REGIMES D'ASSIMILATIONS

ET

CALCUL DES VARIATIONS

A LA POURSUITE DU MÊME

Notes Préparatoires
Numéros 19 à 33

[Mai 1998 à Déc. 1998]

René GUITART
guitart@math.jussieu.fr

Université Paris 7

TABLE[1]

Table

REDACTIONS EN COURS DE PREPARATION :

Régimes, sémiotique, sémantique. Aspects ternaires, logique RSI, hexagone logique. La question de l'Un et de la différenciation comme assimilation. Filtrage et restauration, convolution. Squelettes et géodésies. Le calcul des convexes. Importation en analyse de discours des techniques de l'analyse d'image. Régimes et logiques multimodales, dynamiques, de flèches. Régimes, algèbres cylindriques, et théories des algèbres de relations binaires. Régimes binaires versus régimes d'assimilations entre mots. Le cobordisme et l'assimilation par le bord. Régimes et théories de forme et de coforme. Les infimes et l'analyse non-standard comme régime. Les groupes de Galois à partir du régime algébrique. Les groupes de Klein à partir du régime géométrique. Le groupe d'ambiguïté d'un régime : description directe. Les morphismes de régimes, la catégorie des régimes, les carrés exacts. Notion de régime structuré et de régime enrichi. Régimes internes à la catégorie des régimes. Diagrammes de régimes et pro-régimes.Qualifications et

---

[1] Le présent texte constitue une deuxième livraison des Notes pour le Goupe de Travail "Sémantique Discursive", telle que mise au point à la date du 15 janvier 1999, notes relatives à une partie du travail de l'année 1997-1998. Comme pour la première livraison, le lecteur prendra ces notes pour provisoires, et toutes les remarques sont sollicités.

régimes. La dualité des régimes. Régimes naturels sur les ensembles de parties et univers algébriques. Le groupe d'ambiguïté d'un régime : caractérisation universelle. Théorie de l'ambiguïté d'un pro-régime. Le corps abstrait d'un régime. La logique spéculaire et le va-et-vient local/global. Les infimes d'un régime. Les équation différentielles en théorie des régimes. Le calcul des variations des régimes. Régimes et ré-écritures à h-dimensions. Homologie et cohomologie des régimes. Présentation anabélienne de l'homologie abélienne. Calcul des variations homologique. Régimes et complexes de groupes. ...

19. A LA POURSUITE DU MÊME : QUESTIONS DE MÉTHODE.

19.1. A ce point, une petite digression apparente me paraît utile, pour en particulier souligner quelque chose que l'on pourrait considérer comme paradoxal des présupposés de notre méthode, en particulière face aux "alternatives" comme la pratique intuitioniste par exemple, qui sembleraient plus proche du souci de l'indiscernabilité, et donc plus adéquate à traiter notre sujet.

Pour commencer, il y a, semble-t-il, des objets et des propriétés des objets, et la question de les distinguer et/ou les confondres : première hypothèse. Deuxième hypothèse : de ceci nous pourrons traiter sous condition nécessaire d'une logique classique pour le plus haut niveau de notre discours - le niveau que ce discours utilise mais dont il ne traite pas -, et sous condition de la croyance à l'efficace, la stabilité et la lisibilité, de l'écriture matérielle et de sa géométrie que nous devons toujours utiliser pour calculer et penser. Double question, vaste, de la nécessité de conclure et de l'efficace à cet effet du travail de la littéralité et du calcul, clair ou obscur. Ceci dit sans méconnaître le moins du monde la nécessité de l'intuition ; il ne s'agit ici en aucune façon d'une position formaliste. A tout le moins nous posons donc que, même si cela n'y suffit pas, rien de ce qui peut se penser clairement et distinctement à terme des propriétés des objets n'est dénier par le fait de donner aux propriétés et aux objets des noms, de les désigner par des lettres, de faire fonctionner explicitement ou implicitement la géométrie littéral qui en résulte, et de maintenir en permanence au-dessus de notre pratique une rigueur toute classique et décisive.

19.2. Nous supposons évident, pour commencer - mais la chose en se développant accomplira sa critique -, que nous sachions, de façon claire et distincte, distinguer et confondre, les objets comme les propriétés. Ceci est actualisé par deux signes, $\neq$ et $=$, et nous écrirons $A \neq B$ ou bien $A = B$, suivant que A et B sont distincts ou sont le même.

Nous doutons maintenant que nous sachions distinguer et confondre, mais néanmoins nous introduisons deux signes, ≠ et =, pour écrire cette capacité douteuse. Mais nous maintenons la position initiale, au moins sur un point : nous savons faire clairement et distinctement la différence entre ≠ et =, c'est-à-dire que ces deux signes sont bien deux distincts et chacun est isolable, ce qui s'exprime ainsi :

$$\scriptstyle = \; \displaystyle = \; \scriptstyle =$$

$$\scriptstyle = \; \displaystyle \neq \; \scriptstyle \neq$$

$$\scriptstyle \neq \; \displaystyle = \; \scriptstyle \neq$$

$$\scriptstyle \neq \; \displaystyle \neq \; \scriptstyle =$$

Nous oublions maintenant, la différence éventuelle entre $=$ et =, et la différence éventuelle entre $\neq$ et ≠, c'est-à-dire que nous posons :

$$\scriptstyle = \; \displaystyle = =$$

$$\scriptstyle \neq \; \displaystyle = \neq$$

d'où résulte le tableau (?) énigmatique :

$$\begin{array}{c} = = = \\ = \neq \neq \\ \neq = \neq \\ \neq \neq = \end{array}$$

19.3. Nous introduisons deux nouveaux signes, distincts, □Cl et □Cl, pour pouvoir écrire la capacité que nous décidons avoir d'attribuer et/ou de refuser une propriété : nous écrirons x □Cl X et x □Cl X pour signifier, respectivement, que nous attribuons ou que nous refusons à x la propriété X.

19.4. Nous pensons aussi pouvoir coupler les objets, et nous écrirons (y, x) pour effectuer l'accouplement de y avec x, et nous appellerons un tel objet (y, x) un couple. Nous voulons que l'accouplement de y avec x ne soit pas nécessairement la même chose que l'accouplement de x avec y, sauf si y = x. Nous introduisons donc aussi la mise ensemble de y avec x, que nous écrivons {y, x}, et nous appellerons un tel objet {y, x} une paire. Nous imposons donc

$$\{y, x\} = \{x, y\}.$$

Toutefois, nous considérons que la paire {x, x} n'est plus vraiment une paire, et nous l'appellons plutôt un singleton et la notons simplement {x}.

19.5. Nous imposons que les propriétés soient des objets. De plus, si x est un objet et X une propriété, alors x □Cl X et x □Cl X sont des objets.

19.6. Des propriétés nous supposons savoir poser et faire ceci :

- Nous disposons d'une propriété particulière qui est notée ⊥ que nous appelons le faux, et qui est refusable à tout objet, et d'une autre qui est notée T que nous appelons vrai, et qui est attribuable à tout objet.
- Si X et Y sont deux propriétés nous pouvons les conjoindre, c'est-à-dire former une nouvelle propriété que nous appellerons la conjonction de X et Y et que nous écrirons X & Y.
- Si X et Y sont deux propriétés nous pouvons les emboiter, c'est-à-dire former une nouvelle propriété que nous appellerons l'implication de X par Y et que nous écrirons Y □ X.
- Si X est une propriété, nous voulons pouvoir la nier, et former ainsi une autre propriété, noté NX.
- Soit X une propriété pour laquelle les objets attribuables ou refusables sont de la forme (y, x). Nous imposons de pouvoir alors former deux nouvelles propriétés, notées ∀xX (et ∃xX), de sorte que b soit attribuable à ∀xX si pour tout b le couple (b, a) soit attribuable à X (s'il existe un a tel que le couple (b, a) soit attribuable à X).

19.7. Mais arrêtons là cette "méditation" (en réalité pas si informelle qu'il peut paraître), ce qui est pointé étant suffisant pour la suite, et faisons quelques commentaires.

A ce stade, sans axiomes "conclusifs", nous n'avons pas de théorie. Mais soulignons qu'au sens strict nous n'avons pas imposé plus que ce que nous avons dit. Ainsi nous n'avons pas dit que x □Cl X = N(x □Cl X), ni que (y, x) = {{y}, {y, x}}, ni que ((y, x) = (y', x')) □ (y = y' & x = x'), ni que NX = (X □ ⊥), non plus que NX □ (X □ ⊥) ou bien (X □ ⊥) □ NX, nous n'avons pas imposé non plus que N∀xX = ∃xNX, etc.

Nous n'avons pas non plus préconisé que & ou bien N ou bien soient uniques. Prendre des décisions consistantes sur ces points, impliquant une dynamique de calcul, cela conduit aux logiques linéaire, intuitioniste, co-intuitioniste, ou bien à la logique spéculaire, ou enfin, réduction maximale, à la logique classique, et la théorie des ensembles associée.

Ce que je dis alors est le point surprenant suivant. Partant de la conception classique, où beaucoup des "subtilités" des autres conceptions sont écrasées et oubliées, on peut, certes, "à la main" réinterroger la machinerie et tenter de redécouvrir (par chance ou imagination - grâce à des soucis mathématiques divers -) les théories rendant compte de ce qu'au départ on avait pris soin de ne pas confondre trop vite. Mais, et c'est là le point précis que j'avancerais, il se trouve que <u>le raffinement peut aussi résulter méthodiquement d'un déploiement réglé des effets du calcul ensembliste classique, c'est-à-dire du calcul là ou justement les finesses ont été ignorées</u>.

Autrement dit, il y a une "pulsation ensembliste classique" qui à être soulignée conduit nécessairement aux idées intuitionistes, linéaires, etc. Ce qui sera "prouvé" plus loin (voir les modalités et leurs sémantiques, aux numéros 29 et 31).

Cette pulsation existe matériellement, on en a trace, dans les points de vue d'assimilations π et ψ (cités déjà en 3.6.) que nous traiterons plus tard.

19.8. Mais de plus, pour ceux qui ne seraient pas sensibles aux arguments ou n'y croiraient pas encore, il est de toute façon un autre argument, décisif. Tout ce que je développe ici en l'exprimant "empiriquement" dans le langage ensembliste est ipso facto reformulable dans le cadre intuitioniste et même dans des cadres plus généraux, où existe π et ψ , à savoir dans la théorie des "univers algébriques". Si donc on est gêné par le côté "ensembliste classique" de la mise en place claire et distincte que je propose, on attendra de voir comment effectivement cette reformulation est réalisée.

19.9. J'entends "méthode" non pas comme "système" à appliquer, mais comme une détermination principielle à mettre en œuvre, la mise en œuvre effective n'étant pas algorithmiquement garantie, et toujours sous condition d'intelligence renouvelée du principe et des situations. Il faut discuter ici de la méthode et de sa limite au regard aussi du parti-pris annoncé au N° 0, de sa reprise en 1.5, des remarques faites au N° 4 sur le négatif, des remarques 12.4., 13.8. et 16.9. Et donc aussi avec ce que je viens d'avancer en 19.7. Résumons-les.

1 - Quel est l'*objet* et le programme de la théorie :
A. La mise en évidence de la question de l'assimilation, et de la pulsation nécessaire à la prise de sens, en tant que ceci est dans la dimension de l'acte.

a) en général, dans les opérations observatrices de l'œil, de l'oreille, de l'entendement.

b) dans les théories mathématiques qui existent.et leurs pratiques effectives, leurs actes, que l'on pose comme éléments constitutifs nécessaires de la rationalité et du vrai mathématique.

B. La production, sur la base A, d'un outil utilisable pour l'analyse de discours et d'images, de textes-images mathématiques.

C. Le développement, sur la base A et B, d'analyse de résultats mathématiques conduisant à de nouveaux résultats univoques effectifs, sur la base de la thèse que les structures tiennent leur efficace du point des assimilations qu'elles permettent.
D. Le déploiement du penser de la mathématique et de ses résultats comme seule question du déploiement de la mêmeté et de la distinction.

2 - Comment *penser* nécessairement la théorie pour la développer :
- en maintenant comme principe la pulsation entre visuel et discursif dans notre imagination de l'objet et du programme de la théorie.
- en maintenant la pulsation entre le souci de l'écrire pour ce qu'elle doit traiter, et l'usage d'outils mathématiques déjà constitués.
- en n'accordant qu'un effet de relai aux formulations indirectes par rapport à la question de l'assimilations, ou aux formulations de cette questions qui sont elles-mêmes "assimilatrices", qui s'incorporent consciemment explicitement dans leur écriture un effet d'assimilation qu'elles ne se donne pas dans leur écriture le moyen de contrôler. Comme sont par exemple les théories intuitionistes ou bien les idéalisations structurelles quand "on y croit".

3. Quel doit être le *contenu* de la théorie :

- un contenu principal qui traite explicitement de l'assimilation et la pulsation comme telles. Ce contenu doit comprendre donc des termes interprétables comme décrivant la "logique" non-classique de la pulsation.
- un contenu secondaire qui expose le lien entre le contenu principal et les autres contenus mathématiques des autres théories.
- un contenu tertiaire, qui expose l'enjeu de la théorie, sa méthode.

4. Comment doit être à terme l'*écriture effective* de la théorie :
- de facture classique, claire et distincte, parce que la théorie est faite finalement pour décider. Les objets et la logique déductive de fonctionnement de la théorie sont ensemblistes classiques.

19.10. On peut donc décider sans limitation réelle en réalité (vue la thèse de 19.7) de développer la mathématique du modèle exclusivement sur la base de la logique et la théorie des ensembles classique, ce qui offre l'avantage aujourd'hui que la dite théorie soit recevable comme "proprement dans la mathématique admissible" par la communauté des mathématiciens. Et ceci en regardant comme distinct de la théorie le fait que nous la commentions en la faisant.

Toutefois il y a une limitation réelle, indépendante de la façon dont la théorie est élaborée, mais qui tient à la nature de son but, et il ne faudrait pas s'égarer en en imaginant la portée plus absolue qu'elle ne peut être. En effet, pour "la faire", je m'appuie sans aucun doute sur mes réminiscences et savoirs et savoir-faire mathématiques, "classiques", variés, non saisis précisément d'avance dans l'uniformité du point de vue des régimes ; et c'est cette hétérogénéité qui est active dans la possibilité de l'invention. La théorie des régimes est "totalisante", comme toute théorie ayant des visées de cet ordre (comprendre l'acte mathématique en tant qu'il est vrai) le serait. Elle est en position de médiation au regard du multiple hétérogène des inventions mathématiques, elle est dans le procès de ressaisie en concept de cette invention. Il va de soi par avance que son avenir dépendra encore de l'irruption de l'hétérogène, irruption qui déborde comme événementiel la théorisation, même si la théorie voudrait être théorie de l'irruption. Elle n'en peut être qu'une stase. La question est qu'en cette stase, de la trace de l'irruptif soit alors visible et manipulable. Ce n'est donc pas la fin de l'invention qui pointe, mais un temps de saisir l'inventif comme concept, *une* stase conceptuelle de l'inventif comme tel.

19.11. Mais d'abord, pour poursuivre concrètement, tout ceci nécessite comme outil une bonne description de l'"assimilation entre régimes", de la comparaison entre régimes, soit une notion convenable de morphisme de régime. Ce dont nous allons parler bientôt (on commencera aux numéros 21 puis 33).

20. QUANTIFICATIONS ET DYNAMIQUE DES RELATIONS BINAIRES

20.1. Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Sont définies deux applications de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(F)$, et une application de $\mathcal{P}(F)$ vers $\mathcal{P}(E)$, notées donc $\exists f$, $\forall f$, Cf. Pour les ensembles $(\exists f)(X)$ et $(Cf)(Y)$, les notations usuelles sont plutôt $f(X)$ (et on l'appelle l'ensemble *image* de X par f), et $f^{-1}(Y)$ ou $f^*(Y)$ (et on l'appelle l'ensemble image réciproque ou *image inverse* de Y par f).

On pose donc :

$$\begin{aligned}
\exists f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F) &: (\exists f)(X) = \{y \in F \,;\, \exists x\ (y = f(x)\ \&\ x \in X)\};\\
f^* = Cf : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E) &: (Cf)(Y) = \{x \in E \,;\, f(x) \in Y\};\\
\forall f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F) &: (\forall f)(X) = \{y \in F \,;\, \forall x\ (y = f(x) \Rightarrow x \in X)\}.
\end{aligned}$$

Les notations moins usuelles $\exists f$ et $\forall f$, et la propriété fondamentale qui suit, sont dues à Lawvere[2]. La raison des notations est que si $E = F \times F$ et si $f = pr$ est la projection sur la deuxième coordonnée, soit $pr(x,y) = y$, et si donc X est une relation binaire sur F (soit une partie de E), l'ensemble image $pr(X)$ est

$$pr(X) = \{ y \in F \,;\, \exists x\ [(x, y) \in X]\}.$$

Nous emploierons ces notations de Lawvere car elles permettent sans confusion de traiter d'entités comme $\exists(\exists f)$ ou $\exists(Cf)$ ou $C(\exists f)$, ce dont nous aurons absolument besoin.

On a donc le fait fondamental suivant :

> Entre les ensembles ordonnés $(\mathcal{P}(E), \subset)$ et $(\mathcal{P}(F), \subset)$, les fonctions $\exists f$, Cf et $\forall f$ sont monotones croissantes, et $\exists f$ est adjoint à gauche à Cf, et Cf est adjoint à gauche à $\forall f$:
>
> $$\exists f \dashv Cf \dashv \forall f.$$

On se reportera au N° 2 pour la notion d'adjonction. Les adjonctions $\exists f \dashv Cf \dashv \forall f$ signifient donc que les opérateurs $\exists f$, Cf et $\forall f$ sont monotones croissants et que, pour $X \subset E$ et $Y \subset F$ on a :

$$\exists f(X) \subset Y \quad \text{ssi} \quad X \subset Cf(Y),$$

$$Cf(Y) \subset X \quad \text{ssi} \quad Y \subset \forall f(X).$$

De là résulte que $\exists f$ commutte aux unions quelconques, que Cf commutte aux unions quelconques et aux intersections quelconques, que $\forall f$ commutte aux intersections quelconques.

---

[2] W. F. Lawvere, *Quantifiers and sheaves*, in Actes du Congrès Intern. des math., Nice 1970, tome I, Gauthier-Villars, Paris, pp. 329-334.

On a que C, ∃ et ∀ sont des "foncteurs", c'est-à-dire que l'on a des formules comme

$$C(g_\infty f) = C(f)_\infty C(g),$$

et des formules analogues pour ∃ et ∀.

20.2. On vérifie qu'une fonction F a priori arbitraire d'un ensemble P(E) vers un ensemble P(F) est de la forme ∃f si et seulement si F est croissante monotone et admet une adjointe à droite R admettant elle-même une adjointe à droite R' :

$$F \dashv R \dashv R'.$$

Et alors f est uniquement déterminée. Ou aussi bien, une fonction R a priori quelconque d'un ensemble P(F) vers un ensemble P(E) est de la forme Cf si et seulement si R est croissante monotone et admet une adjointe à gauche F et une adjointe à droite R' ; ou encore, ce qui revient au même, R est compatible avec les suprema quelconques et avec les infima quelconques[3].

20.3. Si ε □ P(E∞F) est une relation binaire de E à F, on définit, comme dans le cas E = F (cf. numéro 3), les augmentation et diminution par ε en posant :

$$\varepsilon[x] = \{y\ ;\ (x,y)\ \square\ \varepsilon\}, \qquad Xb\varepsilon = \{y\ ;\ \varepsilon^{op}[y] \leftrightarrow X\ \pi\ \square\},$$

$$\varepsilon^{op}[y] = \{x\ ;\ (x,y)\ \square\ \varepsilon\}, \qquad Yd\varepsilon = \{x\ ;\ \varepsilon[x] \prod Y\}.$$

On dispose ainsi de (-) b ε : P(E) ∅ P(F) et (-) d ε : P(F) ∅ P(E), deux applications croissantes qui sont adjointes : (-) b $\varepsilon \dashv$ (-) d ε. Autrement dit on a :

$$\boxed{Xb\varepsilon \prod Y \quad \text{ssi} \quad X \prod Yd\varepsilon.}$$

On associe aussi (comme en 3.7.) à ε les deux opérateurs

$$[\leftrightarrow\varepsilon](X) = \leftrightarrow_{x\ \square X}\ \varepsilon[x], \quad \text{et} \quad [\leftrightarrow\varepsilon^{op}](Y) = \leftrightarrow_{y \square Y}\ \varepsilon^{op}[y],$$

et ces opérateurs $[\leftrightarrow\varepsilon]$ et $[\leftrightarrow\varepsilon^{op}]$ sont anti-monotones (i.e. décroissants) et forment une correspondance de Galois[4], c'est-à-dire que l'on a, pour tous X ∏ E et Y ∏ F :

$$[\leftrightarrow\varepsilon]([\leftrightarrow\varepsilon^{op}](Y)) \quad Y \quad \text{et} \quad [\leftrightarrow\varepsilon^{op}]([\leftrightarrow\varepsilon](X)) \quad X\ ;$$

---

[3] R. Guitart, *Problèmes universels associés à quelques catégories d'applications*, CRAS, Paris, t.270, pp. 1398-1401, 1970.

