou parties de E, l'engendrement étant par compositions et équations naturelles. Cela peut être axiomatisé, donnant la notion *d'univers algébrique*, avec en particulier les topos et les catégories d'ensembles flous. Dans le contexte d'un univers algébrique toutes les structures du premier ordre, et notamment les théories algébriques, et

[23] R. Guitart, 1) Calcul d'assimilations, modalités et analyse d'images, in Calculs et formes, Ellipses, 2003 (Actes du Colloque « Mathématiques : calculs et formes », Université Toulouse Le Mirail, septembre 2000), 175-189. 2) Le triple du sens : postures, différences et bougés, Séminaire mamuphi, ENS, 21 mai 2005.

[24] M. Sassier, *Ordres et désordres des sens, entre langue et discours,* L'Harmattan, 2004, 236 p.

[25] R. Guitart 1) Toute théorie est algébrique, in *Journée Mathématique en l'honneur d'Albert Burroni : Catégories, théories algébriques et informatique* (vendredi 22 septembre 2002), Prépublication n°368, Institut de mathématiques de Jussieu, avril 2004, p. 79-102. 2) Toute théorie est algébrique, Séminaire *mamuphi*, ENS, 9 décembre 2006.

aussi la topologie générale et la théorie des relations continue, sont équationnellement définissables[26].

Une présentation syntaxique d'un type de structure est possible par la notion d'esquisse mixte au sens d'Ehresmann[27], une esquisse mixte s étant un triplet

$$s = (\underline{S}, P, Y),$$

où donc S est une catégorie, P un ensemble de cônes projectifs sur S, Y un ensemble de cônes inductifs sur S ; un modèle ou une réalisation de s est un foncteur

$$R : \underline{S} \to \underline{Ens}$$

de S vers la catégorie des ensembles, tel que, pour tout cône $p \in P$ le cône Rp soit un cône décrivant son sommet comme limite projective de sa base, et que pour tout cône $y \in Y$ le cône Ry soit un cône décrivant son sommet comme limite inductive de sa base. Il s'avère parfaitement possible de décrire ainsi toutes les théories du premier ordre et leurs modèles[28] et puis de tirer profit de ce fait pour obtenir les propriétés catégoriques des catégories de modèles et des foncteurs qui les comparent.

Les deux approches, par les foncteurs types ou par les esquisses permettent d'éliminer la question a priori de la logique, des formules et de la déduction, comme fond préalable à la spécification des modèles : la pratique diagrammatique équationnelle et universelle dans les catégories est suffisante. En remplaçant la catégorie Ens par un univers algébrique abstrait dans le premier cas, par une esquisse quelconque dans le second, on libère, au plan des jeux de significations, la question de la détermination des modèles du présupposé qu'il existe un modèle de la théorie des ensembles. Cependant, évidemment, on dépend encore de l'idée nue de collection, et de la notion de taille des collections, pour la question de l'existence de modèles de tel ou tel théorie ayant telle ou telle propriété, pour la mise en place formelle de ces théories et modèles, mais pas pour la détermination du sens de ces modèles.

Cela dit nous soulignerons deux points :

1) *Toute théorie est algébrique*, constituée d'expressions diagrammatiques de différences, d'identités. Il faut mettre en relief le fait que, d'une part, vue dans le langage des catégories toute théorie est de nature algèbrique, c'est-à-dire est un jeu d'opérations et de combinaisons équationnelles, à un niveau suffisamment élevé, relativement à des arités dans l'organisation desquelles les quantifications sont absorbées, et que d'autre part, toujours vue dans le langage des catégories, en revanche l'invention de ces théories est principalement guidée par une pensée géométrique de la courbure. Mais une synthèse générale est possible au niveau des *algèbres figuratives*, à la racine desquelles le topos Graph des graphes jouent certainement un rôle privilégié.

2) Dans la modélisation et le traitement théorique de la question de la modélisation, au point donc de la théorie de la théorie, la question se pose : *esquisses ou topos ?* Précisons. Toute modélisation de théorie met en scène un accouplement général supposé d'une syntaxe à une sémantique, pour présenter tel champ d'activité comme le jeu des avatars concrets dudit accouplement. À l'entrée d'un travail de modélisation, se pose donc la question pré-logique du poids que l'on accordera à la syntaxe ou à la sémantique, à la régulation voulue ou à la factualité prétendue, et laquelle de ces deux tendances sera affirmée être universelle. La réponse choisie à cette question forcera la nature de la logique en cours ensuite. En les termes actuels de la théorie des catégories, l'alternative signifie : esquisses ou topos ? En gros d'un

---

[26] R. Guitart, Structures dans les univers algébriques, in *Logiques, Relations et structures dans les catégories*, Thèse de doctorat d'état, Université de Picardie, 1979, 660 p., vol. 2, pp. 325-370.