[4] voir par exemple O. Ore, *Theory of graphs*, AMS Colloquium Publications vol. XXXVIII, 1962, chapter 11.

ou encore, ce qui revient au même, que l'on a :

$$[^{\leftrightarrow}\varepsilon](X) \quad Y \;€\; [^{\leftrightarrow}\varepsilon^{op}](Y) \quad X.$$

L'adjonction (-) b ε —l (-) d ε et la correspondance de Galois $([^{\leftrightarrow}\varepsilon]\,,\,[^{\leftrightarrow}\varepsilon^{op}])$ sont liées par :

$$[^{\leftrightarrow}\varepsilon](X) = N(XbN\varepsilon), \quad \text{et} \quad [^{\leftrightarrow}\varepsilon^{op}](X) = (NX)dN\varepsilon.$$

Réciproquement, supposons donnée g : P(E) ∅ P(F) et d : P(F) ∅ P(E), deux applications croissantes adjointes (g —l d). Alors il existe une unique relation binaire ε = Nη □ P(E∞F) telle :

$$g = (-)\, bN\eta \quad \text{et} \quad d = (-)\, d\, N\eta.$$

En effet a g —l d correspond à la correspondance de Galois (u,v) donnée par

$$u(X) = Ng(X), \quad \text{et} \quad v(Y) = d(NY),$$

et (voir Ore, p. 188, Théorème 11.2.3.) la correspondance de Galois (u,v) est déterminée par une unique relation binaire η donnée par :

$$(x,y) \;□\; \eta \;€\; y \;□\; u(\{x\}) \;€\; x \;□\; v(\{y\}).$$

Au niveau de l'adjonction g —l d, ε = Nη est donc déterminée par :

$$(x,y) \;□\; \varepsilon \;€\; y \;□\; g(\{x\}) \;€\; x \;□\; Nd(N\{y\}).$$

Retenons donc désormais ceci que la donnée d'<u>une relation binaire</u> ε □ P(E∞F) <u>est équivalente à la donnée d'une adjonction</u> (g : P(E) ∅ P(F)) —l (d : P(F) ∅ P(E)).
L'unique adjonction ((-) b ε : P(E) ∅ P(F)) —l ((-) d ε : P(F) ∅ P(E)) associée à ε □ P(E∞F) est considérée comme la "dynamique" de ε, puisque par son entremise, on dispose d'une "action" de ε reliant les parties de E aux parties de F. On ne confondra pas cette dynamique de ε avec la "dynamique" de ε^{op}, qui va dans l'autre sens, et est donnée comme ((-) bε^{op} : P(F) ∅ P(E)) —l ((-) d ε^{op} : P(E) ∅ P(F)).
L'unique relation binaire ε □ P(E∞F) dont la dynamique (l'adjonction associée) est une adjonction donnée (g : P(E) ∅ P(F)) —l (d : P(F) ∅ P(E)) sera elle considérée comme la détermination "statique" de (g : P(E) ∅ P(F)) —l (d : P(F) ∅ P(E)).

20.4. De même qu'en 8.5. et 8.6., si μ □ P(E∞F) et η □ P(F∞G), on a, pour le composé $\eta_\infty\mu$ □ P(E∞G):

$$(-)d(\eta_\infty\mu) = ((-)d\mu)_\infty((-)d\eta\,),$$
$$(-)b(\eta_\infty\mu) = ((-)b\eta)_\infty((-)b\mu\,),$$

soit

$$Zd(\eta_\infty\mu) = (Zd\eta\,)d\mu,$$
$$Xb(\eta_\infty\mu) = (Xb\mu\,)b\eta.$$

20.5. Voyons maintenant le lien entre les quantifications et substitution (∃f—| Cf —| ∀f.) et les calculs d'augmentation et diminution ((-) b ε —| (-) d ε).

Si f : E ∅ F est une application, on lui associe une relation binaire de E à F, notée rel(f), et définie par :

$$(x, y) \square \text{rel}(f) \text{ € } f(x) = y.$$

On a :

$$\begin{aligned}
X\ \text{brel}(f) &= \{y ; \text{rel}(f)^{op}[y] \leftrightarrow X\ \pi\ \square\} = \exists f(X),\\
Y\ d\ \text{rel}(f) &= \{x ; \text{rel}(f)[x] \prod Y\} = Cf\ (Y),\\
Y\ \text{brel}(f)^{op} &= \{x ; \text{rel}(f)[x] \leftrightarrow Y\ \pi\ \square\} = Cf\ (Y),\\
X\ d\ \text{rel}(f)^{op} &= \{y ; \text{rel}(f)^{op}[y] \prod X\} = \forall f\ (X).
\end{aligned}$$

Comme on l'a dit en 20.2., la donnée d'une fonction f : E ∅ F est équivalente à la donnée d'une "double" adjonction :

$$(g : P(E) \varnothing P(F)) \dashv (d : P(F) \varnothing P(E)) \dashv (r : P(E) \varnothing P(F)),$$

laquelle peux s'écrire

$$\exists f \dashv Cf \dashv \forall f,$$

et aussi donc :

$$(-)\text{brel}(f) \dashv (-)\ d\ \text{rel}(f) = (-)\ \text{brel}(f)^{op} \dashv (-)\ d\ \text{rel}(f)^{op}.$$

Si maintenant ε □ P(E∞F) est une relation binaire de E à F, on définit son graphe G(ε) et les deux fonctions de projection e et f de ce graphe G(ε) sur E et F par :

$$G(\varepsilon) = \{(x, y) \square E\infty F ; (x, y) \square \varepsilon\} = \varepsilon,\ \ e(x,y) = x,\ \ f(x,y) = y.$$

On a alors

$$\varepsilon = \text{rel}(f)_{\infty}\text{rel}(e)^{op}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}
Xb\varepsilon &= Xb(\text{rel}(f)_{\infty}\text{rel}(e)^{op}) = (X\text{brel}(e)^{op})\text{brel}(f) = \exists f(Ce(X)),\\
Yd\varepsilon &= Yd(\text{rel}(f)_{\infty}\text{rel}(e)^{op}) = (Y\text{drel}(f))\text{drel}(e)^{op} = \forall e(Cf(Y)),\\
Yb\varepsilon^{op} &= Yb(\text{rel}(e)_{\infty}\text{rel}(f)^{op}) = (Y\text{brel}(f)^{op})\text{brel}(e) = \exists e(Cf(X)),\\
Xd\varepsilon^{op} &= Xd(\text{rel}(e)_{\infty}\text{rel}(f)^{op}) = (X\text{drel}(e))\text{drel}(f)^{op} = \forall f(Ce(Y)).
\end{aligned}$$

20.6.Considérons les opérateurs que je note ψ_E et π_E, qui à une partie A de E associe un ensemble de parties comme ceci :

$$\psi_E(A) = \{X \prod E\ ;\ A \leftrightarrow X \neq \square\ ,$$

$$\pi_E(A) = \{X \prod E\ ;\ X \prod A\}.$$

Ainsi ψ_E et π_E sont des fonctions :

$$\psi_E\ , \pi_E : P(E) \varnothing\ \ P(P(E)).$$

On appelle "*transposition*" une loi $(-)^t$ qui à toute relation binaire r d'un ensemble E vers un ensemble F associe une fonction r^t de P(F) vers P(E) (qui sera dite "transposée" de r par $(-)^t$), ceci étant donné pour tous les ensembles E, F, et toutes les relations r, cette loi $(-)^t$ satisfaisant aux deux conditions :

- si en fait r = f est une fonction de E vers F, alors

$$f^t = Cf,$$

- si r est une relation de E vers F et s une relation de F vers G, alors

$$(s \circ r)^t = r^t \circ s^t.$$

La question est alors de déterminer toutes les transpositions.

La réponse est (voir l'article *Calcul des Relations Inverses* [5], corollaire II.15 p. 31) ceci :

il existe exactement deux transpositions.

En considérant la relation r comme déterminée par une fonction $r : E \varnothing P(F)$, on pose :

$$r^\psi = C(r) \circ \psi_F,$$
$$r^\pi = C(r) \circ \pi_F.$$

Alors $(-)^\psi$ est $(-)^\pi$ <u>sont les deux seules transpositions sur les relations binaires</u>.

Ainsi s'explique le caractère unique et privilégié des deux fonctions ψ_E et π_E .

Et du même coup, on voit le rôle privilégié des augmentations et diminutions, puisque l'on a alors, pour toute relation binaire r :

$$r^\psi(Y) = (C(r) \circ \psi_F)(Y) = (C(r)(\psi_F(Y)) = \{x\ ;\ r[x] \leftrightarrow Y \neq \square\ \} =: Ybr^{op},$$
$$r^\pi(Y) = (C(r) \circ \pi_F)(Y) = (C(r)(\pi_F(Y)) = \{x\ ;\ r[x] \prod Y\} \qquad =: Ydr.$$

Je note aussi par $a_E : E \varnothing\ \ P(E)$ et $t_E : E \varnothing\ \ P(P(E))$ les fonctions données par :

---

[5]R. Guitart, *Calcul des relations inverses*, Cahiers Top. Géo. Diff., vol. XVIII-1, (1977), pp. 67-100.

$$a_E(x) = \{x\}, \text{ et } \quad t_E(x) = \{X \prod E \,;\, x \,\square\, X\}.$$

On a donc :

$$t_E = \psi_E \infty a_E,$$

et pour toute fonction du type $f : A \varnothing \mathrm{P}(B)$, on voit que :

$$b \,\square\, f(a) \text{ € } a \,\square\, (C(f)_\infty\, t_A)(b).$$

Une relation binaire r détermine (et est déterminée par) la fonction $r : E \varnothing \mathrm{P}(F)$ qui à x associe $r(x) = r[x] = \{y \,\square\, F \,;\, (x, y) \,\square\, r\}$, et cette fonction peut toujours s'écrire, en regardant son graphe $R = \{(x,y)\ E\infty F \,;\, y \,\square\, r(x)\}$ et les deux fonctions de "projection" p: $R \varnothing E$ et $q : R \varnothing F$ données par $p(x,y) = x$ et $q(x,y) = y$, sous la forme :

$$r = \mathrm{rel}(q)\circ\mathrm{rel}(p)^{op} = \exists(q)\circ C(p)\circ a_E.$$

Alors on a :

$$C(r)\circ\psi_F = \exists(p)\circ C(q),$$
$$C(r)\circ\pi_F = \forall(p)\circ C(q).$$

20.7. Enfin, rattachons cette "unicité" des deux opérateurs ψ_E et π_E et à celle des quantificateurs $\exists$ et $\forall$, ou plus précisément des $\exists f$ et $\forall f$. Ces deux opérateurs sur les fonctions $\exists$ et $\forall$ sont des *foncteurs covariants* de la catégorie des ensembles vers elle-même, et de valeur $\mathrm{P}(E)$ sur chaque ensemble E.

C'est-à-dire que chacun est une donnée F qui :

- 1) à chaque ensemble E associe un ensemble F(E),
- 2) à chaque fonction $f : E \varnothing E'$ associe une fonction $F(f) : F(E) \varnothing F(E')$,
- 3) avec :
    - 3-1) pour tout E, on a :

$$F(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Id}_{F(E)},$$

  - 3-2) pour toute succession de fonctions $f : E \varnothing E'$ et $f' : E' \varnothing E''$, on a :

$$F(f'\circ f) = F(f')\circ F(f).$$

Et, donc, de plus, on demande :

$$F(E) = \mathrm{P}(E).$$

Mais de plus encore ces deux foncteurs $\exists$ et $\forall$ satisfont à une condition supplémentaire.

Etant données deux fonctions quelconques $g : G \varnothing B$ et $h : H \varnothing B$ de même but B, on note $P = g\infty_B h$ l'ensemble *produit fibré* de g et h au-dessus de B, à savoir

$$P = g\infty\ {}_B h := \{(x, y) \,\square\, G\infty H \,;\, g(x) = h(y)\},$$

et on note g' : P ∅ G et h' : P ∅ H les deux fonctions

$$g'(x, y) = x \text{ et } h'(x, y) = y.$$

On dit alors que le diagramme commutatif de fonctions

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "="] & H \arrow[d, "h"] \\ G \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

est un produit fibré de g et h.

Alors donc ∃ et ∀ sont deux foncteurs F vérifiants :

- 4) étant donné un produit fibré de deux fonctions quelconques g et h, alors on a le diagramme commutatif de fonctions

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}P \arrow[d, "Fg'"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{P}H \arrow[l, "Ch'"'] \arrow[d, "Fh"] \\ \mathcal{P}G & \mathcal{P}B \arrow[l, "Cg"] \end{tikzcd}$$

On a le résultat suivant :

<u>les conditions</u> 1) <u>à</u> 4) <u>caractérisent ∃ et</u> ∀.

Ceci résulte du résultat précédent qui caractérise les transpositions, lorsque l'on ajoute les propriétés du calcul de la composition des relations "par produits fibrés". En effet, une relation binaire quelconque r : E ∅ $\mathcal{P}(F)$, écrite sous la forme $r = rel(q)\circ rel(p)^{op}$ pourra se composer avec s : F ∅ $\mathcal{P}(G)$, écrite sous la forme $s = rel(q')\circ rel(p')^{op}$, en considérant le produit fibré de q et p', qui est bien le graphe de la relation composée, de sorte que si F vérifie les conditions imposée, on détermine bien une transposition sur les relations binaire en posant :

$$r^t = F(p)\circ C(q).$$

Alors ou bien on a, pour tous les r, $F(p)\circ C(q) = \exists(p)\circ C(q)$, ou bien on a, pour tous les r, $F(p)\circ C(q) = \forall(p)\circ C(q)$. Par suite $F = \exists$ ou $F = \forall$.

20.8. On a donc trois présentations possibles, en $\exists$, C, $\forall$, en π , ψ, C, a, ou encore en b, d, avec des traductions entre elles que nous venons de construire :

$\exists f(X) = C(a_F).C^2(f).\psi_E(X)$, $\forall f\ (X) = C(a_F).C^2(f).\pi_E(X)$;
$\exists f(X) = X\ \mathrm{brel}(f)$, $Cf\ (Y) = Y\ d\ \mathrm{rel}(f) = Y\ \mathrm{brel}(f)^{op}$, $\forall f\ (X) = X\ d\ \mathrm{rel}(f)^{op}$;

$Xb\varepsilon = \exists f(Ce(X))$, $Yd\varepsilon = \forall e(Cf(Y))$, $Yb\varepsilon^{op} = \exists e(Cf(X))$, $Xd\varepsilon^{op} = \forall f(Ce(Y))$;
$Ybr^{op} = (C(r)\circ\psi_F)(Y) = r^{\psi}\ (Y)$, $Ydr = (C(r)\circ\pi_F)(Y) = r^{\pi}\ (Y)$;

$C(r)\circ\psi_F = \exists(p)\circ C(q)$, $C(r)\circ\pi_F = \forall(p)\circ C(q)$;
$C(r)\circ\psi_F = Ybr^{op}$, $C(r)\circ\pi_F = Ydr$.

Et l'unicité de l'un des systèmes (e.g. $\exists$, C, $\forall$) se reporte sur les deux autres. Nous disposons donc là d'un triple jeu de trois présentations d'un "unique" calcul permettant de rendre compte et de manipuler explicitement, de façon générative, une unique notion, à savoir la notion d'adjonction (g : P(E) ∅ P(F)) —| (d : P(F) ∅ P(E)). Mais en fait, la notion d'adjonction en question pourrait se déterminer a posteriori dans ce calcul lui-même, par exemple[6] par :

$$(g : P(E) \varnothing P(F)) \dashv (d : P(F) \varnothing P(E)) \quad € \quad C(g).\pi_F = \pi_E.d.$$

C'est donc suivant les problématiques seulement que l'on aurait à choisir entre les quatre possibilités de calculs, et, à vrai dire, se sera, au plan mathématique, d'une pulsation entre les variantes, d'un jeu de change et échange entre elles, que l'on tirera le plus de profit. On ne négligera pas non plus d'autres opérateurs dérivés que l'on pourrait à leurs tours prendre comme origine, comme par exemple les opérateurs d'engrénement $(-)^{*}$ (cf. en 22) ou les opérateurs d'intérieur générique et de fermeture générique Ω et Φ (cf. en 24.7), non plus que le calcul modal des opérateurs de nécessité et possibilité □ et ▯ (cf. 27.2. à 32.). Toutes ces choses sont juste (mais c'est essentiel) des modes différents de penser la même question, et s'avèrent à termes algébriquement équivalentes. Nous allons y venir.

---

[6] voir R. Guitart, *Calcul des relations inverses*, Caliers Top. Géo. Diff. XVIII-1 (1977), pp. 67-100.

21.PREALABLES AUX MORPHISMES DE REGIMES

21.1. On commence ici une première partie de discussion en vue de ce que devraient naturellement être les morphismes de régimes. Je rappelle d'abord en général la définition et le moyen de manipuler un ensemble quotient et ses éléments. L'ensemble quotient $I/\spadesuit$ d'un ensemble I par une relation d'équivalence $\spadesuit$ (i.e. une relation binaire $\spadesuit$ sur I qui est réflexive, symétrique et transitive) est celui dont les éléments sont les "classes d'équivalence" d'éléments de I modulo $\spadesuit$, c'est-à-dire les parties C de I telles que :

$$\exists\, i \in I\, [\, i \in C] \,;$$
$$\forall i, j \in I\, [\, i , j \in C \Rightarrow i \spadesuit j] \,;$$
$$\forall i , j \in I\, [(i \in C \,\&\, i \spadesuit j) \Rightarrow j \in C].$$

Si $i \in C$ on dit que i est un représentant de la classe C, et l'on a $C = \{j \in I \,;\; i \spadesuit j\}$. On écrit encore $C := \langle i\rangle$, et on dit que C est la classe de i. Alors $i \spadesuit j$ équivaut à $\langle i\rangle = \langle j\rangle$. On note $q_{\spadesuit} : I \varnothing I/\spadesuit$ la fonction surjective de "passage au quotient" qui à i associe $q_{\spadesuit}(i) = \langle i\rangle$. Réciproquement, étant donnée une fonction surjective $q : I \varnothing Q$, on définit une relation d'équivalence $\spadesuit_q$ sur I par $i \;\spadesuit_q\, j$ si et seulement si $q(i) = q(j)$. En particulier on a : $\spadesuit_{q_{\spadesuit}} = \spadesuit$.

21.2. En fait, en pratique, très souvent ce n'est pas explicitement l'ensemble $I/\spadesuit$ lui-même que l'on est amené à manipuler, mais seulement l'ensemble $IM(\spadesuit) = P(I/\spadesuit)$ des parties de $I/\spadesuit$. Or on peut construire cet ensemble IM(r) directement, pour toute relation binaire r sur I, sans supposer à priori que l'ensemble intermédiaire I/r existe, c'est-à-dire que r soit une relation d'équivalence sur I. Simplement, si jamais il se trouve que r soit une relation d'équivalence $\spadesuit$, on aura que IM(r) sera de la forme $P(I/\spadesuit)$. Donc, pour toute relation binaire r sur I on pose :

$$IM(r) = \{X \prod I \,;\, \exists\, Y \prod I\, [X = r(Y)],$$

avec, pour tout $Y \prod I$,

$$r(Y) = \{j \in I \,;\, \exists\, i \in I[(j, i) \in r]\}.$$

Associées à la relation binaire r on obtient donc trois fonctions

$$\begin{tikzcd} P(I) \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "k"'] & & P(I) \\ & IM(r) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où, avec un abus de notations manifeste, on note encore r la fonction de P(I) dans P(I) qui à tout Y associe r(Y) (soit en fait la fonction (-)br) ; on a noté k la fonction surjective de P(I) dans IM(r) définie par k(Y) = r(Y), et i l'injection canonique de IM(r) dans P(I), définie par i(X) = X. Ainsi r se trouve décomposée en une surjection k suivie d'une injection i, ce qui justifie que IM(r) soit ainsi notée, en pensant que c'est l'"image de r".

21.3. Mais en fait, ce dont on a besoin est plus précis. La fonction r de P(I) dans P(I) n'est pas quelconque : elle est compatible avec les unions quelconques ; et on voudrait une décomposition de r en une surjection k suivie d'une injection i telles que l'ensemble intermédiaire soit un ensemble ordonné admettant tous les suprema, que k et i soient compatibles avec les calculs de suprema. C'est bien le cas avec IM(r) = P(I/♠) lorsque r = ♠ i.e. lorsque r est une relation d'équivalence ♠, l'ordre adopté sur IM(r) étant l'ordre d'inclusion. En particulier si l'on suppose seulement r idempotente, c'est-à-dire telle que $r_\infty r = r$, et si une telle décomposition est possible, on dira que r est scindable, ou brièvement que r est une relation idempotente scindable. Autrement dit, r idempotente de I vers I est scindable si et seulement s'il existe Q, une relation q de I vers Q, une relation q' de Q vers I, telles que $r = q'_\infty\, q$ et $q_\infty\, q' = Id_Q$.Ainsi une relation d'équivalence est un idempotent scindable. On montre que'un idempotent est scindable si et seulement si l'ensemble ordonné par inclusion IM(r) est "atomistique" i.e; de la forme P(K) pour un certain ensemble K (à déterminer). Plus précisément on a[7] :

Une relation binaire r sur I est un idempotent scindable si et seulement si, en écrivant $x \varnothing_r y$ pour (x, y) □ r, on a :

1 - ∀x, u, y [$x \varnothing_r u$ & $u \varnothing_r y$ □ $x \varnothing_r y$] ;
2 - ∀x, y [$x \varnothing_r y$ □ ∃ u ($x \varnothing_r u$ & $u \varnothing_r u$ & $u \varnothing_r y$] ;
3 - ∀ u, v [($u \varnothing_r u$ & $u \varnothing_r v$ & $v \varnothing_r v$) □ $v \varnothing_r u$].

Dans ce cas le scindage (le terme intermédiaire) est P(Ir/$\sim_r$), avec Ir = {x □ I ; $x \varnothing_r x$} et $x \sim_r y$ si et seulement si ($x \varnothing_r y$ & $y \varnothing_r x$)., et on a bien : IM(r) = P(Ir/$\sim_r$).

De plus Guitart et Riguet montrent que les ensembles ordonnés du type IM(r) pour un r idempotent quelconque (non nécessairement scindable) sont exactement les "treillis complètement distributifs complets" au sens de Raney[8], et ceci de sorte qu'une application F compatible avec les suprema quelconque d'un IM(r), avec r sur I, vers un IM(s), avec s sur J, soit équivalente à la donnée d'une relation binaire t de I à J telle que

$$t_\infty r = t = s_\infty t.$$

21.4. Si r et s sont des idempotents scindables, alors une application f : Ir/$\sim_r$ ∅ Js/$\sim_s$ détermine évidemment une application compatible avec les suprema de P(Ir/$\sim_r$) vers P(Js/$\sim_s$), donnée par F(X) = f(X) := { f(x) ; x □ X}. Mais cette application compatible avec les suprema n'est pas quelconque : de plus, elle envoie un atome de P(Ir/$\sim_r$) sur un atome de P(Js/$\sim_s$). Ce qui peut se caractériser en terme d'adjonctions (voir 20.2.). Retenons pour le moment que, en principe, les fonctions entre des ensembles Ir/$\sim_r$ et Js/$\sim_s$ peuvent se déterminer sans que ces ensembles "existent" comme des fonctions particulières entre P(Ir/$\sim_r$) et P(Js/$\sim_s$), c'est-à-dire entre IM(r) et IM(s). Et ces ensembles IM(r) et IM(s) sont, eux, toujours définis, pour des relations binaires

---

7 R. Guitart et J. Riguet, *Enveloppe Karoubienne de Catégories de Kleisli*, Cahiers Top. Géom. Diff. Cat., vol. XXXIII (1992), pp. 261- 266.
8 G.N. Raney, *Completely distributive complete lattices*, Proceedings of the A.M.S. 3 (1952), pp. 677-680.

idempotentes quelconques, et même pour des relations binaires quelconques. On pourra donc tout-à-fait envisager, définir et manipuler les fonctions entre ensembles quotients du genre I/♠, ou même entre ensembles du type plus général $Ir/\sim_r$, sans en fait que ceux-ci existent, sans rien supposer des relations binaires en jeu. On est là dans ce que Grothendieck pratique couramment, à savoir que pour manipuler le dernier terme d'une chaîne de constructions (ici les "fonctions" entre quotients ou entre sous-quotients) il n'est pas nécessaire que les termes intermédiaires (lesdits quotients) existent.

De là on déduit, pour r et s idempotentes scindables, que la donnée d'une application f de $Ir/\sim_r$ vers $Js/\sim_s$, équivaut à la donnée d'une fonction monotone F de $P(Ir/\sim_r) = IM(r)$ vers $P(Js/\sim_s) = IM(s)$, telle qu'il existe une adjointe R à F à droite et une adjointe R' à R à droite.

Dans le cas où r et s sont idempotentes, cela est donc déterminée par une relation binaire t de I à J telle que $t\,{}_\infty r = t = s_\infty t$, - ce qui déjà garantit que la fonction F associée est compatible avec les suprema, et donc qu'elle a une adjointe à droite R -, et telle que R soit elle-même compatible avec les suprema (ce qui garantit que R admet une adjointe à droite R').

21.5. Nous sommes donc intéressés à déterminer un morphisme d'une relation binaire r sur I vers une relation binaire s sur J ainsi, comme une application de l'ensemble $Ir/\sim_r$ vers l'ensemble $Js/\sim_s$, en particulier parce que c'est suivant cette procédure, ou une procédure équivalente, que sont définis les morphismes entre Ω-sets[9] ou applications empiriques[10].

Avec nos notations (voir au N° 13) soit donc e : I ∅ $P(X^2)$ le régime déterminant X comme un ensemble empirique observé par I, et soit f : I ∅ $P(F^2)$ le régime déterminant Y comme un ensemble empirique observé par I. Soit Ω(I) l'ensemble des ouverts de I. *Un morphisme de* e *vers* f est la donnée d'une relation ternaire R ∏ I ∞X ∞Y, soit une application r : I ∅ P(X ∞Y), telle que, en écrivant "x' $\varnothing_{e(i)}$ x", "y $\varnothing_{f(i)}$ y'" et "x $\varnothing_{r(i)}$ y" pour " (x', x) □ e(i)", "(y, y') □ f(i)" et" (x, y) □ r(i)" :

1 - ∀i □ I [(x' $\varnothing_{e(i)}$ x & x $\varnothing_{r(i)}$ y) □ x' $\varnothing_{r(i)}$ y] ;
2 - ∀i □ I [(x $\varnothing_{r(i)}$ y & y $\varnothing_{f(i)}$ y') □ x $\varnothing_{r(i)}$ y'] ;
3 - ∀i □ I [x $\varnothing_{r(i)}$ y □ (x $\varnothing_{e(i)}$ x & y $\varnothing_{f(i)}$ y)] ;
4 - ∀i □ I [(x $\varnothing_{e(i)}$ x) □ ∃y (x $\varnothing_{r(i)}$ y)] ;
5 - ∀i □ I [(x $\varnothing_{r(i)}$ y & x $\varnothing_{r(i)}$ y') □ y $\varnothing_{f(i)}$ y'] ;
6 - ∀x □ X ∀y □ Y [{i □ I ; x $\varnothing_{r(i)}$ y} □ Ω(I)].

[9] M.P. Fourman and D. S. Scott, *Sheaves and logic*, in Applications of Sheaves, Proceedings, Durham 1977, Lecture Notes in mathematics, n° 753, Springer, 1979, pp. 302-401.
[10] J. Bénabou, *Théorie des ensembles empiriques* (1), Séminaire 1987-1988, Cahiers de Poétique Comparée, Deuxième série, Mezura N°17, 1988, 72 p.

Lorsqu'il s'agit d'ensembles empiriques, la condition 6 exprime la "stabilité", - sur quoi nous reviendrons ultérieurement au titre de l'axiome de passage du N° 11.2. -, et les conditions 1 à 3 et 6 signifient que l'on a une *relation* (empirique) entre les deux ensembles empiriques.

Et les conditions 1 à 5 équivalent à la donnée d'une famille indexée par I d'applications

$$\lambda(i) : Xe(i)/\sim_{e(i)} \varnothing\ Yf(i)/\sim_{f(i)}.$$

S'il s'agit bien d'ensembles empiriques, ou seulement si les relations binaires e(i) et f(i) sont des idempotents scindables, ceci revient donc bien, vue ce que nous venons d'expliquer plus haut, à une famille indexée par I d'applications monotones $\mu(i)$ ayant un adjoint à gauche $\lambda(i)$ et un adjoint à droite $\rho(i)$:

$$\mu(i) :\ IM(f(i)) \varnothing\ IM(e(i)),$$

$$\lambda(i) \dashv \mu(i) \dashv \rho(i).$$

21.6. Si a : I $\varnothing$ P(E^2) est un régime quelconque de hauteur 1, pour tout i I, la relation binaire ou "point de vue" a(i) détermine entre P(E) et P(E) une adjonction (voir en 7.1.) :

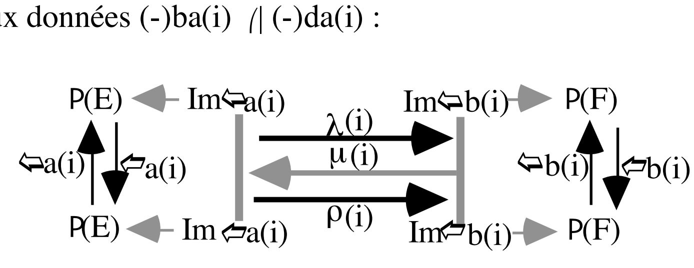
$$(-)ba(i)\ /|\ (-)da(i),$$

et à cette adjonction est donc associée (voir en 2.5.) une "fixation" qui donne une bijection entre les "fermés" de l'adjonction et les "ouverts" de l'adjonction, soit les bijections réciproques induites par (-)ba(i) et (-)da(i) :

$$ba(i) : Im(da(i)) =\{Xda(i)\ ;\ X \prod E\} \int \{Xba(i)\ ;\ X \prod E\} = Im(ba(i)) : da(i).$$

L'ensemble de gauche des "fermés" c'est-à-dire des parties de la forme F = Xda(i) est aussi l'ensemble des F tels que F = (Fba(i))da(i), et l'ensemble de droite des "ouverts" c'est-à-dire des parties de la forme U = Xba(i) est aussi l'ensemble des U tels que U = (Uda(i))ba(i). Comme on sait que Xba(i) = a(i)(X), l'ensemble Im(ba(i)) des "ouverts" n'est autre que l'ensemble IM(a(i)) utilisé ci-dessus.

J'en viens donc à retenir pour l'instant pour décrire les morphismes entre régimes de hauteur 1 où I est fixé, aux ingrédients $\lambda(i) \dashv \mu(i) \dashv \rho(i)$ situés dans la figure suivante qui les relient aux données (-)ba(i) /| (-)da(i) :



Nous continuerons cette discussion plus loin (voir le numéro 33 et ensuite).

22. ENGRENEMENT, FILTRES, GRILLES, ULTRAFILTRES, ASSEMBLAGES

22.1. Schmidt[11] introduit le "Verzahnungoperator" $(-)^*$, terme que je traduirais par *engrènement* (du mot "engrenage") ainsi :

Soit E un ensemble, et M un ensemble de parties de E (c'est-à-dire que $M \in P(P(E))$). Alors l'engrené de M est l'ensemble M^* constitué des parties X de E qui rencontrent tous les éléments de M ; c'est-à-dire :

$$M^* = \{X \subset E \; ; \forall M \, [(M \in M) \Rightarrow M \cap X \neq \emptyset]\}.$$

Alors on a :

$$- \; N \subset M \Rightarrow N^* \supset M^*$$

$$- \; N^* \supset M \Leftrightarrow N \subset M^*$$

et donc, avec la notation du N° 2 :

$$(-)^* : (P(P(E)), \subset) \to (P(P(E)), \supset) \dashv (-)^* : (P(P(E)), \supset) \to (P(P(E)), \subset),$$

c'est-à-dire que l'on a une adjonction. Par suite on a :

$$M^{***} = M^*.$$

22.2. Un *filtre*[12] sur E est un ensemble F de partie de E tel que :

1 - si $F \in F$ et $G \supset F$, alors $G \in F$.
2. si $F \in F$ et $G \in F$, alors $F \cap G \in F$.
3. $E \in F$.
4. $\emptyset \notin F$.

Un *ultrafiltre* est un filtre U tel que :

5. pour toute partie A de E, ou bien $A \in U$ ou bien $E \backslash A \in U$.

Si l'on admet l'axiome du choix, cette condition est équivalente à dire qu'il n'existe pas de filtre strictement plus grand que U .

Schmidt montre que :

- M est un filtre si et seulement si M^* est une grille[13].

---

[11] J. Schmidt, *Beiträge zür filter theorie, I, II*, Mathematische Nachrichten, 7, (1952), pp. 359-378, et 10, (1953), pp. 197-231.
[12] H. Cartan, *Théorie des filtres*, CRAS Paris 205, pp. 595-598 (1937),
Filtres et ultrafiltres, CRAS Paris 205, pp. 777-779 (1937).

- si F est un filtre, alors c'est un ultrafiltre si et seulement si $F = F^*$.

22.3.En fait on peut caractériser aisément un ensemble $\mathcal{A}$ de parties quelconque de E qui est son propre engrené, c'est-à-dire tel que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*.$$

Cette condition est satisfaite si et seulement si :

1 - si $F \in \mathcal{A}$ et $G \in \mathcal{A}$, alors $F \cap G \neq \emptyset$.
2 - si $F \in \mathcal{A}$ et $G \supset F$, alors $G \in \mathcal{A}$.
3 - $E \in \mathcal{A}$.
4 - pour toute partie X de E, ou bien $X \in \mathcal{A}$ ou bien $E \backslash X \in \mathcal{A}$.

En effet soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$. La première condition signifie 1. Si $F \in \mathcal{A}$ et $G \supset F$, alors $F \in \mathcal{A}^*$, c'est-à-dire que F rencontre tout élément de $\mathcal{A}$, et G, plus grand que F, en fait de même, c'est-à-dire que $G \in \mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$, et $F \in \mathcal{A}$, alors comme $E \supset F$, d'après 2 que l'on vient d'établir, $E \in \mathcal{A}$. Mais en fait $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.implique que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, car $\emptyset^* = \mathcal{P}(E) \neq \emptyset$. Enfin on a 4 -, car si $X \notin \mathcal{A}$ il existe un A de $\mathcal{A}$ tel que $X \cap A = \emptyset$.et donc, $A \subset E\backslash X$ et, d'après 2- , $E \backslash X \in \mathcal{A}$.
Réciproquement, supposons 1- à 4 -, et montrons $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. D'abord on a que 1 - équivaut à $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$, et il reste à voir que $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$.Soit donc X un élément de $\mathcal{A}^*$, soit tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on ait $X \cap A \neq \emptyset$. Montrons que $X \in \mathcal{A}$. En effet sinon, d'après 3 -, $E\backslash X \in \mathcal{A}$, et on arrive à une contradiction puisque X, qui doit rencontrer tout élément de $\mathcal{A}$ ne rencontre évidemment pas $E\backslash X$.

La différence avec les ultrafiltres est que si F et G sont dans $\mathcal{A}$, alors $F \cap G \neq \emptyset$, mais $F \cap G$ n'est pas nécessairement un élément de $\mathcal{A}$.

J'appelerai un ensemble de parties de E vérifiant ces conditions un *assemblage* de E (pour dire qu'un tel ensemble est "tout assemblé" au sens qu'il est constitué d'avance de ce qui s'y allie par l'engrènement).

L'intérêt par rapport aux ultrafiltres est qu'il y a une combinatoire finie intéressante des assemblages sur les ensembles finis. Ainsi sur un ensemble à trois éléments $R = \{r, s, i\}$ l'ensemble d'ensembles

$$\mathcal{B} = \{\{r, s\}, \{s, i\}, \{i, r\}, \{r, s, i\}\}$$

est un assemblage (que nous dirons l'assemblage "borroméen") qui évidemment n'est pas un ultrafiltre, puisque sur un ensemble fini les seuls ultrafiltres sont de la forme dite "triviale" à savoir de la forme

$$\{X \subset E \,;\, u \in X\} =: t_E(u).$$

[13] G. Choquet, *Sur les notions de filtre et de grille*, CRAS Paris 224, pp. 171-173 (1947).

Les assemblages sont donc des points fixes (voir N° 2) de l'adjonction "duale" déterminée par l'opérateur (-)*. En effet ces points fixes sont, par définition, les M tels que M** = M, ou bien, ce qui est équivalent, les M tels qu'il existe un N avec N* = M ; et si A = A*, alors A est un tel M.

22.4. Si l'on reprend la relation entre adjonctions et correspondances de Galois indiquée sur un exemple au N° 3.7., mais évidemment générale, alors de la correspondance de Galois déterminée par (-)* et (-)* on tire une véritable adjonction G /| D de l'ensemble ordonné (P(P(E)), $\prod$) vers lui-même, en prenant :

$$G(M) = N(M^*) \quad \text{et} \quad D(M) = (NM)^*.$$

Autrement dit on a :

$$G(M) = \{X \prod E \,;\, \exists M\, [(M \leftrightarrow X = \square] \;\&\; (M \,\square\, M)]\},$$
$$D(M) = \{X \prod E \,;\, \forall M\, [(M \leftrightarrow X = \square) \,\square\, M \,\square\, M]\}.$$

Alors, comme dit en général au N° 2, on a :

$$M^{\omega} := GD(M) \;\prod\; M \;\prod\; DG(M) =: M^{\varphi},$$

avec donc les "intérieur" M^{ω} et "fermeture" M^{φ} de M donnés par :

$$M^{\omega} = \{X \prod E \,;\, \exists N\, [(N \leftrightarrow X = \square] \;\&\; (\forall M\, [(N \leftrightarrow M = \square) \,\square\, M \,\square\, M])]\} = N(N(M)^{**}),$$
$$M^{\varphi} = \{X \prod E \,;\, \forall N\, [(N \leftrightarrow X = \square) \,\square\, \exists M\, [(N \leftrightarrow M = \square] \;\&\; (M \,\square\, M)]]\} = M^{**}.$$

Bien sûr les points fixes (voir N° 2) de l'adjonction "duale" déterminée par (-)* sont juste les fermés de l'adjonction G /| D, et sont en bijection avec les ouverts de la même adjonction.

23. LE REGIME DE LA CONVERGENCE

23.1. Les filtres et ultrafiltres sont introduits pour traiter de la convergence "en général". Ainsi si $(x_n)_{n>0}$ est une suite dans un espace métrique P, dont la distance est notée d, on détermine alors un filtre associé par $S((x_n)_{n>0}) = \{F \prod P ; \exists N\ \forall n > N\ \ x_n \square F\}$, et alors le fait que la suite converge vers un point a de P, qui s'exprime par :

$$\forall \varepsilon \exists N\ \forall n > N\ d(x_n, a) < \varepsilon,$$

se reformule ainsi :

Pour tout voisinage V de a il existe un élément S de $S((x_n)_{n>0})$ tel que $S \prod V$.

Rappelons (revoir les N° 15 et 16), qu'un voisinage V de a est une partie V de P telle qu'il existe un $r > 0$ tel que

$$\delta_r[a] := \{y \square P ; d(a,y) < r\} \prod V.$$

Si l'on note V(a) l'ensemble des voisinages de a, alors c'est un filtre, appelé le filtre des voisinage de a, et la convergence de la suite vers le point se ré-exprime :

Pour tout $V \square V(a)$ il existe un $S \square S((x_n)_{n>0})$ tel que $S \prod V$.

Sous cette forme on peut parler "en général" de la convergence d'un filtre F quelconque (plus nécessairement associé à une suite) vers un point a dans un espace topologique quelconque (topologie plus nécessairement associée à une distance) en disant que F converge vers a ainsi :

Pour tout $V \square V(a)$ il existe un $F \square F$ tel que $F \prod V$.