[27] C. Ehresmann, 1) Introduction to the theory of structured categories, Tech. Report 10, Univ. Kansas, Lawrence (1966), 96 pages. 2) Esquisses et types de structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iasi* XIV-1-2 (1968), 1-14.

[28] R. Guitart et C. Lair, Limites et colimites pour représenter les formules, *Diagrammes*, vol. 7, 24 p., juillet 1982.

côté l'idée d'une théorie comme algorithme, et de sa description par générateurs et relations, et de l'autre l'idée de présentation d'une théorie comme un espace (son topos classifiant). Il s'agit d'en comprendre la distinction et l'alliance[29].

4. THEORIE DE LA FORME, DUALITE, EVIDEMENT.

Il existe une théorie de la forme (Shape Theory) très générale de portée, et très simple dans sa mise en place. On dispose d'une catégorie $\underline{X}$ d'objets « complexes » à étudier, et d'un foncteur

$$J : \underline{M} \to \underline{X},$$

où M est une catégorie bien maîtrisée d'objets bien connus. L'idée est d'analyser alors chaque objet X de $\underline{X}$ comme recollement d'objet $J(M_i)$ venant de $\underline{M}$, soit sous la forme d'une limite $X = \lim_i J(M_i)$, et cette limite est construite suivant un patron qui s'appelle la catégorie de forme de X, à savoir la catégorie $\underline{J/X}$ ayant pour objets les couples (M, m) avec M un objet de $\underline{M}$ et m un morphisme

$$m : J(M) \to X,$$

et pour morphisme de m vers m' un morphisme

$$h : M \to M' \text{ tel que } m'.J(h) = m.$$

Cette catégorie est équipée d'un foncteur

$$\mathbf{[J/X] :} \ \underline{J/X} \to \underline{M},$$

lequel est à proprement parler la J-*forme* de X, ou simplement la *forme* de X. La prise en compte de cette notion équivaut de fait au lemme de Yoneda, du fait de considérer pour tout $J : \underline{M} \to \underline{X}$ le foncteur de J-forme, de $\underline{X}$ vers la catégorie $\underline{\mathrm{Fib}}(\underline{M})$ des fibrations sur $\underline{M}$ (catégorie dont nous ne détaillerons pas ici la construction), qui a tout objet X de $\underline{X}$ associe la fibration [J/X] :

$$[J/\ ] : \underline{X} \to \underline{\mathrm{Fib}}(\underline{M}).$$

Et par cette opération [?/] qui à tout foncteur J associe le foncteur [J/] on détermine enfin un foncteur

$$[\ ?/\ ] : \ \mathrm{Fonc}(\underline{M},\underline{X}) \to \mathrm{Fonc}(\underline{X},\underline{\mathrm{Fib}}(\underline{M}))^{op}.$$

On peut comprendre ce dernier foncteur comme l'extension naturelle au cas des catégories de l'opération ensembliste

$$(\ ?)^{-1} : \ \mathrm{Fonc}(E, F) \to \mathrm{Fonc}(F,P(E)).$$

qui à toute fonction $f : E \to F$ d'un ensemble E vers un ensemble F associe la fonction notée $f^{-1} : \ F \to \ P(E)$ et dite « image réciproque par f », de F vers l'ensemble des parties de E. L'opération ensembliste $(\ ?)^{-1}$ est fondamentale, elle est à la racine de l'opérabilitré logique du topos des ensemble et son universalité est l'axiome original des topos, et de même l'opération catégoriste [?/] est cruciale dans l'étude de la 2-catégorie des catégories. Elle permet notamment d'unifier deux domaines $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ au titre d'un aspect commun $\underline{M}$, déterminé par deux foncteurs

$$J : \underline{M} \to \underline{X}, \quad K : \underline{M} \to \underline{Y}.$$

En effet on dispose alors de

$$[J/\ ] : \underline{X} \to \underline{\mathrm{Fib}}(\underline{M}), \ \ [K/\ ] : \underline{Y} \to \underline{\mathrm{Fib}}(\underline{M}),$$

qui représentent $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ comme deux zones d'un même milieu $\underline{\mathrm{Fib}}(\underline{M})$. Ce que l'on énonce : si deux catégories ont en elles un fragment commun, alors elles sont dans un lieu commun.