L'intérêt de ce langage est qu'il est assez puissance pour déterminer (et étudier) la continuité des fonctions entre deux espaces topologiques, et qu'en fait la donnée d'une topologie est caractérisée complètement par la relation de convergence entre filtres et points, et même seulement par la relation de convergence entre ultrafiltres et points. Une reformulation importante est alors que la topologie est compacte si et seulement si tout ultrafiltre admet un unique point limite.

23.2. On peut, dans ce qui précède, se débarrasser du point a, en l'identifiant à la donnée du filtre (qui est un ultrafiltre) $t_P(a)$, et en remplaçant ce filtre $t_P(a)$ par la donnée d'un filtre quelconque P. Etant donnée une topologie sur P déterminée par l'ensemble de ses ouverts O, on dira que F *converge vers* P *du point de vue de* O, si on a :

$$\forall V\ [V \square O \leftrightarrow P \square \exists F \square F\ (F \prod V)].$$

On écrira ceci ainsi :

$$F \varnothing_{cvg(O)} P.$$

Bien évidemment l'assimilation "de convergence" décrite ainsi entre filtre détermine complètement la topologie, et on pourra donc manipuler la topologie par la donnée de cette assimilation sur l'ensemble des filtres sur P. Mais en fait l'assimilation de convergence est déterminée aussi bien sans supposer à priori que F et P soient des filtres mais en prenant seulement des ensembles de parties F et P ; la topologie détermine (et est déterminée par) une assimilation (la convergence) sur l'ensemble P(P(P)).

23.3. Enfin, il n'est pas utile, pour définir $F \varnothing_{cvg(O)} P$, d'avoir à priori que O soit une topologie ; ceci à un sens pour des ensembles de parties F, O et P quelconques. On sait par exemple que les topologies ne sont pas adaptées à l'étude de la différentiabilité dans les espaces vectoriels de dimension infini, et que des outils différents, comme les espaces à convergence de Choquet ou les espaces à limites (limesraüme) de Kovalsky sont des outils adéquats, comme l'à montré la thèse d'Andrée Ehresmann. Ces variantes d'"espaces" fonctionnent en fait clairement exclusivement sur la base de l'assimilation du type "$F \varnothing_{cvg(O)} P$" qu'elles induisent. On peut aussi les concevoir dans le cadre des "lieux" et "topogenèses"[14].

En particulier, au titre de l'assimilation $F \varnothing_{cvg(O)} P$, on retrouve la notion importante de "filtre F plus fin qu'un filtre P", puisque cette notion, qui se définit (sans du reste supposer que F et P soient effectivement des filtres) par

$$\forall V \; P \; [\exists F \; F \; (F \prod V)],$$

équivaut à ce que $F \varnothing_{cvg(P(E))} P$. En particulier on aura $P \varnothing_{cvg(P(E))} Q$ dès que l'on aura P Q. Mais cette dernière condition est plus forte.

Evidemment, si $F \varnothing_{cvg(O)} P$ et $G \varnothing_{cvg(P(E))} F$, alors $G \varnothing_{cvg(O)} P$, et si $F \varnothing_{cvg(O)} P$ et P Q, alors $F \varnothing_{cvg(O)} Q$. Ce sont là les deux premiers principes indispensables à l'étude de la convergence.

23.4. On a un régime de hauteur 2 sur P(P(E)) pour tout ensemble E, qu'on appellera le *régime de convergence* :

$$\ldots \;\; inc : P(P(E)) \varnothing P(P(P(E))^2) \;\; ; cvg : P(P(E)) \varnothing P(P(P(E))^2)$$

défini donc par :

$$F \varnothing_{cvg(O)} P,$$

dont le sens est donné ci-avant en 22.2., et

$$F \varnothing_{inc(O)} P \;\; € \;\; F \leftrightarrow O \prod P \leftrightarrow O.$$

---

[14] R. Guitart, *Topologie dans les univers algébriques*, conf. au Nordwestdeutsches Kategorienseminar (Bremen), Mathematik Arbeitspapiere Nr 7, Universitaât Bremen, dezember 1976, pp. 59-97.

Il s'agit bien d'un régime de hauteur 2. Pour l'établir il faut donc vérifier l'axiome de passage (N° 11.2.). La question est, étant donné trois ensembles de parties F, O et P tels que $F \varnothing_{cvg(O)} P$, de savoir s'il existe un ensemble de parties R tel que pour tout ensemble de partie N, la condition $N \varnothing_{inc(R)} O$, entraîne que $F \varnothing_{cvg(N)} P$. Et en effet il suffit de prendre pour R l'ensemble P.

23.5. Enfin observons que la définition de la convergence est étroitement liée à l'opérateur d'engrénement, car on a $F \varnothing_{cvg(O)} P$ si et seulement si :

$$F^{*} \prod \{W \,;\, NW\square\, O \leftrightarrow P].$$

Ainsi les propriétés de convergences de F ne dépendent que de F^{*}, et tiennent dans celles de la relation binaire :

$$"F^{*} \prod G".$$

24. TOPOLOGIES SUR LES PARTIES

24.1. On trouve aussi dans la littérature[15], pour étudier les topologies sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un espace topologique E, les opérateurs ψ_E et π_E (voir 20.6.), ainsi que a_E et t_E et C(f).

On note que : $\psi_E(A) = \{A\}^*$.

On a :

$$M^* = \{X \prod E \; ; \forall M \, [(M \square M) \square M \leftrightarrow X \neq \square \, \},$$

$$M^* = \leftrightarrow_{M \square M} \psi_E(M),$$

et on a aussi

$$M^* = \{X \prod E \; ; \; M \prod \psi_E(X)\} = \{X \prod E \; ; \; M \square \pi_{P(E)}(\psi_E(X))\},$$

donc

$$X \square M^* \text{ € } M \square (\pi_{P(E)} \infty \psi_E)(X) \text{ € } X \square C(\pi_{P(E)} \infty \psi_E)(t_{P(P(E))}(M)),$$

et finalement :

$$M^* = [C(\psi_E)_\infty C(\pi_{P(E)})_\infty \psi_{P(P(E))\infty} a_{P(P(E))}](M).$$

Ainsi l'engrénement est "algébriquement" déterminé par les deux opérateurs ψ_E et π_E. Comme on vient de voir que l'expression de la convergence tient dans des énoncés du type "$F^* \prod G$", la convergence est elle aussi exprimable en termes de ψ_E et π_E.

24.2. En fait les deux opérateurs ψ_E et π_E déterminent deux relations binaires sur l'ensemble $F = \mathcal{P}(E)$, deux assimilations donc, notée encore (abusivement) ψ_E et π_E, à savoir, respectivement :

$$Y \varnothing_{\psi_E} X \text{ € } Y \square \psi_E(X) \text{ € } Y \leftrightarrow X \, \pi \, \square,$$
$$Y \varnothing_{\pi_E} X \text{ € } Y \square \pi_E(X) \text{ € } Y \prod X.$$

On a vu déjà en 20 en quoi ces deux opérateurs ψ_E et π_E sont uniques et privilégiés. On verra plus loin autrement en quoi ces deux assimilations sont "les plus naturelles" sur un tel ensemble, en ce sens qu'elles induisent les meilleures" transformations naturelles de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}^2$.

---

[15] G. Choquet, *Convergences*, Annales de l'Université de Grenoble, t. XXIII (1947-1948), P. 57.
E. Michael, *Topology on spaces of subsets*, T.A.M.S. 71 (1951).
voir aussi : C. Kuratowski, *Topologie, vol. II*, polska Akademia Nauk, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1950.

Ces deux assimilations sont fondamentales, n'existent "naturellement" sur F que précisément parce que cet ensemble n'est pas quelconque mais est "structuré" par l'indication qu'il est de la forme F = P(E). Soulignons qu'on est ici tout-à-fait dans la "philosophie générale" des régimes, à savoir que l'apparition des assimilations et des opérations dynamiques d'augmentation et diminution associées sur un ensemble F est le résultat objectif de la structuration de F. Et certainement, dans une vue cantorienne de la mathématique, la structuration comme ensemble de partie est elle-même quelque chose de fondamentale, si l'on veut bien considérer que l'opération mentale de "collecte" en un tout de multiples distincts (et l'indication de cette opération) est fondamentale.

Ceci dit, si l'on considère $M \prod P(E)$, on peut (on doit) considérer ses augmentations et diminutions relativement à ψ_E et π_E, $\psi_E{}^{op}$ et $\pi_E{}^{op}$. Il vient :

$M\ b\psi_E = \{X \prod E\ ;\ \exists Y(Y \leftrightarrow X\ \pi \square\ \square Y \square M)\}$,
$M\ d\psi_E = \{X \prod E\ ;\forall Y(Y \leftrightarrow X\ \pi \square\ \square\ Y \square M)\}$,
$M\ b\pi_E = \{X \prod E\ ;\ \exists Y(X \prod\ Y\ \square Y \square M)\}$,
$M\ d\pi_E = \{X \prod E\ ;\ \forall Y(Y \prod\ X \square\ Y \square M)\}$,
$M\ b\psi_E{}^{op} = \{X \prod E\ ;\ \exists Y(Y \leftrightarrow X\ \pi \square\ \square Y \square M)\}$,
$M\ d\psi_E{}^{op} = \{X \prod E\ ;\ \forall Y(Y \leftrightarrow X\ \pi \square\ \square\ Y \square M)\}$,
$M\ b\pi_E{}^{op} = \{X \prod E\ ;\ \exists Y(Y \prod\ X\ \square Y \square M)\}$,
$M\ d\pi_E{}^{op} = \{X \prod E\ ;\ \forall Y(X \prod\ Y \square\ Y \square M)\}$.

En particulier, on va retrouver $M^* = \{X \prod E\ ;\ \forall Y\ [(Y \square M) \square Y \leftrightarrow X \neq \square]\}$: la condition "$(Y \square M) \square Y \leftrightarrow X \neq \square$" étant équivalente à "$Y \leftrightarrow X = \square\ (Y \square M)$", ou encore à "$Y \prod N_E X \square (Y \square N_{P(E)} M)$", on a $M^* = \{X \prod E\ ;\ N_E X \square (N_{P(E)} M)d\pi_E\}$, soit $M^* = \{N_E X \prod E\ ;\ X \square (N_{P(E)} M)d\pi_E\}$, et :

$$M^* = (\exists N_E)((N_{P(E)} M)d\pi_E).$$

On a donc (avec les notations de 22.4.) :

$$D(M) = (N_{P(E)} M)^* = (\exists N_E)(M)d\pi_E),$$

et

$$G(M) = M\ b\psi_E.$$

On notera donc aussi bien que les énoncés "$F^* \prod G$" sont donc tout-à-fait exprimables à l'aide de négations (N_E et $N_{P(E)}$), de $\exists$ (ou aussi bien de C ou de $\forall$), et d'énoncés du type $Hd\pi_E \prod I$. Ainsi, aux bijections près des types $\exists N_E$ et $N_{P(E)}$, l'expression algébrique de la convergence est réduite aux énoncés du genre "$Hd\pi_E \prod I$". D'où l'intérêt en général des énoncés du type "$Xd\varepsilon \prod Y$", et aussi du type "$X \prod Yb\varepsilon$".

Notons enfin, puisque l'on a vu (au numéro 20) que $r^\psi(Y) = Ybr^{op}$ et $r^\pi(Y) = Ydr$, qu'on peut écrire par exemple $M^* = (\exists N_E)((N_{P(E)} M)d\pi_E) = (\exists N_E)(\pi_E{}^\pi(N_{P(E)} M))$, etc.

24.3. On a vu aux deux numéros précédents l'importance "algébrique" de l'engrènement dans la mise en place des notions générales nécessaire à la topologie générale, à savoir celles d'ultrafiltre et de convergence ; d'où, avec 24.1. et 24.2., l'importance pour les même buts des opérateurs ou assimilations ψ_E et π_E.

Mais de plus cette importance est encore accentuée par le rôle joué directement par ces opérateurs pour déterminer les topologies "naturelles" nécessaires à considérer sur l'ensemble des parties d'un espace topologique donné. En effet, avec Choquet et Michael, considérons un ensemble E muni d'une topopogie donnée disons par l'ensemble de ses ouverts O. On définit alors sur l'ensemble F = P(E) trois topologies fondamentales :

- la topologie "de la semi-continuité inférieure" qui est la moins fine telle que les ensembles de la forme $\psi_E(U)$ pour tous les $U \in O$ soient des ouverts. On en note les ouverts par O^{Ψ}. Alors une relation binaire r de E muni de O vers F muni de F est dite semi-continue inférieurement si l'application correspondante r : E ∅ P(F) est continue de O vers F^{Ψ}.

- la topologie "de la semi-continuité supérieure" qui est la moins fine telle que les ensembles de la forme $\pi_E(U)$ pour tous les $U \in O$ soient des ouverts. On en note les ouverts par O^{π}. Alors une relation binaire r de E muni de O vers F muni de F est dite semi-continue supérieurement si l'application correspondante r : E ∅ P(F) est continue de O vers F^{π}.

- la "finite topology" qui est la moins fine des topologies plus fines que les deux précédentes. On en note les ouverts par $O^{\pi\Psi}$. Alors une relation binaire r de E muni de O vers F muni de F est dite continue si l'application correspondante r : E ∅ P(F) est continue de O vers $F^{\pi\Psi}$.

On considère aussi la restriction de $O^{\pi\Psi}$ à l'ensemble des parties fermées non-vides de E, et l'espace topologique des fermés non-vides de E ainsi obtenu est noté $\Phi^+(E)$; et on note C(E) le sous-espace de $\Phi^+(E)$ dont les éléments sont les fermés non-vides et compacts de E.

L'espace E est compact si et seulement si C(E) est compact (Vietoris - Frink - Michael). De plus dans ce cas l'application ψ_E est continue de C(E) vers C(C(E)). Pour tout espace topologique E, l'application π_E est continue de C(E) vers C(C(E)).

Si l'espace E est compact métrisable de distance d, alors C(E) est compact métrisable, sa distance D étant donnée par :

$$D(A, B) = \sup[\ \sup_b \inf\{d(a,b) ; a \in A\}, \sup_a \inf\{d(a,b) ; b \in B\}] .$$

Ce dernier point montre le caractère "naturelle" des topologies introduites ci-dessus sur les parties, puisque la distance D entre parties fermées non-vides compactes est la première qui vient à l'esprit. La topologie associée à cette distance D ne dépend donc que de la topologie associée à la distance d, et ce qui précède en donne la construction directe.

L'étude catégorique sytématique des constructions O^{ψ}, O^{π}, $O^{\pi\psi}$, $\Phi^{+}(E)$ et C(E), leurs fonctorialités et naturalités, les monades (ou "théories algébriques") associées, les théories de "relations" (ou morphismes de Kleisli) correspondantes, les extensions aux "espaces à fermetures", puis aux cadres plus généraux des "fermetures" sur une catégorie (ou "topogenèses"), à été initiée et développée dans une série d'une douzaine d'articles[16] que j'ai écrits dans les années 1970. Série elle-même incluse dans l'ensemble des travaux sur les "univers algébriques". Occasionnellement je citerai précisément tel ou tel résultat utile ici en pointant précisément son occurrence dans la série. Par exemple le fait que la construction C(E) soit une monade[17] sur la catégorie des espaces compacts est indiqué[18] en 1975. Les autres monades apparaissent déjà dans des notes aux Comptes-rendus, puis dans un article[19] de 1972.

24.4. Ces deux derniers articles cités sont aussi les deux premiers mémoires ou s'effectue la mise en place des "univers algébriques". Ainsi dans celui de 1972 est donnée la construction de l'opérateur ψ_E dans un topos, et est soulignée son importance. Le troisième mémoire[20] important pour la théorie des "univers algébriques" date de 1977. C'est là que l'on prouve le résultat (indiqué en 20) d'unicité sur les opérateurs ψ_E et π_E (et que l'extension convenable aux topos est fournie). La théorie générale étant dans le cadre systématique des univers algébriques.

24.5. Relions maintenant les topologies sur les parties ci-avant introduite à la structure opératoire du calcul général des relations binaires dans les ensembles : l'apparition des seules constructions O^{ψ} et O^{π}, et leur caractère fondamental et naturel, s'explique par ceci (voir en 20.6.) que les deux seules transpositions sur les relations binaires sont déterminée par ψ et π. Ce qui est aussi, on l'a vue, rattachée à "l'unicité des quantificateurs" (20.7.).

24.6. Reprenons alors la question de l'utilité des topologies O^{ψ}, O^{π}, $O^{\pi\psi}$, $\Phi^{+}(E)$ et C(E), vis-à-vis de la théorie de la continuité des relations. On a donc basiquement deux notions de continuité des relations, associées à O^{ψ} et O^{π}.

- Une relation r de X' vers X, X muni de O et X' de O', sera dite *semi-continue inférieurement* ou <u>sci</u> si la fonction r de X' vers P(X) est continue de O' vers O^{ψ} ; autrement dit r est sci si et seulement si pout tout ouvert U de O,

$$r^{\psi}(U) = (C(r)\circ\psi_X)(U) = (C(r)(\psi_X(U)) = \{x' ; r(x')\leftrightarrow U \neq \square \} =: Ubr^{op}$$

est un ouvert de O'.

---

[16] on en trouvera la liste dans R. Guitart, *Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?*, Cahiers Top. Géo. Diff, vol. XXIII, 1982.

[17] La notion de monade, puis la dualité des monades, et les univers algébriques, seront des points expliqués plus loin.

[18] R. Guitart, *Monades involutives complémentées*, Cahiers Top. Géo. Diff., vol. XVI-1 (1975), pp. 17-101 (voir proposition 9 p. 65).ψ_E

[19] R. Guitart, *Foncteurs sous-objets et relations continues*, Cahiers Top. géo. Diff., vol. XIII-1 (1972), pp. 57-100.

[20] R. Guitart, *Calcul des relations inverses*, Cahiers Top. Géo. Diff., vol. XVIII-1, (1977), pp. 67-100.

- Une relation r de X' vers X, X muni de O et X' de O', sera dite *semi-continue supérieurement* ou <u>scs</u> si la fonction r de X' vers P(X) est continue de O' vers O^{π} ; autrement dit r est sci si et seulement si pout tout ouvert U de O,

$$r^{\pi}(U) = (C(r)\circ\pi_X)(U) = (C(r)(\pi_X(U)) = \{x' \, ; r(x') \prod U\} = : Udr$$

est un ouvert de O'.

Si nous retournons enfin au cas où X' est métrique et X métrique compact nous avons le sens initial plus "concret" des choses, que[21]

- r est sci (resp. scs) si et seulement si :

"les conditions $\lim_n x'_n = x'$ et x □ r(x') entraînent l'existence d'une suite x_n telle que $\lim_n x_n = x$ et x_n □ $r(x'_n)$"

- r est scs si et seulement si :

"les conditions $\lim_n x'_n = x'$, $\lim_n x_n = x$ et x_n □ $r(x'_n)$ entraînent x □ r(x')".

Je renvoie donc au livre de Kuratowski pour l'importance de ces deux notions en particulier dans la théorie de la dimension topologique.

24.7. Ainsi les opérateurs ψ_E et π_E trouvent une nécessité aussi dans le champ topologique, que ce soit (via $(-)^{*}$) pour traiter algébriquement de la convergence, ou pour déterminer les topologies naturelles sur les espaces de parties, et les notions de continuités associées pour les relations. Mais nous allons voir encore autrement que ces opérateurs sont naturels aussi pour définir les topologies ; non plus cette fois en terme de convergence, mais en termes d'intérieur et d'adhérence.

En effet considérons X un espace topologique et v : X ∅ PP(X) une fonction qui à x associe

$$v(x) \prod V(x) = \{V \prod E \, ; V \text{ est un voisinage de } x \text{ dans la topologie de } X\}$$

qui soit un système fondamental de voisinage de x, c'est-à-dire tel que pour tout V □ V(x) il existe un W □ v(x) tel que W ∏ V. Par exemple on pourra prendre v = V.

On note i_v et a_v les opérateurs d'intérieur et d'adhérence de l'espace X, déterminés donc par v.

Avec

$$M_{*} = \{X \prod E \, ; \exists M \, [(M \, \square \, M) \, \square \, M \prod X\},$$

[21] C. Kuratowski, *Topologie, vol. II*, polska Akademia Nauk, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1950.

et

$$M^{*} = \{X \prod E \; ; \forall M \, [(M \, \square \, M) \, \square \, M \Leftrightarrow X \neq \square \, \},$$

on a

$$A \, \square \; v(x)_{*} \in x \, \square \, i_{v}(A),$$

$$A \, \square \; v(x)^{*} \in x \, \square \, a_{v}(A).$$

Alors on pose :

$$\Omega_{X} = \psi_{PX} \circ \pi_{X} : \; P(X) \varnothing PPP(X),$$

$$\Phi_{X} = \pi_{PX} \circ \psi_{X} : P(X) \varnothing PPP(X),$$

et on a :

$$i_{v} = C(v) \circ \Omega_{X} \quad \text{et} \quad a_{v} = C(v) \circ \Phi_{X}.$$

On peut donc penser à "Ω_X" comme à un "intérieur générique" ou une "ouverture générique", et à "Φ_X" comme à une "adhérence générique" ou une "fermeture générique". En particulier la "différence" entre i_v et a_v , "l'effet de bord" de la topologie, tient à ce que

$$\Omega_{X} \;\; \pi \;\; \Phi_{X}.$$

On pensera ainsi à π et ψ comme à des "racines simultanées" des opérateurs Ω et Φ, et par suite des i_v et a_v, ou des idées d'intérieur et d'adhérence. De la sorte la topologie est subordonnée au calcul des π et ψ ou encore au calcul des b et d, lesquels calculs sont donc plus primitifs. Ce qui est une première façon de soutenir ce que nous avancions en 15.13, que *l'assimilation précède la topologie.* Mais nous aurons à le soutenir plus en profondeur, en l'occurrence à propos de la fabrication ellle-même de la donnée v ou de V.

25. REVELATION TOPOLOGIQUE DES FORMES ET DE LEURS STABILITES

25.1. Reprenons la donnée d'une topologie sur un ensemble P en termes d'un opérateur de fermeture qui à toute partie X de P associe une partie de P appelée son adhérence (ou fermeture) adh(X), avec donc[22] (voir N° 15.7) :

$$\mathrm{adh}(\square) = \square \ ; \ \mathrm{adh}(X) \quad X \ ;$$

$$\mathrm{adh}(\mathrm{adh}(X)) = \mathrm{adh}(X) \ ; \ \mathrm{adh}(X \approx Y) = \mathrm{adh}(X) \approx \mathrm{adh}(Y) \ ;$$

Si l'on pose :

$$\mathrm{int}(X) = P \backslash \mathrm{adh}(P \backslash X)$$

on a

$$\mathrm{adh}(X) = P \backslash \mathrm{int}(P \backslash X),$$

et

$$\mathrm{int}(P) = P \ ; \ \mathrm{int}(X) \prod X \ ;$$

$$\mathrm{int}(\mathrm{int}(X)) = \mathrm{int}(X) \ ; \ \mathrm{int}(X \leftrightarrow Y) = \mathrm{int}(X) \leftrightarrow \mathrm{int}(Y).$$

L'exemple primordial est l'espace euclidien (à n dimension), où adh(X) est l'ensemble X augmenté de ses points d'accumulations. Chacun des axiomes de adh peut être énoncé sous la forme $F(X_1, X_2, ..., X_k)$ où la fonction F ne fait intervenir que les opérations de l'algèbre de Boole et l'opération adh. Il n'existe aucun autre axiome de cette forme qui soit indépendant des axiomes donnés et qui soit valable dans l'espace euclidien[23]. On reviendra sur ce fait au numéro 27.

Si l'on applique à X plusieurs fois les opérateurs adh = a et N (complémentation dans P), on obtient[24] 14 ensembles en général distincts, et pas plus, qui sont[25] donnés ici suivants toutes les chaînes croissantes valables pour chaque sous-ensemble de la droite, ou aussi bien pour chaque sous-ensemble du plan :

---

[22] voir C. Kuratowski, *Topologie, volume I*, Polska Akademia Nauk, Monografie matematyczne, Tom 20, Warszawa 1958, p. 20.
Dans ce livre est indiqué que des axiomes analogues ont été introduits dans
M.F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrackte Mengenlehre*, Atti del IV Congr. Int. d. Mat., vol. II, Roma, 1909,
C. Kuratowski, *Sur l'opération adhA de l'Analysis Situs*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 182-199,
M. Fréchet, *Espaces abstraits*, paris, 1928.
Les ensembles muni d'une telle donnée adh(-) sont appelés "espaces topologiques" dans
P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie, vol. I*, Berlin, Springer, 1935.

[23] J.C.C. Mc Kinsey and A. Tarski, *The Algebra of Topology*, Ann. of Math. 45 (1944), p. 141-191.

[24] C. Kuratowski, *Sur l'opération adhA de l'Analysis Situs*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 182-199.

[25] C. Kuratowski, *Topologie, volume I*, Polska Akademia Nauk, Monografie matematyczne, Tom 20, Warszawa 1958, p. 24.

NaNX ∏	NaNaNaNX ∏	NaNaX ∏	aNaNaX	∏aX
NaNX ∏	NaNaNaNX ∏	aNaNX ∏	aNaNaX	∏aX
NaNX ∏		X ∏		aX
NaX ∏		NX ∏		aNX
NaX ∏	NaNaNaX ∏	aNaX ∏	aNaNaNX	∏aNX
NaX ∏	NaNaNaX ∏	NaNaNX ∏	aNaNaNX	∏aNX

Avec donc aX = adh(X) = P\int(P\X), soit, en posant int = i, avec

i = NaN,

la première moitié de la table se réécrit, sans négation N :

iX ∏	iaiX ∏	iaX ∏	aiaX ∏	aX
iX ∏	iaiX ∏	aiX ∏	aiaX ∏	aX
iX ∏		X ∏		aX

et la deuxième moitié s'obtient de la première en remplaçant X par NX :

iNX ∏		NX ∏		aNX
iNX ∏	iaiNX ∏	aiNX ∏	aiaNX ∏	aNX
iNX ∏	iaiNX ∏	iaNX ∏	aiaNX ∏	aNX

les 14 ensembles distincts en général sont donc :

X, iX, aX, iaX, aiX, iaiX, aiaX, NX, iNX, aNX, iaNX, aiNX, iaiNX, aiaNX.

Pour voir ceci, il faut constater surtout que iaia = ia et que aiai = ai. Ce qui se voit aisément, en utilisant le fait que iX ∏ iY résulte de iX ∏ Y (ce qui vient de ii = i), et le fait dual pour a (c'est aussi avec ces faits qu'on vérifie immédiatement les inclusions indiquées dans les tables ci-dessus). En effet on a donc iaX ∏ aiaX, d'où iaX ∏ iaiaX, et iaX ∏ aX, d'où aiaX ∏ aX, puis iaiaX ∏ aX, d'où iaiaX ∏ iaX. Par suite iaiaX = iaX. De même on voit que aiaiX = aiX. Ainsi on est bien limité aux 14 éléments indiqués. Il suffit de donner ensuite un exemple de X pour lequel les 14 éléments sont bien distincts. Un tel exemple est l'image X du numéro 26 qui suit. Cette image montre aussi qu'il n'y a pas en général d'autres inclusions valides en général entre les 14 éléments que celles données ci-dessus.

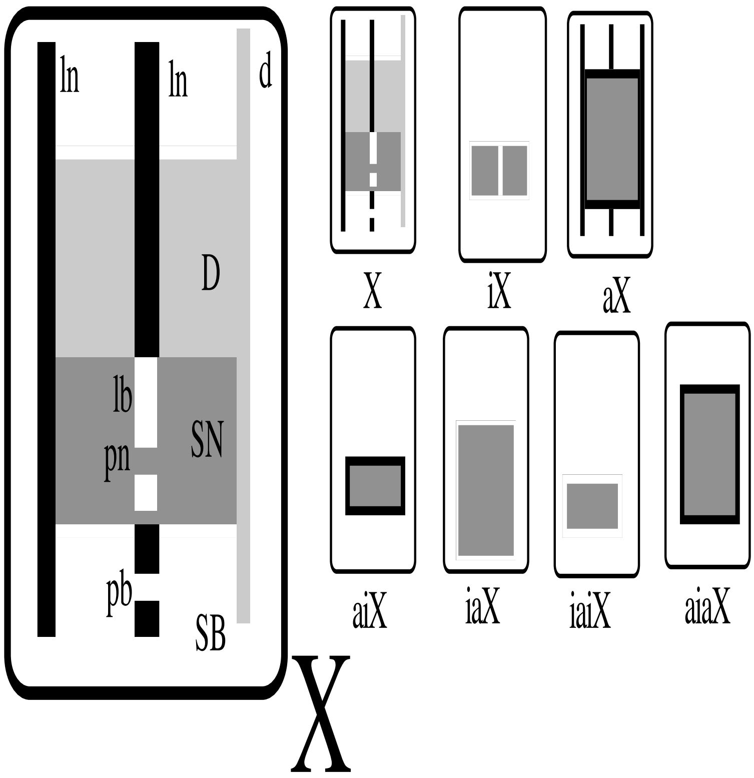
25.2. On propose en fait que les formes et les stabilités d'icelles s'énoncent comme, d'abord, des "propositions topologiques" c'est-à-dire en termes des connecteurs booléens auxquels on ajoute les opérateurs unaires i et a. Aux trois numéros suivants on va montrer qu'alors, du fait d'introduire en sus de i, a et N les opérateurs ⇔ et ≈, la situation change, et même en partant d'un seul X, on génère une infinité de possibilités (voir H[X] au numéro 28).

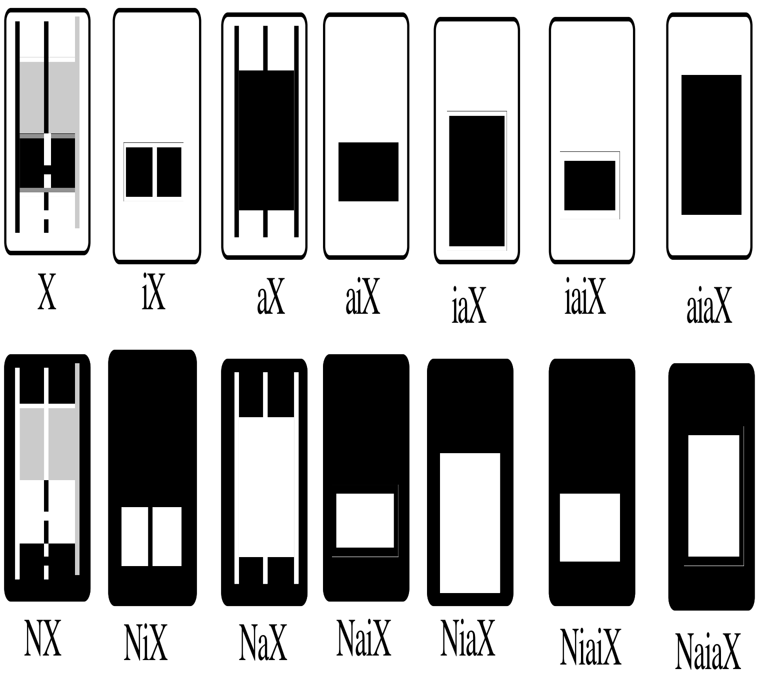
25.3. Ce n'est qu'ensuite que seront à envisager des manipulations de plusieures parties X, Y, etc de P, des manipulations infinitaires (unions et intersections dénombrables ou quelconques, limites) et des énonciations topologiques dans l'espace topologique des parties de l'espace P.

26. QUESTION DE LA LOGIQUE DU VOIR

26.1. Nous voulons dessiner dans le plan une image sur laquelle on voit les diverses possibilités d'effets successifs de i et a, et quelques effets d'intersections ou unions des termes ainsi produits.

Nous considérons donc l'image X ci-après, et les effets sur icelle des opérateurs i et a :



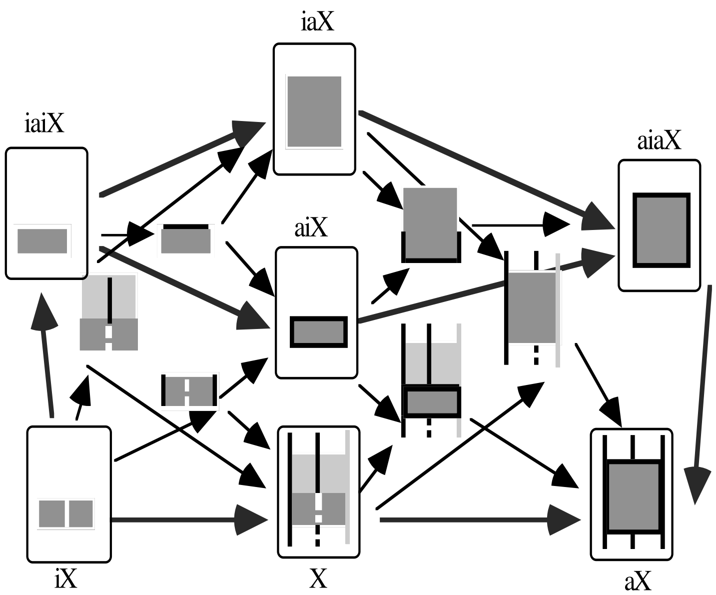


Cette image est schématisée avec les conventions suivantes : nous représentons :

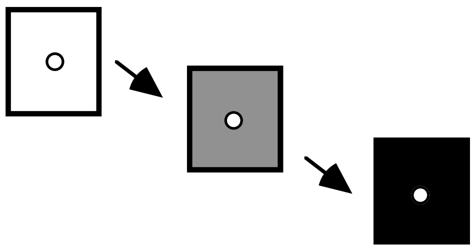
- en blanc une zone rectangulaire pleine ouverte (bord non inclu) ne contenant aucun point de X,
- en gris clair une zone rectangulaire pleine ouverte (bord non inclu) telle que pour tout point u de cette zone et tout disque ouvert centré en ce point,

il existe dans ce disque un point appartenant à X et un point n'appartenant pas à X,
- en gris foncé une zone rectangulaire pleine ouverte (bord non inclu) dont tout point appartient à X,
- en blanc un segment pleine ouverte (extrémités non incluses) ne contenant aucun point de X,
- en gris clair un segment pleine ouverte (extrémités non incluses) telle que pour tout point u de ce segment et tout disque ouvert centré en ce point, il existe dans l'intersection de ce disque et du segment un point appartenant à X et un point n'appartenant pas à X,
- en gris foncé un segment pleine ouverte (extrémités non incluses) dont tout point appartient à X,
- en blanc un point n'appartenant pas à X,
-en noir un point appartenant à X.

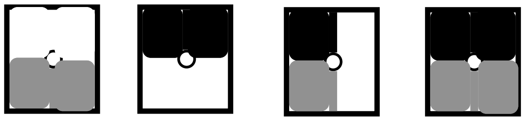
On obtient alors le réseau suivant où (encadrées) figurent les 7 images associées à X par i et a, et (non-encadrées) quelques intersections et unions.



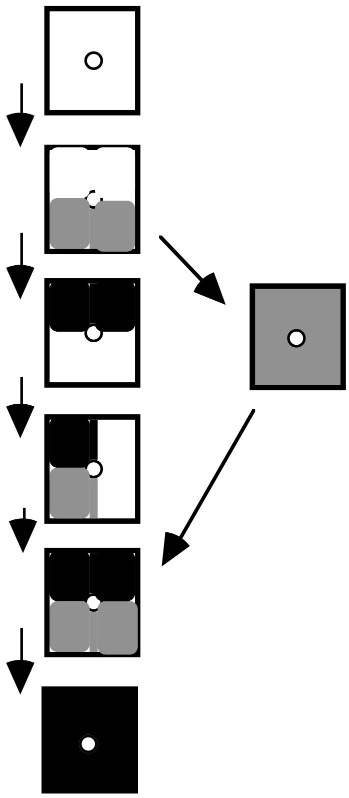
26.2. On s'interroge ensuite sur la variété des situations locales susceptibles de modaliser le sens de la phrases : "x est dans le blanc". Dans les schémas suivants on décrit quelques situations, et leurs emboîtements, où, on est plus ou moins dans le blanc. On a d'abord trois situations de base ainsi emboîtés (où le gris clair des images précédentes est rendu par du gris foncé, et le gris foncé par du noir) :



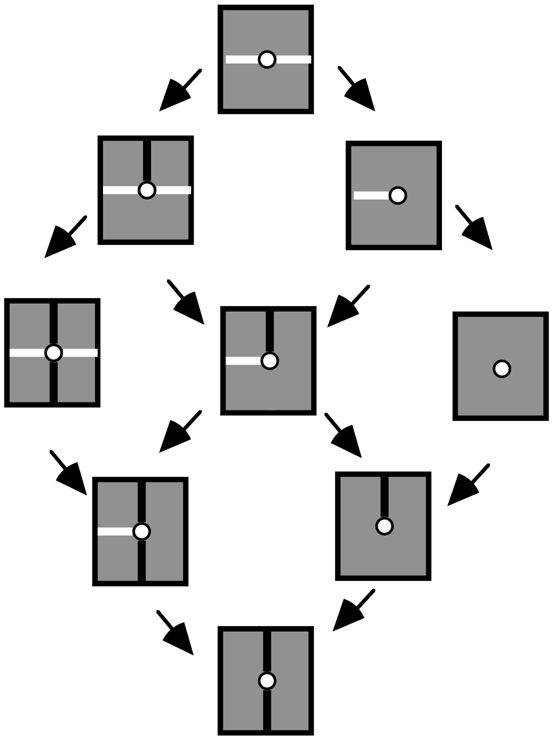
Mais ceci peut se raffiner a priori de nombreuses façons, topologiquement spécifiables. En voici quelques exemples, obtenu en "coupant le fond" :

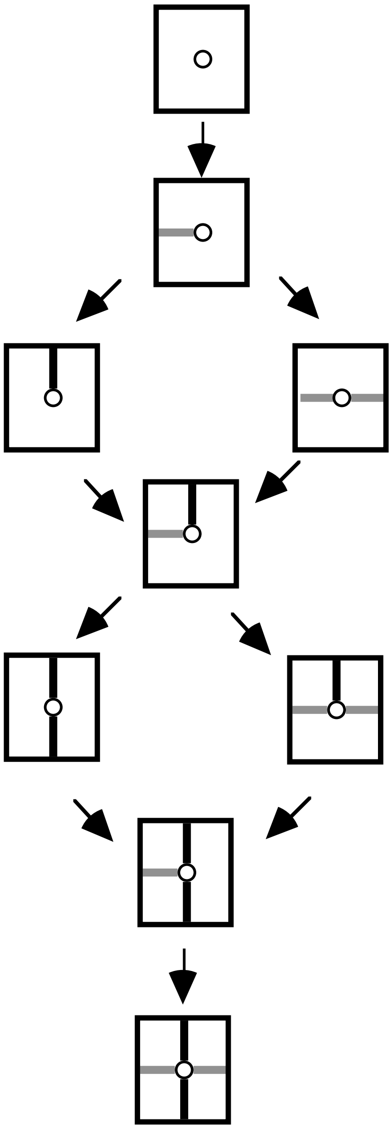


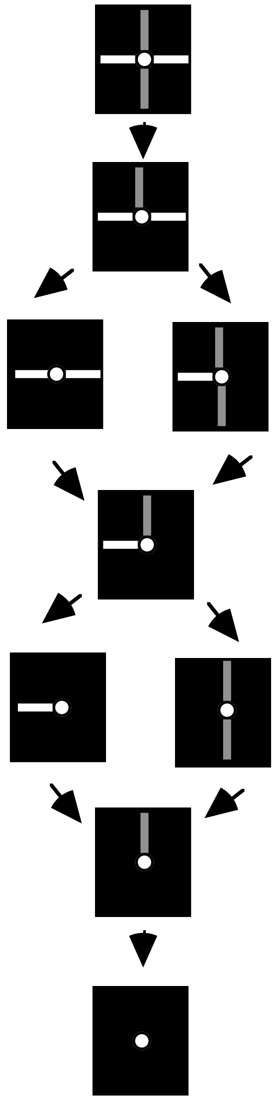
En fait ils s'organisent ainsi :

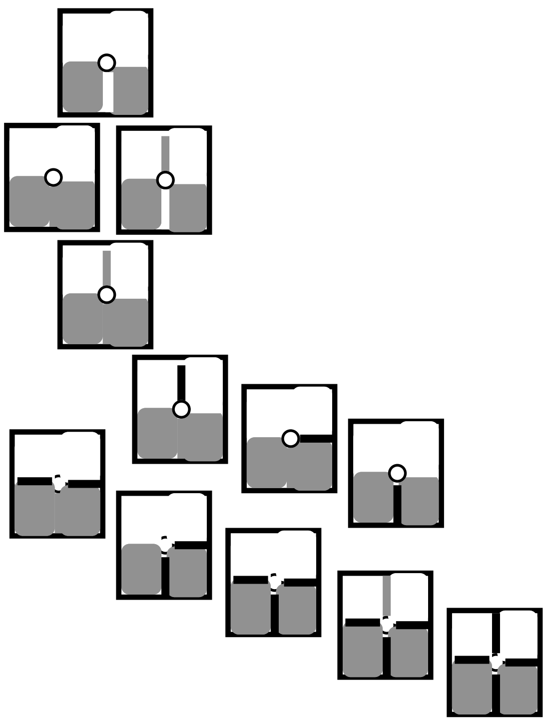


De nouveaux raffinements sont possibles, en dessinant sur fonds gris clair, blanc ou noir des "lignes d'accès" au point, grises claires, blanches, ou noir. On peut ensuite mêler les "coupures de fond" et les lignes d'accès" . En voici les débuts. Ceci n'est qu'un échantillon. On voudrait un traitement systématique.