---

[29] R. Guitart, Théorie de la théorie : esquisse ou topos ? Séminaire *mamuphi*, ENS, 14 janvier 2006.

Cela s'applique par exemple lorsque M est la catégorie Graph des graphes, X et Y les catégories des espaces topologiques et des k-spectroïds (comme manipulés pour la théorie des gestes et des formules[30]) : on peut alors comparer un espace topologique et un k-spectroïd en les considérant comme des présentations de fibrations sur le topos Graph. Par suite les « gestes » et les « formules » introduits par Guerino Mazzola et Moreno Andreatta sont unifiés : ce sont des présentations de morphismes de la catégorie Fib(Graph). Autrement dit la dualité entre algèbre et géométrie sera active dans cette situation en raison de l'alternative entre chercher à présenter un morphisme donné de Fib(Graph) à partir d'une formule ou à partir d'un geste.

Ainsi, indépendamment de la façon singulière originale dont la catégorie X a été construite, indépendamment du contenu que l'on a mis dans chacun de ses objets X, via [J/] , chaque objet de X est maintenant vidé de son contenu singulier, lequel est remplacé par un contenu universel . Chaque objet X est maintenant assimilé à une catégorie J/X ou plutôt à une fibration **[J/X]** , dont le contenu n'est que d'agencements d'objets abstraits et flèches abstraites, ce qui décrit ce que du point de vue J on sait de X, au seul niveau de ses rapports à certains autres objets de sa catégorie X, soit ce que J sait de la place de X dans X. Par ce procédé on livre au calcul commun la part universelle de X, mettant entre parenthèses ce qui de sa singularité est impropre au calcul. Les calculs cohomologiques, soit l'essentiel des calculs analysant la constitution de X, et permettant les comparaisons entre la constitution de X et celle d'un Y, se trouvent être des invariants de formes : ils ne dépendent que de la forme, pour un J adapté. Ce passage à la forme nous l'appellons l'*évidement*[31]. Nous tenons là une définition de la forme : la forme d'un objet est ce qui prenant le dehors de l'objet comme substance première de celui-ci se constitue comme la cohérence de cet objet vis-à-vis de ses alter ego, et vient prendre place de sa constitution singulière accidentelle, ; c'est ce qui place l'objet au lieu de l'universel et du partage en calcul.

5. MODALITES DES DISCOURS ET COURBURES DES FIGURES : ASSIMILATIONS ET COHOMOLOGIES.

Nous soutenons ceci : la modélisation mathématique qualitative n'a pas à choisir entre l'approche logicienne et l'approche géométrique, puisqu'au point de vue diagrammatique ces méthodes s'identifient l'une à l'autre[32]. On peut approcher précisément la démarche « logicienne » par spécification de formules modales, et la démarche « homologicienne », par spécification de conditions sur la courbure ou l'homologie. Cela peut s'exposer de deux façons liées, d'abord en termes de conditions différentielles générales et puis en termes d'homologie générale.

La première idée vise l'unification par le calcul des assimilations qui permet de comprendre l'écriture de conditions différentielles générales, incluant les conditions de modalités spéculatives et les conditions de courbure. Question du réglage direct de comment les discours changent, de comment les figures changent.

La deuxième idée affirme encore que d'un point de vue suffisamment éloigné la logique comme question des quantifications et modalités discursives et la cohomologie comme théorie du calcul qualitatif de la courbure et des déformations, se rejoignent ; et cette

[30] G. Mazzola and M. Andreatta, Diagrams, gestures and formulae in music, *Journal of Mathematics and Music*, vol. 1, N0.1, March 2007, 23-46.

[31] R. Guitart, L'évidement des objets et le dehors comme substance, Colloque *Le lemme de Yoneda « enjeux mathématiques et philosophie »*, organisé par Ch. Alunni et A. Badiou, ENS, 18 juin 2007.

[32] R. Guitart, Modalités des discours et courbures des figures, Séminaire mamuphi, ENS, 15 mars 2008 :

fois pour le voir on peut fournir une définition générale du concept d'homologie[33] dont dérive aussi bien les techniques de logique intuitionniste que les techniques d'algèbre homologique abélienne classique. On est alors dans une problématique plus vaste que dans le traitement de la dérivation en termes de régimes, puisqu'il ne s'agit plus d'un simple réglage du changement, mais de l'analyse de la forme même des changements, des changements de changements, etc.

[33] R. Guitart, An anabelian definition of abelian homology, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, vol. XXXXVIII, 4 (2007), 261-269.