Ces divers exemples participent d'une hiérarchie de "situations locales" autour du point, où chacun "situation" exprime pour une zone Z de dimension 1 et tout zone Z de dimension 2 (rappelons que la notion de dimension est elle-même exprimable topologiquement ; nous aurons à y revenir) et pour une partie W de Z, qui dans Z est blanche, grise ou noir, si x appartient à la frontière dans Z de W, si x appartient à l'intérieur de W ; et, de plus, on donne à voir quelles sont les situations d'inclusions entre les divers (Z,W), leurs frontières, etc. Ainsi quelque chose de la "situation" de x par rapport aux points noirs et aux points blancs, c'est-à-dire vis-à-vis de X, est localement topologiquement décrit. Rien que par ce moyen on comprend qu'il y a une grande variété de cas, qui probablement n'épuisent pas ce qu'il y a à dire "topologiquement" sur la donnée du point et de X, sur la "stabilité" de l'appartenance ou de la non-appartenance du point à X, etc.

27. SEMANTIQUES TOPOLOGIQUES DES SYNTAXES PROPOSITIONNELLES

27.1. Nous voulons, ici et au numéro suivant, à travers les développements des logiques intuitionistes et modales, dégager les règles du jeu propositionnel qui vaut à propos des chevauchements, inclusions, exclusions et contacts des images ou parties du plan. On pourra du coup estimer la puissance et les limites des modèles d'analyse de discours basés sur un formalisme proprement topologique.

Ensuite, nous reprendrons les calculs intuitionistes et modaux dans la sémantique "à la Kripke" en termes de "frame", et la comparaison avec le calcul des régimes, augmentations et diminutions s'en suivra. Ultérieurement, le rapprochement avec les "tense logics" et logiques multimodales s'imposera, et la logique spéculaire aura à être située par rapport aux logiques multimodales existantes.

27.2. Commençons[26] avec le "calcul propositionnel implicatif positif" de Hilbert[27] et sa reprise sous le nom d'algèbre de Hilbert, en particulier dans la thèse de 1961 de Diego[28].

Etant donné l'ensemble A, $1 \in A$, une opération binaire $\rightarrow$ sur A, on dit que la donnée $(A, 1, \rightarrow)$ est une *algèbre de Hilbert* si les axiomes suivants sont vérifiés :

h1 : $p \rightarrow (q \rightarrow p) = 1$,
h2 : $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) = 1$,
h3 : Si $(p \rightarrow q) = (q \rightarrow p) = 1$, alors $p = q$.

Diégo montre qu'une définition équivalente est la suivante :

Une *algèbre de Hilbert* est une donnée $(A, \rightarrow)$ où A est un ensemble non-vide et où $\rightarrow$ est une loi binaire avec les axiomes :

(A)	$((p \rightarrow p) \rightarrow p)$	$=$	p
(B)	$(p \rightarrow p)$	$=$	$(q \rightarrow q)$
(C)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$=$	$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
(D)	$((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p))$	$=$	$((q \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$

Un exemple important est le cas d'une *algèbre de Heyting*[29], qui est un ensemble H ordonné par un ordre $\leq$, ayant un plus petit élément 0, où tout couple (x, y) d'éléments admet une borne inférieure $x \wedge y$, et où il existe un élément c maximal parmi

---

[26] d'autres calculs "implicatifs" existent, voir par exemple dans J. Van Benthem, *Language in action*, North-Holland, 1991, le numéro 4 sur la hiérarchie des logics implicatives.
[27] D. Hilbert, *Die Logischen Grundlagen der Mathematik*, Math. Annalen, 88 Band, 1923, p. 151-165.
[28] A. Diego, *Sur les algèbres de Hilbert*, 55 p, Collection de Logique Mathématique, Série A N°21, Gauthiers-Villars, 1966.
[29] M. Ward, *Structure residuation*, Annals of mathematics, vol. 39, 1938, p. 558-568. On remarquera que le nom d'"algèbre de Heyting" ne s'est imposé qu'ultérieurement.

les u tels que $u \wedge x \leq y$; et on note alors $x \Rightarrow y$ cet élément c. On pose alors $(0 \Rightarrow 0) = 1$. Alors $(H,\Rightarrow)$ est une algèbre de Hilbert.

En particulier si X est un espace topologique, l'ensemble O de ses ouverts, ordonné par inclusion, est une algèbre de Heyting (voir Stone et Tarski) ; la structure d'algèbre de Hilbert est déterminée par :

$$U \Rightarrow V = \mathrm{int}((X \setminus U) \cup V).$$

27.3. Une partie D d'une algèbre de Hilbert A est appelée un *système déductif* de A si :

d1 : $1 \in D$,
d2 : Si $x \in D$ et $(x \Rightarrow y) \in D$, alors $y \in D$.

On désigne par A* l'ensemble des systèmes déductifs de A. On l'ordonne par inclusion. Il est clair que $A \in A^*$, et que l'intersection d'une famille quelconque de systèmes déductifs est encore un système déductif, qui est la borne inférieure de la famille dans A*. Par suite, si X est une partie quelconque de A, on note $\Delta(X)$ l'intersection de la famille de tous les systèmes déductifs D de A tels que $X \subseteq D$. On a que $\Delta(X)$ est un système déductif contenant X, et que c'est le plus petit ; on l'appelle la clôture déductive de X. Par exemple on a, pour $x \in A$, $\Delta(\{x\}) = \{u \,;\, (x \Rightarrow u) = 1\}$, ensemble que l'on note aussi $\Delta[x]$. Par conséquent, si $(D_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de systèmes déductif de A, elle admet dans A* une borne inférieure et une borne supérieure, qui sont :

$$\bigwedge_{i \in I} D_i = \bigcap_{i \in I} D_i \quad \text{et} \quad \bigvee_{i \in I} D_i = \Delta\Big(\bigcup_{i \in I} D_i\Big).$$

On a alors dans A* la loi de distributivité :

$$D \cap \Big(\bigvee_{i \in I} D_i\Big) = \bigvee_{i \in I} (D \cap D_i).$$

Par suite, d'après Ward, A* est une algèbre de Heyting complète. On l'appelle la duale de A.

27.4. Puisque A* est donc encore une algèbre de Hilbert, on peut considérer $(A^*)^* = A^{**}$, que l'on appelle la biduale de A. On détermine alors une application $j : A \to A^{**}$ par :

$$j(x) = \{D \,;\, x \in D\} = \{D \,;\, \Delta[x] \subseteq D\}.$$

On vérifie que j est injective, et que j est un homomorphisme d'algèbre de Hilbert c'est-à-dire que

$$j(x \Rightarrow y) = (j(x) \Rightarrow j(y)).$$

De la sorte, j réalise un plongement de l'algèbre de Hilbert A dans une algèbre de Heyting complète, à savoir A**. On peut montrer (Diego) que j est surjective (et alors un isomorphisme) si et seulement si A est une algèbre de Heyting finie.

De fait, pour tout $x \in A$, $j(x) \subseteq A^*$, et l'on peut considérer sur A* la topologie O(A*) la moins fine telle que les j(x) en soient des ouverts ; autrement dit un ouvert élément de O(A*) est une partie W de A* qui peut s'obtenir comme union d'une famille quelconque de parties dont chacune est une intersection d'une famille finie de parties de la forme j(x). Alors O(A*) est une sous-algèbre de Heyting de A**, et j est à valeurs dans O(A*). Ainsi toute algèbre de Hilbert A est plongée dans l'algèbre O(A*) des ouverts d'un espace topologique, dont l'ensemble des points est A*. Il en est en particulier de même pour une algèbre de Heyting quelconque.

Par suite les équations dérivables en toutes généralités de h1, h2 et h3 (ou bien de (A), (B), (C), (D)) sont les mêmes que celles qui sont satisfaites dans toute algèbre de Heyting, et les mêmes que celles qui sont satisfaites au sein des ouverts d'un espace topologique général.

En fait si Int est l'ensemble des thèses (ou formules inférables) du calcul propositionnel intuitioniste (voir ci-dessous), si Int($\rightarrow$) est l'ensemble de ces thèses où ne figure que l'implication, et si ImplPos est l'ensemble des thèses du calcul implicatif positif, on montre[30] que

$$\mathsf{ImplPos} = \mathsf{Int}(\rightarrow).$$

27.5. Nous avons maintenant besoin de résultats du calcul propositionnel intuitioniste et des calculs propositionnels modaux. Je renvoie en particuliers aux traités de Feys[31], de Hughes et Cresswell[32], de Van Benthem[33], de Chagrov et Zakharyaschev[34]. On commence par une présentation du calcul intuitioniste et du calcul classique. On en trouvera de nombreuses variantes dans la littérature. Nous suivons Chagrov et Zakharyaschev en particulier pour bien isoler comme eux la règle de substitution, de sorte à pouvoir ultérieurement l'assouplir ou la relativiser, dans l'esprit des assimilations et régimes.

Le langage L de base est le suivant. On dispose, comme symboles primitifs, de variables propositionnelles p, q, r, etc., d'une constante propositionnelle $\perp$ (lue '"fausseté"), de trois connecteurs binaires $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$ (lus "conjonction", disjonction" et "implication"), et de signes de ponctuations "(" et ")".

Les *formules* sont définies par induction :

---

[30] S. Kanger, *A note on partial postulate sets for propositional logic*, Theoria, vol. 21, 1955, p. 99-104.

[31] R. Feys, *Modal Logics*, Collection de Logique Mathématique, Série B, Louvain et Paris, Nauwelaerts et Gauthiers-Villars, 1965.

[32] G. E. Hughes and M.J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London and New York, 1968.
G. E. Hughes and M.J. Cresswell, *A compagnion to Modal Logic*, Methuen, London and New York, 1984.

[33] J. Van Benthem, *Modal logic and classical logic*, Bibliopolis, Napoli, 1983.

[34] A. Chagrov and M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, Oxford Logic Guides: 35, Clarendon Press, Oxford, 1997.

1- les variables et la constante ⊥ sont des formules (appelées les atomes),
2- si f et g sont des formules, alors (f □ g), (f ⁄ g) et (f □ g) sont des formules,
• - une suite de symboles primitifs est une formule uniquement suivant les principes ci-avant.

On note p □ VarL pour signifier que p est une variable propositionnelle de L.
On note f □ FormL pour signifier que f est une formule de L .

On définit "négation" (¬), "équivalence" (€) et "vérité" (T) par :

¬f = (f □ ⊥), (f € g) = (f □ g) □ (g □ f), T = (⊥ □ ⊥).

Le *calcul propositionnel intuitioniste* Int consiste en les axiomes et règles d'inférences suivantes :

Axiomes :

1. p □ (q □ p)
2. (p □ (q □ r)) □ ((p □ q) □ (p □ r))
3. (p □ q) □ p
4. (p □ q) □ q
5. p □ (q □ (p □ q))
6. p □ (p ⁄ q)
7. q □ (p ⁄ q)
8. (p □ r) □ ((q □ r) □ ((p ⁄ q) □ r))
9. ⊥ □ p

Règles d'inférences :

Modus ponens (MP) : étant données les formules f et f □ g, on infère g.

Substitution (Subst) : étant donnée une formule f, on infère fs,

où s est une "substitution", c'est-à-dire une application de VarL dans FormL, la nouvelle formule fs étant définie par induction sur la construction de f : ps = s(p) si p □ VarL, ⊥s = ⊥, et (f ∗ g)s = (fs) ∗ (gs) pour ∗ □ {□ ⁄, □ }.

Une formule f est dite inférable ou dérivable dans Int (ou encore est appelée une *thèse* de Int) s'il existe une dérivation de f dans Int, c'est-à-dire une suite f_1, f_2, ...f_n de formules telle que $f_n = f$ et que, pour chaque i, $1 \leq i \leq n$, f_i soit ou bien un axiome ou bien obtenu à partir des formules précédentes à l'aide de l'une des règles d'inférences. On écrit alors : $|/_{\text{Int}}$ f. Ou aussi bien on écrit : f □ Int.

On remarque qu'effectivement les formules qui correspondent aux équations des algèbres de Hilbert sont dans Int. En effet h1 et h2 correspondent aux axiomes 1 et 2 ; et le principe h3, qui se dit : p = q si et seulement si (p □ q) = 1 et (p □ q) = 1, s'écrit encore : $|/_{\text{Int}}$ (p □ q) et $|/_{\text{Int}}$ (q □ p) si et seulement si p = q. Pour voir que ce principe est bien une régle d'inférence valide dans Int, il faut d'une part constater que $|/_{\mathrm{Int}}$ (p □ p), et d'autre part montrer que si $|/_{\mathrm{Int}}$ (p □ q) et $|/_{\mathrm{Int}}$ (q □ p) alors on a p = q. Ce qui résulte du principe de disjonction (voir au 27.11).

Notons que l'on a dans Int la formule inférable "¬¬(p⁄¬p)" mais que l'on n'a pas "(p⁄¬p)", que l'on a "p □ ¬¬p" mais pas "¬¬p □ p". On a "¬¬¬p €¬p". Par contre toutes ces formules sont inférables dans le calcul classique qui suit.

27.6. Le *calcul propositionnel classique* Cl se définit en conservant les règles d'inférence de Int, et en ajoutant à Int l'axiome dit "de tiers-exclu" :

10. p ⁄ (p □ ⊥).

Si une formule f est dérivable dans Cl, on écrit : $|/_{\mathrm{Cl}}$ f. Ou aussi bien on écrit : f □ Cl.

27.7. Si E est un ensemble, l'ensemble P(E) de ses parties, ordonné par inclusion, est une algèbre de Boole ; si chaque variable propositionnelle p est interprétée comme une partie V(p) de E, et si V(⊥) = □, on interprète chaque formule f par une partie $\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}$(f) de E en posant :

$\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(\perp)$ = □,
$\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(p)$ = V(p), si p est une variable
$\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}$(f □ g) = $\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(f) \leftrightarrow \mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(g)$,
$\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}$(f ⁄ g) = $\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(f) \approx \mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(g)$,
$\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}$(f □ g) = $(E\backslash\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(f)) \approx \mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(g)$.

Alors : f □ Cl si et seulement si pour tout E et pour tout V, on a $\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(f) = E$.

27.8. Choisissons C_{qcq} un espace topologique quelconque, et C_{dns} un espace topologique, dense en soi, normal et séparable, par exemple un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions n, fixé arbitrairement, par exemple le plan euclidien. Pour tout espace topologique X, l'ensemble O(X) de ses ouverts, ordonné par inclusion, est une algèbre de Heyting ; si chaque variable propositionnelle p est interprétée comme un ouvert V(p) de X (i.e. un élément de O(X)), et si V(⊥) = □, on interprète chaque formule f par un ouvert $\mathrm{Val}_{\mathrm{int}}$(f) de X en posant :

$\mathrm{Val}_{\mathrm{int}}(\perp)$ = □,
$\mathrm{Val}_{\mathrm{int}}(p)$ = V(p), si p est une variable
$\mathrm{Val}_{\mathrm{int}}$(f □ g) = $\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(f) \leftrightarrow \mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(g)$,
$\mathrm{Val}_{\mathrm{int}}$(f ⁄ g) = $\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(f) \approx \mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(g)$,
$\mathrm{Val}_{\mathrm{int}}$(f □ g) = $\mathrm{int}[(E\backslash\mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(f)) \approx \mathrm{Val}_{\mathrm{cl}}(g)]$.

Alors[35] :

---

[35] Ce résultat de Tarski est cité par Mostowski dans C. Kuratowski, *Topologie*, volume I, , p.475. Voir A. Tarski, *Der Aussagenkalkül und die topologie*, Fund. math. 31 (1938), pp. 103-134. Il s'agit du texte d'une conférence donnée le 30 septembre 1937 au

1 -f □ Cl si et seulement si,
pour tout V à valeurs dans O(C_{qcq}), on a adh(Val_{int}(f)) = C_{qcq}.
2 -f □ Cl si et seulement si,
pour tout X et pour tout V à valeurs dans O(X), on a adh(Val_{int}(f)) = X.

3 -f □ Int si et seulement si,
pour tout V à valeurs dans O(C_{dns}), on a Val_{int}(f) = C_{dns}.
4 -f □ Int si et seulement si,
pour tout X et pour tout V à valeurs dans O(X), on a Val_{int}(f) = X.

Ainsi on compare bien, dans le cadre de la sémantique topologique Val_{int} décrite ci-dessus, les validités intuitionistes et classiques.

27.9. Pour comparer les calculs d'inférences intuitioniste et classique, nous avons le théorème de Glivenko[36] :

Pour toute formule f de L, on a $\vdash_{Cl}$ f si et seulement si on a $\vdash_{Int}$ ¬¬ f.

De là résulte les corollaires suivants :

- on a $\vdash_{Cl}$ ¬f si et seulement si on a $\vdash_{Int}$ ¬ f.

- on a $\vdash_{Cl}$ (g □ ¬f) si et seulement si on a $\vdash_{Int}$ (g □ ¬f).

- si f ne contient que les connecteurs ¬ et □, alors
on a $\vdash_{Cl}$ f si et seulement si on a $\vdash_{Int}$ f.

- si f ne contient pas de ⁄ et si toute occurrence d'une variable dans f est dans le champ d'un ¬, alors $\vdash_{Int}$ (f □ ¬¬f).

Nous avons donc au moins trois façons de *plonger* le calcul classique dans le calcul intuitionniste, c'est-à-dire d'associer à toute formule f de L une formule tr(f) de L telle que

on a $\vdash_{Cl}$ f si et seulement si on a $\vdash_{Int}$ tr(f) ;

ce sont tr_1, tr_2 et tr_3 définies par :

tr_1(f) = ¬¬f,

tr_2(f) = f, si f est un atome,

---

troisième Congrès polonais de Mathématique (voir Annales de la Société polonaise de mathématique, vol. 16 (1937), p.192. Une traduction française en est paru dansA. Tarski, *Logique, Sémantique, Métamathématique, 1923-1944*, tome 2, Armand Colin, Paris 1972, pp. 153-189.

[36] V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 15, p. 183-188, 1929.

$tr_2(f \wedge g) = tr_2(f) \wedge tr_2(g)$,
$tr_2(f \vee g) = \neg(\neg tr_2(f) \wedge \neg tr_2(g))$,
$tr_2(f \rightarrow g) = \neg(tr_2(f) \wedge \neg tr_2(g))$.

$tr_3(\perp) = \perp$,
$tr_3(p) = \neg\neg p$, si p est une variable,
$tr_3(f \wedge g) = tr_3(f) \wedge tr_3(g)$,
$tr_3(f \vee g) = \neg(\neg tr_3(f) \wedge \neg tr_3(g))$,
$tr_3(f \rightarrow g) = tr_3(f) \rightarrow tr_3(g)$.

27.10. Le "paradoxe" de l'implication consiste en ceci que, dans Cl, on a :

$$\vdash_{Cl} (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p).$$

Mais

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \notin Int .$$

En fait on a, dans Int, le *principe de disjonction* (non valide dans Cl):

$$\vdash_{Int} (f \vee g) \text{ si et seulement si : } \vdash_{Int} f \text{ ou } \vdash_{Int} g.$$

C'est d'appliquer implicitement mentalement ce principe en logique classique qui donne à
$\vdash_{Cl} (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ l'apparence d'un paradoxe.

27.11. Le *calcul propositionnel modal* K s'obtient avec le langage de base ML, obtenu en ajoutant à L un connecteur unaire $\Box$ (lu "nécessité"[37]) et en ajoutant aux règles de formation des formules de L la règle :

3- si f est une formule, alors $\Box f$ est une formule.

On définit "possibilité" ($\Diamond$) par :

$$\Diamond f = \neg\Box\neg f.$$

Les axiomes de K sont ceux de Cl (1 à 10), plus celui-ci :

11. $(\Box(p \rightarrow q)) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

Les règles d'inférences de K sont celles de Int et Cl (MP et Subst) plus la règle :

Nécessitation (RN) : étant donnée la formule f, on infère $\Box f$.

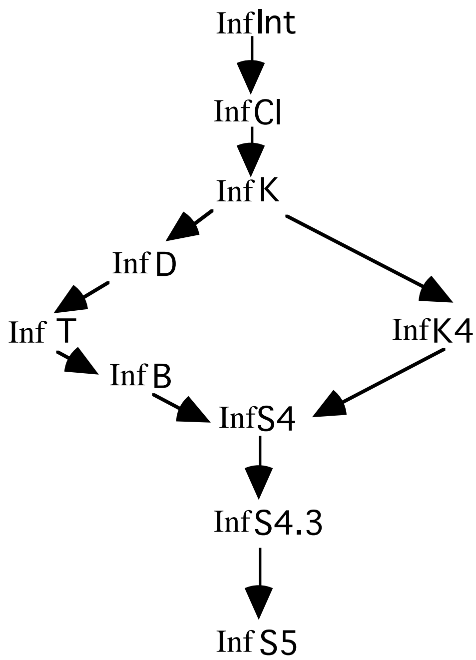
Si une formule f est dérivable dans K, on écrit : $\vdash_K f$.

[37] mais dont la véritable interprétation (nécessaire, indispensable, obligatoire, inévitable, attestable, légal, etc.etc.) est très problématique, et, en tout état de cause dépend largement des axiomes qu'on lui impose ensuite.

27.12. En renforçant d'axiomes supplémentaires le calcul K, on peut obtenir une variété infinie de calculs non équivalents, constituant un réseau très riche[38]. On note en particulier, pour usages ultérieurs (an numéro 29), les calculs D, T, B , K4, S4, S4.3 ,S5. Les systèmes Si, i = 1, ..., 5, sont introduits par Lewis et Langford[39].

K	∫ Cl	+ (□(p → q)) → (□p → □q) + (RN)			
D	∫ K	+ □p → ◇p			
T	∫ K	+ □p → p			
B	∫ K	+ □p → p	+ ¬p → □¬□p		
K4	∫ K	+ □p → □□p			
S4	∫ K	+ □p → p	+ □p → □□p		
S4.3	∫ K	+ □p → p	+ □p → □□p	+ □(□p → q)∨□(□q → p)	
S5	∫ K	+ □p → p	+ □p → □□p	+ p → □◇p	

On a les inclusions strictes (représentés par des flèches) entre les ensembles de formules inférables dans ces calculs :



27.13. Choisissons C_{dns} un espace topologique, dense en soi, normal et séparable, par exemple un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions n, fixé arbitrairement, par exemple le plan euclidien. Si X est un espace topologique quelconque, l'ensemble P(X) de ses parties, ordonné par inclusion, est une algèbre de Boole ; si chaque variable propositionnelle p est interprétée comme une partie V(p) de X, on interprète chaque formule modale f par une partie $Val_{mod}(f)$ de X en posant :

---

[38] voir les ouvrages de références cités plus haut.

[39] C.I. Lewis and C.H. Langford, *Symbolic Logic*, New York, Dover Books, 1932 (2ème éd. 1959).

$Val_{mod}(\bot) = \emptyset$,
$Val_{mod}(p) = V(p)$, si p est une variable
$Val_{mod}(f \vee g) = Val_{mod}(f) \leftrightarrow Val_{mod}(g)$,
$Val_{mod}(f / g) = Val_{mod}(f) \approx Val_{mod}(g)$,
$Val_{mod}(f \rightarrow g) = (E \backslash Val_{mod}(f)) \approx Val_{mod}(g)$,
$Val_{mod}(\Box f) = int(Val_{mod}(f))$.

Ainsi Val_{mod} est une extension de Val_{cl}.

Alors[40] :
1- f ∈ S4 si et seulement si
pour tout V à valeurs dans $P(C_{dns})$, on a $Val_{mod}(f) = C_{dns}$.
2- f ∈ S4 si et seulement si
pour tout X et pour tout V à valeurs dans P(X), on a $Val_{mod}(f) = X$.

Précisons bien aussi le point suivant. Les axiomes de topologie exprimés avec l'opérateur int (ou aussi bien adh) sont de la forme $F(X_1, X_2, ..., X_k) = \emptyset$, où F ne fait intervenir que les opérations de l'algèbre de Boole et l'opération adh. On peut prouver[41] qu'il n'existe aucun autre axiome de cette forme qui soit indépendant du système d'axiomes de topologie et qui soit valable dans l'espace euclidien n-dimensionnel. Autrement dit pour tester si $F(X_1, X_2, ..., X_k) = \emptyset$ est vrai pour tout $X_1, X_2, ..., X_k$,dans tout espace topologique X, il faut et il suffit que ce soit vrai dans un espace euclidien de notre choix, par exemple dans le plan euclidien E^2 ou, autre exemple, dans la droite euclidienne E^1. On ne confondra pas ceci avec les faits vue plus haut sur Val_{int}, dans lesquels les X_i sont a priori des ouverts et non pas des parties quelconques.

27.14. Pour comparer les calculs intuitioniste et modal, et classique, nous avons aussi le théorème de traduction modal de Gödel :

On a un plongement T traduisant le calcul intuitioniste dans le calcul modal S4, donné par :

$T(\bot) = \Box\bot$,
$T(p) = \Box p$, si p est une variable,
$T(f \vee g) = T(f) \vee T(g)$,
$T(f / g) = T(f) / T(g)$,
$T(f \rightarrow g) = \Box(T(f) \rightarrow T(g))$.

On a ainsi :

---

[40] voir J.C.C. Mc Kinsey et A. Tarski, *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, Journ. Symb. Logic. 13 (1948), pp. 1-13 ; Tang Tsao-Chen, *Algebraic postulates and a geometric interpretation for the lewis calculus of strict implication*, Bull. Amer. math. Soc. 44 (1938), pp. 737-744. Ce résultat est cité par Mostowski dans C. Kuratowski, *Topologie*, volume I, , p.475.
[41] J.C.C. Mc Kinsey et A. Tarski, *The Algebra of Topology*, Ann. of math. 45 (1944), p. 141-191. Ce résultat est cité dans C. Kuratowski, *Topologie*, volume I, p.23.

$$f \in \mathsf{Int} \quad \text{si et seulement si} \quad T(f) \in \mathsf{S4}$$

La détermination de T est évidemment compatible avec les interprétations topologiques Val_{int} et Val_{mod} de Int et S4 données plus haut. On a bien, pour tout espace topologique X,

$$Val_{int}(f) = X \quad \text{si et seulement si} \quad Val_{mod}(T(f)) = X.$$

En fait si $Val_{mod}(T(f))$ est construit à partir d'une valuation V à valeurs dans les parties quelconques de X, int $\circ$V est une valuation quelconque à valeurs dans les ouverts, et le $Val_{int}(f)$ correspondant est égal au $Val_{mod}(T(f))$. Par suite, on a aussi que $adh(Val_{int}(f)) = X$ si et seulement si $adh(Val_{mod}(T(f))) = X$, et donc $f \in$ Cl si et seulement si $adh(Val_{mod}(T(f))) = X$ pour toute valuation V. Mais comme on a $adh(Val_{mod}(T(f))) = Val_{mod}(\Diamond T(f))$, finalement il vient :

$$f \in \mathsf{Cl} \quad \text{si et seulement si} \quad \Diamond T(f) \in \mathsf{S4}$$

En fait, le calcul propositionnel ainsi réalisé par T dans S3[42] est déjà le calcul intuitioniste[43], celui réalisé dans la logique de Grzegorczyk Grz (syntaxiquement, on a $\mathsf{Grz} = \mathsf{K} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p)$ et $\mathsf{Grz} = \mathsf{S4} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p))$ est encore le calcul intuitioniste[44], et celui réalisé par T dans S5[45] est le calcul classique[46]. Par suite la différence entre Int et Cl (qui, d'après Tarski - voir ci-avant en 27.8 - revient à celle entre " adh(A) = C" et "A = C") se trouve rapportée à un problème plus vaste, la comparaison entre les logiques modales S3, S4 et Grz d'une part, et S5 d'autre part, relativement à la traduction T. Et le cœur de la question tourne autour des logiques de la prouvabilité située après S4, comme GL ($= \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$) et S ($= \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p + \Box p \to p$).

On note ainsi que le calcul classique peut se plonger de plusieurs façons dans les calculs modaux S3, S4, Grz ou S5, en utilisant d'abord un des plongements possibles de ce calcul classique dans le calcul intuitioniste, puis le plongement de Gödel du calcul intuitioniste. Par exemple, avec le théorème de Glivenko on a :

$$f \in \mathsf{Cl} \quad \text{si et seulement si} \quad T(\neg\neg f) \in \mathsf{S4}$$

On note que $T(\neg f) = T(f \to \bot) = \Box(T(f) \to \bot) = \Box\neg T(f)$, et $T(\neg\neg f) = \Box\neg\Box\neg T(f) = \Box\Diamond T(f)$. On a donc

$$f \in \mathsf{Cl} \quad \text{si et seulement si} \quad \Box\Diamond T(f) \in \mathsf{S4}$$

---

[42] pour la définition de S3, on se reportera par exemple à Lewis et Langford.
[43] voir Chagrov and Zakharyaschev, exercice 3.31. p. 104.
[44] voir Chagrov and Zakharyaschev, p.96.
[45] noter que Grz et S5 sont deux extensions incomparables de S4.
[46] J. Lukasiewicz, *A system of modal logic*, The Journal of Computing Systems, Vol. 1 (1953), pp. 111-149. Ce point est cité dans Hughes and Cresswell, p. 117.

27.15. Pour terminer, notons aussi que la comparaison entre Int et Cl , qui tendrait au niveau sémantique topologique à analyser la différence entre Y = X et adh(Y) = X, conduit à considérer les "logiques intermédiaires" dont les thèses sont plus nombreuses que les thèses intuitionistes, et moins que les thèses classiques. De fait ce sont les logiques obtenues en ajoutant à un ensemble arbitraire d'axiomes supplémentaires, avec les mêmes règles d'inférences. On les appelle aussi logiques super-intuitionistes. Par exemple, entre Int et Cl = Int + $p \vee \neg p$, nous avons une logique utile vis-à-vis du tiers-exclu : KC = Int + $\neg p \vee \neg\neg p$, et une logique utile vis-à-vis du paradoxe de l'implication : LC = Int + (p □ q)∨(q □ p). Mais ces logiques intermédiaires sont très variées. Par exemple[47], il y en a une infinité de distinctes axiomatisables par des formules d'une variable. Mais ceci précisément "est" la même chose que l'infinité des formules de Nishimura (que l'on va considérées au prochain numéro).

27.16. Le problème des logiques intermédiaires est ainsi le versant logique de notre question de l'analyse propositionnelle du voir à travers les inclusions, les exclusions et les contacts dans une image. De plus, c'est en procédant ainsi, par le rapport de la logique du voir, puis du calcul des régimes en général, aux logiques modales, que l'on pourra vraiment saisir les limites du topologique dans le cadre des régimes, et concevoir en quoi le cas de relations d'assimilations non-réflexives et non-transitives doit tenir à autre chose qu'au topologique.

[47] voir Chagrov and Zakharyaschev, p.223.

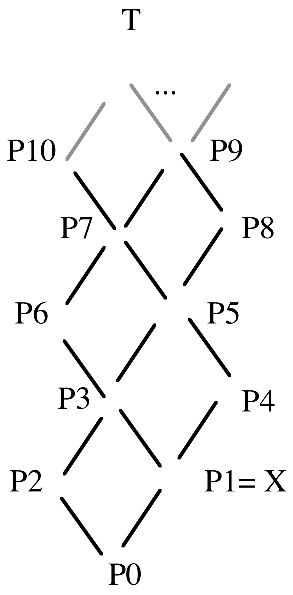
28. VERS LA LOGIQUE DU VOIR

28.1. Nous utilisons ici et approfondissons les résultat du numéro précédent. Nishimura[48] rappelle que Mc Kinsey et Tarski on décrit la preuve de Gödel que le nombre de fonctions algébriques brouweriennes est infini ; ils ont donné un exemple d'une suite infinie de fonctions algébriques brouweriennes d'un argument distinctes, ce qui signifie qu'il y a une infinité de formules propositionnelles d'une variable non-équivalentes dans le calcul propositionnel intuitioniste LJ à la Gentzen. Puis Nishimura donne une suite infinie de formules $P_n(X)$ d'une variable X telle que toute formule d'une variable soit équivalente intuitionistiquement à une et une seule des $P_n(X)$. Elles sont définies comme ceci (nous écrivons à droite les premières transcriptions topologiques dans un espace Z, où l'on prend pour variable X un ouvert U quelconque) :

$P_{\bullet}(X) = (X \square X) = T$; Z
$P_0(X) = X \square \neg X$; $\square$
$P_1(X) = X$; U
$P_2(X) = \neg X$; int(Z\U)
$P_3(X) = X / \neg X$; Z\fr(U)
$P_4(X) = (X / \neg X) \square X$; int(adh(U))
$P_5(X) = (X / \neg X) / ((X / \neg X) \square X)$; (Z\fr(U))≈int(adh(U))
$P_6(X) = ((X / \neg X) / ((X / \neg X) \square X)) \square (X / \neg X)$; etc...
...
$P_{2n+3}(X) = P_{2n+1}(X) / P_{2n+2}(X)$;
$P_{2n+4}(X) = P_{2n+3}(X) \square P_{2n+1}(X)$;
...

Autrement dit, l'algèbre de Heyting librement engendrée par un générateur est infinie, et ses éléments distincts sont les $P_n(X)$. Le résultat de Nishimura, faisant suite à celui de Rieger[49], est, plus précisément, que l'algèbre de Heyting libre H[X] sur un générateur X a la forme ci-après ; son ordre correspond à l'implication (dans Int).

[48] I. Nishimura, *On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus*, Journ. Symb. Logic 25, 4, (1960) pp. 327-331.
[49] L. Rieger, *On the lattice of Brouwerian propositional logics*, Acta Universitatis Carolinæ, Mathematica et Physica, 189, 1949.



H(X)

Par suite, si V est un ouvert de Z, et si x est un point de Z, on peut attribuer naturellement à l'énoncé "x ∈ V" une valeur plus subtile que simplement le "vrai" ou le "faux", en repérant pour quelles valeurs de n on a x ∈ $P_n(V)$, soit en posant :

$$[[x \in V]] = \{P_n(X) \; ; \; x \in P_n(V)\} \prod H[X].$$

En fait [[x ∈ V]] n'est pas une partie quelconque de l'ensemble ordonné H[X], mais c'est un "filtre" dans l'ensemble ordonné H[X], c'est-à-dire que l'on a : x ∉ $P_0(V)$ = ∅ ; x ∈ $P_\bullet(V)$ = Z ; si x ∈ $P_n(V)$ et si $P_n(V)$ ⊆ $P_m(V)$, alors x ∈ $P_m(V)$; si x ∈ $P_n(V)$ et si x ∈ $P_m(V)$, alors x ∈ $P_n(V) \leftrightarrow P_m(V)$. Si l'on note FilH[X] l'ensemble des filtres de H[X], ordonné par inclusion, on a donc [[x ∈ V]] ∈ FilH[X], et on peut dire que "y est plus dans X que ne l'est x" si l'on a : [[x ∈ V]] ∏ [[y ∈ V]]. Notons bien que l'ordre sur FilH[X] n'est pas total, et que donc il peut y avoir des points x et y dont les appartenances à V ne sont pas comparables.

28.2. A fortiori l'algèbre de Heyting librement engendrée par n générateurs est infinie. Bien sûr on la décrira en faisant la somme en tant qu'algèbres de Heyting de n copies de H[X] ; encore faut-il donner une construction effective de ce qu'est la somme de deux algèbres de Heyting : on y reviendra.

Mais si on se limite à l'algèbre de Hilbert librement engendrée par n générateurs, alors elle est finie (résultat de Diego). Par exemple Pour n = 3 il y a au plus 10^{27} formules non équivalentes. Pour n = 2, Skolem[50] avait montré la finitude, et établi que l'algèbre de Hilbert libre possède 14 formules non équivalentes. Rappelons aussi que

[50] Th. Skolem, *Consideraciones sobre los fundamentos de la matematica*, Revista Matematica Hispano-Americana, 4a Serie t. 12, 1952, pp. 169-200, et t. 13, 1953, pp. 149-174.

l'algèbre de Boole librement engendrée par n générateurs est finie, et possède 2^{2^n} formules non équivalentes.

28.3. Par suite, via l'interprétation de Gödel, on obtiendra une infinités de formules propositionnelles modales à une variable non équivalentes dans S4 ; et vue la caractérisation topologique de l'inférabilité dans S4, on en déduit ceci :

Si dans un espace topologique Z on forme à partir d'une partie A quelconque tous les ensembles que l'on peut obtenir en appliquant autant de fois que l'on veut les opérateurs booléens (disons Z\ - et ≈) et l'opérateur int, on forme, en général, une infinité de parties non égales, même si on commence avec une partie A ouverte dans Z. Si U est un ouvert de Z, toutes les parties distinctes en général que l'on peut former sont donc obtenue par les formules de Nishimura. Si A est vraiment quelconque, non nécessairement ouverte, la structure est donc plus complexe que celle des formules de Nishimura. Le treillis obtenu sera noté S4[X], puisqu'il est identique à celui des classes d'équivalences dans S4 entre formules à une variable X. Donc H[X] est un sous-treillis de S4[X].

Et l'on peut même se limiter au plan euclidien[51] : si dans le plan euclidien E^2 on forme à partir d'une partie A quelconque tous les ensembles que l'on peut obtenir en appliquant autant de fois que l'on veut les opérateurs booléens (disons E^2\ - et ≈) et l'opérateur int, on forme, en général, une infinité de parties non égales. C'est donc la structure de S4[X] qui décrit très exactement le réseau inclusive entre toutes ses parties, pour un A général. Pour un A particulier, le réseau obtenu S4(A) sera un réseau quotient de S4[X], obtenu en identifiant entre eux certains éléments de S4[X]. La "particularité" de A est donc toute entière décrite par l'identification en question. Notons en particulier le problème de trouver une partie Ex du plan qui soit "exemplaire" ou "générique", c'est-à-dire telle que S4(Ex) = S4[X]. Une telle partie Ex donnerait donc littéralement à voir S4[X].

28.4. En contraste, vu le résultat sur les algèbres de Hilbert, si, dans le plan on considère le seul opérateur binaire qui à (A, B) associe int((E^2\ A)≈B), alors partant d'un nombre fini d'ouverts U_1, .., U_n, on ne pourra, en itérant cet opérateur, obtenir qu'un nombre fini d'ouverts distincts. Je ne sais pas s'il en est de même sans supposer les U_i ouverts.

Et si on se limite à itérer E\ - et int, à partir d'une partie quelconque A, sans utiliser ≈, on ne pourra former qu'au plus 14 ensembles distincts (y compris A et E\A)[52] (que nous avons décrite au numéro 25).

28.5. En vue de la "logique du voir", il est aussi utile de relever la notion de domaine ouvert d'un espace topologique X. Une partie D de X est un *domaine ouvert* si D = int(adh(D)). On désigne par Od(X) l'ensemble ordonné par inclusion des domaines ouverts de X. Alors Od(X) est une algèbre de Boole ; en particulier on y obtient la borne supérieure de D et D', soit le plus petit domaine ouvert qui contient D et D', et qui est D/D' = int(adh(D≈D')), on obtient ¬D = X\adh(D), et D □ D' = (X\adh(D\D')). Alors

[51] ou même à la droite euclidienne ; mais nous préférons le plan pour mieux "voir".
[52] C. Kuratowski, *Sur l'opération adhA de l'Analysis Situs*, Fund. math. 3 (1922), pp. 182-199.

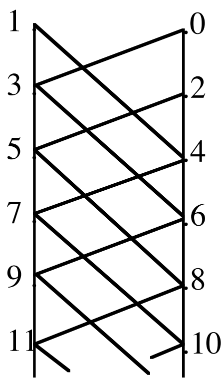
en interprétant les formules du calcul propositionnel ainsi, on a que Od(X) est adéquate pour le calcul propositionnel classique[53].

28.6. La construction de l'algèbre de Heyting A* duale d'une algèbre de Hilbert A (voir au numéro précédent), comme ici la considération des "évaluations" du genre [[x □ V]] □ FilH[X], relève d'un processus de représentation "à la Stone" particulièrement important. En fait si Ω = (E, ≤) est un ensemble ordonné, on appelle partie stable par le haut (upward) de Ω une partie X de E telle que si x □ X et x ≤ y alors y □ X, et on note UpΩ l'ensemble de ces parties. On détermine alors sur UpΩ une "implication", en posant

X □ Y = {x □ E ; ∀ y [(x ≤ y) □ (y □ X)□ y □ Y] }.

Alors (UpΩ, □) est une algèbre de Heyting notée Ω^+, et appelée l'algèbre duale de Ω.

On peut alors vérifier[54] que H[X] = N^+, avec N l'ensemble des entiers, ordonné par ➜ suivant : 0 ➡ 2 ➡ 4 ➡ 6 ➡ 8 ➡10 ... ; 1 ➡ 3 ➡ 5 ➡ 7 ➡ 9 ➡ 11 ... ; 0 ➡ 3 , 2 ➡ 5 , 4 ➡ 7 , 6 ➡ 9 , 8 ➡ 11 , ... ; 1 ➡ 4 , 3 ➡ 6 , 5 ➡ 8 , 7 ➡ 10 , ... , ou le schéma :



....
....

28.7. Ainsi pour comprendre la logique propositionnelle du voir qui nous intéresse, on doit articuler syntaxiquement l'algèbre de Boole des domaines ouverts d'un espace, l'algèbre de Heyting de ses ouverts, l'algèbre de Boole de ses parties quelconques. Pour cela il faudrait et suffirait de connaître la construction de S4[X], comme ensemble ordonné, et plus précisément comme S4-algèbre libre à un générateur (pour cela il faudra réussir à concevoir précisément ce que doit être la notion de S4-algèbre, ce qui pourra se préciser en terme d'algèbres modales au sens du numéro 31), puis de connaître une construction des sommes de S4-algèbres. De ceci H[X] est un fragment, et K[X] un autre. Il faudra savoir comment les lier.

28.8. Dans le cas de la logique S5 =S4 + p □ □□p, on sait[55] décrire S5[X] : Dans la présentation de S5 donnée dans le livre de Feys, toute fonction modale (c'est-à-dire

---

[53] voir A. Tarski, *Der Aussagenkalkül und die topologie*, Fund. math. 31 (1938), pp. 103-134.
[54] voir Chagrov et Zakharyaschev, pp. 439, 204-205, et 222.

construite avec N, □ et □) à une variable X est équivalente à l'une des 16 formules suivantes :

X, NX, □X, N□X, □NX, N□NX ;
X□NX, X∕NX ; X□ NX, NX∕N□NX ;
NX□ X, X∕N□X, □X□ NX ; N□X∕N□NX, □X□(NX∕N□NX) ;
□NX□(X∕NX).

En fait on a dans S5 le théorème de réduction à une forme normale[56] :
tout expression bien formée de S5 à variables X, Y, etc, est équivalente à une conjonction de disjonctions d'expressions qui sont chacune ou bien une expression classique (sans □ ou □) ou bien une expression classique précédée d'un seul □ ou d'un seul □.
De là on peut déduire la construction de S5[X] , S5[X, Y], etc., et en particulier le fait que ces objets sont tous finis. En particulier, on a donc que S4[X] donne par l'identification supplémentaire qui résulte de p □ □□p, l'objet fini S5[X].

Remarquons que ces questions sont bien sûr liées à celle de la réduction des modalités que nous envisageons au numéro 30 qui vient.

Concernant l'analyse de S4[X], on trouve donc cet objet, qui pour nous, rappelons-le, pose le fait propositionnel le plus simple du voir, pris en sandwich entre d'une part ses sous-objets infinis H[X] et K[X], et, d'autre part son quotient fini S5[X]. on a donc en particulier à contempler :

H[X] ∅ S4[X] ∅ S5[X].

De ceci on a une version topologique en considérant un espace topologique X, ses ouverts, ses parties, ses domaines ouverts.

---

[55] voir R. Feys, *Modal Logics*, Collection de Logique Mathématique, Série B, Louvain et Paris, Nauwelaerts et Gauthiers-Villars, 1965, pp. 117-118.
[56] voir p. 55 de G. E. Hughes and M.J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London and New York, 1968.

29. MODALITES ET RELATIONS BINAIRES D'ACCESSIBILITE

29.1. Considérons maintenant E un ensemble non-vide et R une relation binaire sur E telle que :

R est un ordre partiel (i.e.une relation réflexive, transitive et antisymétrique).

On écrit donc comme synonymes : y□R[x], (x,y)□ R, ou encore xRy. On appelle (E, R) un *cadre intuitioniste* (intuitionistic frame). Si xRy, on dira que dans le cadre (E,R) y est visible ou accessible depuis x. Les éléments de E sont appelés des mondes.

On appelle *valuation* (intuitioniste) du calcul Int dans (E, R) la donnée d'une fonction V : VarL ∅ P(E) telle que, pour toute variable p, on ait

xRy et x □ V(p) implique y □ V(p).

On détermine alors la valuation intuitioniste $Val_{Int}(f)$ (induite par V) d'une formule f ainsi :

$Val_{Int}(\perp)$ = □,
$Val_{Int}(p)$ = V(p), si p est une variable
$Val_{Int}(f$ □ $g)$ = $Val_{Int}(f)$ ↔ $Val_{Int}(g)$,
$Val_{Int}(f \,/\, g)$ = $Val_{Int}(f) \approx Val_{Int}(g)$,
$Val_{Int}(f$ □ $g)$ = {x ; ∀y [xRy □ (y □ $Val_{Int}(f)$ □ y □ $Val_{Int}(g)$)]}.

On dit que f est *valide* dans (E,R) si, et seulement si, on a, pour tout V, $Val_{Int}(f)$ = E ; on écrit alors : (E,R) |= f. On a alors les théorèmes suivant :

$\mid\!\!/_{Int}$ f	si et seulement si	pour tout (E,R) on a : (E,R) |= f.
$\mid\!\!/_{Int}$ f	si et seulement si	pour tout (E,R) arbre on a : (E,R) |= f.
$\mid\!\!/_{Int}$ f	si et seulement si	pour tout (E,R) arbre fini on a : (E,R) |= f.

29.2. Considérons ensuite E un ensemble non-vide et R une relation binaire sur E quelconque. On écrit donc comme synonymes : y□R[x], (x,y)□ R, ou encore xRy. On appelle (E, R) un *cadre modal* ("modal frame", ou, plus explicitement, "modal Kripke frame"[57]). Si xRy, on dira que dans le cadre (E,R) y est visible ou accessible depuis x. Les éléments de E sont appelés des mondes.

On appelle *valuation* (modale) du calcul K dans (E, R) la donnée d'une fonction quelconque V : VarL ∅ P(E).

---

[57] S. Kripke, Semantical analysis of modal logic, Part I. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 9:67-96, 1963

S. Kripke, Semantical considerations on modal logic. Acta Philosophica Fennica, 16:83-94, 1963.

On détermine alors la valuation modale ou valuation-K, notée $Val_K(f)$ (induite par V) d'une formule f ainsi :

$Val_K(\bot)$ $= \emptyset$,
$Val_K(p)$ $= V(p)$, si p est une variable
$Val_K(f \wedge g)$ $= Val_K(f) \leftrightarrow Val_K(g)$,
$Val_K(f / g)$ $= Val_K(f) \approx Val_K(g)$,
$Val_K(f \rightarrow g)$ $= \{x ; x \notin Val_K(f) \vee x \in Val_K(g))]\}$,
$Val_K(\Box f)$ $= \{x ; \forall y\ [xRy \rightarrow (y \in Val_K(f))\}$.

On a alors

$Val_K(\Diamond f)$ $= \{x ; \exists y\ [xRy \wedge (y \in Val_K(f))\}$.

Ainsi, concernant les modalités de nécessité $\Box$ et de possibilité $\Diamond$, on formulera :

La nécessité $\Box f$ de f est valide dans le monde x si et seulement si f est valide dans tous les mondes y accessibles depuis x, et la possibilité $\Diamond f$ de f est valide en x si et seulement si il existe un monde accessible depuis x ou f est valide.

On dit que f est *valide* dans (E,R) si, et seulement si, on a , pour tout V, $Val_K(f) = E$; on écrit alors : $(E,R) \models f$. On a alors les théorèmes suivants :

$\vdash_K f$ si et seulement si pour tout (E,R) on a : $(E,R) \models f$.
$\vdash_K f$ si et seulement si pour tout (E,R) fini on a : $(E,R) \models f$.
$\vdash_K f$ si et seulement si pour tout (E,R) arbre intransitif fini on a : (E,R) $\models$ f.

29.3. On a aussi, pour tout cadre modal (E,R) :

$(E,R) \models \Box p \rightarrow p$ ssi R est réflexive i.e. $\forall x\ xRx$
$(E,R) \models \Box p \rightarrow \Box\Box p$ ssi R est transitive i.e. $\forall y,z\ [(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz]$
$(E,R) \models p \rightarrow \Box\Diamond p$ ssi R est symétrique i.e. $\forall x,y\ (xRy \rightarrow yRx)$

et de plus (voir en 27.12.) :

$\vdash_T f$ si et seulement si pour tout (E,R) réflexif : $(E,R) \models f$,
$\vdash_{K4} f$ si et seulement si pour tout (E,R) transitive : $(E,R) \models f$,
$\vdash_{S4} f$ si et seulement si pour tout (E,R) réflexif, transitif : $(E,R) \models f$.
$\vdash_{S5} f$ si et seulement si pour tout (E,R) réflexif, transitif et symétrique : $(E,R) \models f$.

On note également, en appelant "universel" un cadre (E, R) où xRy pour tout x et y :

$\vdash_{S5} f$ si et seulement si pour tout (E,R) universelle fini : $(E,R) \models f$.

On a aussi [58]:

[58] on trouvera des preuves, et d'autres résultats de ce type, dans les traités cités.

(E,R) $\models$ $\Box p \rightarrow \Diamond p$ ssi R est sérielle i.e. $\forall x\ \exists y\ xRy$
(E,R) $\models$ $\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$ ssi R est fortement connectée i.e.
$\forall x,y,z\ (xRy \wedge xRz \rightarrow yRz \vee zRy)$
(E,R) $\models$ $\Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$ ssi R est un ordre partiel noetherien, i.e.
réflexif, transitif, antisymétrique,
et sans chaîne ascendante infinie d'éléments distincts

et de plus (voir en 27.12 et 27.14) :

$\vdash_{D}$ f si et seulement si pour tout (E,R) sériel : (E,R) $\models$ f.
$\vdash_{S4.3}$ f si et seulement si pour tout (E,R) ordre linéaire : (E,R) $\models$ f.
$\vdash_{Grz}$ f si et seulement si pour tout (E,R) ordre partiel nœtherien : (E,R) $\models$ f.

$\vdash_{GL}$ f si et seulement si pour tout (E,R) ordre partiel strict nœtherien : (E,R) $\models$ f.

29.4. Ainsi, s'établissent deux problématiques importantes.

La première est la question de la correspondance entre une "équation modale" comme par exemple

equ : "$\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p) = T$"

et une formule du premier ordre portant sur un cadre, comme

for : "$\forall x,y,z\ (xRy \wedge xRz \rightarrow yRz \vee zRy)$",

correspondance établie par la propriété que equ est valide dans (E,R) si et seulement si R satisfait for :

$\forall$(E,R) [(E,R) $\models$ equ $\Leftrightarrow$ for $=\!|$ R].

En fait[59] toute équation modale equ ne se traduit pas ainsi en une formule du premier ordre for, et toute formule du premier ordre for ne se traduit pas ainsi en équation modale equ. Par exemple, la condition d'irréflexivité "$\forall x$ N(xRx)" ne peut être exprimée par une équation modale. La question est de savoir comment sont les propriétés de cadre exprimables par une équation modale, et quelles sont les équations modales exprimables par une propriété de cadre.

La deuxième question est celle de la correspondance entre :

- les classes C de cadres.
- les logiques L = K + D, extension normales de K, c'est-à-dire obtenue en ajoutant à K un ensemble d'axiomes D qui est stable par MP, Sub, et RN.

[59] voir p.47 de G. E. Hughes and M.J. Cresswell, *A compagnion to Modal Logic*, Methuen, London and New York, 1984.

Pour une classe C de cadres on note LogC la logique K + D où D est constituée des formules f telles que, pour tout (E,R) $\in$ C, (E,R) $\models$ f.
Pour une logique L = K + D, on note varL la variété ou classe des cadres (E,R) tels que pour tout f $\in$ D, (E,R) $\models$ f.

La question est donc celle des propriétés du va-et-vient donné par C ∅ LogC et L∅ varL.

Ces questions nous intéresse ici précisément dans la perspective de l'étude des régimes, des propriétés des calculs d'augmentation et diminution en relation avec les propriétés des relations d'assimilation.

30. REDUCTION DES MODALITES

30.1. Une modalité est une suite de □, ▯ et N. Comme dans K on a les formules N□p€▯ Np, N▯p€ □Np et NNp € p, on peut supposer que dans la suite N ne figure au plus qu'une fois, en dernière position. Alors K possède une infinité de modalités d'effets distincts (non équivalentes); précisément on a :

si M et M' sont deux modalités distincts, alors Mp ▯M'p ▯K.

La logique[60] T = K + □p ▯ p possède encore une infinité de modalités[61].

30.2. Toute modalité est équivalente dans S4 à l'une des 14 modalités, non-équivalentes entre elles :

Id, □, ▯, ▯□ , □▯ , □▯□, ▯□▯ , N, □N, ▯N, ▯□N , □▯N , □▯□N, ▯□▯N.

En effet cela[62] équivaut, via la sémantique topologique, au résultat de Kuratowski[63] sur i, a et N, donné au numéro 25.

Evidemment toute logique plus forte que S4 possède donc un nombre fini de modalités distinctes. Par exemple, dans le système S5, il y a encore moins de modalités que dans S4. Il reste seulement six modalités irréductibles[64] ; ce sont les six modalités de Theophrastus "à la Aristote" : Id et N (affirmation et négation), ▯ (possibilité) et N▯ ou □N (impossibilité), □ (nécessité) et N□ ou ▯N (non-nécessité ou contingence).

On pourra aussi prouver ces réductions dans S5, les équivalences et les distinctions nécessaires, sémantiquement, en les vérifiant, pour toute relation d'équivalence, ou bien même seulement pour toute relation universelle (puisque nous avons vu au numéro 29 précédent que |/S5 f si et seulement si pour tout (E,R) universelle : (E,R) |= f).

---

[60] originellement introduite pp. 533-535 dans R. Feys, *Les logiques nouvelles des modalités*, Revue Néoscholastique de Philosophie Vol. 40 (1937) pp. 517-553, et Vol. 41 (1938) pp. 217-252.

[61] B. Sobocinski, *Note on a modal system of Feys-Von Wright*, The Journal of Computing Systems Vol. 1 (1953) pp. 171-178.

[62] pour les énoncés en termes de modalités, voir O. Becker, *Zur Logik der Modalitäten*, Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung, vol II (1930) pp. 497-548, et W.T. Parry, Modalities in the *Survey* system of strict implication. JSL Vol. 4 (1939) pp. 131-154.

[63] C. Kuratowski, *Sur l'opération adhA de l'Analysis Situs*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 182-199.

[64] voir une preuve dans R. Feys, *Modal Logics*, Collection de Logique Mathématique, Série B, Louvain et Paris, Nauwelaerts et Gauthiers-Villars, 1965.

31. MODALITES, AUGMENTATIONS, DIMINUTIONS : AU-DELA DU VOIR

31.1. Considérons maintenant E un ensemble et ε une relation binaire quelconque sur E. On écrit donc comme synonymes (voir 1.1.) :

$$x\varepsilon y \;;\; (x,y) \in \varepsilon \;;\; y \in \varepsilon[x] \;;\; y \;\varnothing_{\varepsilon}\; x \;;\; \text{y est assimilable à x du point de vue } \varepsilon.$$

Pour toute partie X de E on a donc posé (voir au numéro 3) :

$$Xd\varepsilon = \{x \in E \;;\; \varepsilon[x] \prod X\} = \{x \in E \;;\; \forall y\,(y \in \varepsilon[x] \Rightarrow y \in X)\}\,,$$

soit

$$x \in Xd\varepsilon \text{ € } \forall y\,(\,y \;\varnothing_{\varepsilon}\; x \;\Rightarrow y \in X),$$

et

$$Xb\varepsilon = \{x \in E \;;\; \varepsilon^{op}[x] \leftrightarrow X \;\pi\; \varnothing\} = \{x \in E \;;\; \exists y\,(x \in \varepsilon[y] \text{ et } y \in X)\},$$

soit

$$x \in Xb\varepsilon \text{ € } \exists y\,(x \;\varnothing_{\varepsilon}\; y \text{ et } y \in X).$$

On note (voir au numéro 5) les relations d'échange par complémentation entre les opérateurs (-)$d\varepsilon$ et (-) $b\varepsilon^{op}$, à savoir :

$$Xd\varepsilon = E\backslash((E\backslash X)b\varepsilon^{op}), \quad Xb\varepsilon = E\backslash((E\backslash X)d\varepsilon^{op}),$$

et on rappelle (voir le numéro 7) la relation fondamentale d'adjonction :

$$Xb\varepsilon \prod Y \quad \text{€} \quad X \prod Yd\varepsilon.$$

L'interprétation logique en termes de modalité que voici tient à ce que (E, ε) peut être considéré comme un cadre modal ou "frame", en lisant $(x,y) \in \varepsilon$ sous la forme : "y est accessible depuis x", ou bien "x voit y". Alors on pose :

$$nec_{\varepsilon}X = Xd\varepsilon$$
$$pos_{\varepsilon}X = Xb\varepsilon^{op}$$

et

$$nec_{\varepsilon op}X = Xd\varepsilon^{op}$$
$$pos_{\varepsilon op}X = Xb\varepsilon$$

On a donc :

$$nec_{\varepsilon}X = E\backslash(pos_{\varepsilon}(E\backslash X)), \text{ et } pos_{\varepsilon}X = E\backslash(nec_{\varepsilon}(E\backslash X)),$$
$$nec_{\varepsilon op}X = E\backslash(pos_{\varepsilon op}(E\backslash X)), \text{ et } pos_{\varepsilon op}X = E\backslash(nec_{\varepsilon op}(E\backslash X)).$$

N.B. On prendra bien garde au chiasme entre les couples d'adjonctions ($b\varepsilon,d\varepsilon$) et ($b\varepsilon^{op},d\varepsilon^{op}$) et les couples ($nec_{\varepsilon},pos_{\varepsilon}$) et ($nec_{\varepsilon op},pos_{\varepsilon op}$).

Si l'on regarde (E, ε) comme un cadre modal, alors nec_ε est l'interprétation modale (voir 29.2) dans ce cadre de $\Box$, et pos_ε est l'interprétation modale dans ce cadre de $\Diamond$. En effet, d'après la détermination de ces interprétations au numéro 29 on a :

$$Val_K(\Box f) = \{x ; \forall y\ [x\varepsilon y \Rightarrow (y \in Val_K(f))\} = Val_K(f)d\varepsilon = nec_\varepsilon Val_K(f),$$
$$Val_K(\Diamond f) = \{x ; \exists y\ [x\varepsilon y \wedge (y \in Val_K(f))\} = Val_K(f)b\varepsilon^{op} = pos_\varepsilon Val_K(f).$$

De même $nec_{\varepsilon op}$ et $pos_{\varepsilon op}$ sont les interprétations modales de $\Box$ et $\Diamond$ dans le cadre modal (E, ε^{op}).

31.2. On dispose donc, à partir de la donnée de ε, et avec le calcul des augmentations et diminutions, d'une interprétation de la logique bimodale la plus basique pour l'étude de la temporalité, les modalités nec_ε et pos_ε exprimant nécessités et possibilités en vue du futur, et $nec_{\varepsilon op}$ et $pos_{\varepsilon op}$ exprimant nécessités et possibilités en vue du passé. Occasionnellement, on notera les modalités "formelles" qui sont interprétées par nec_ε et pos_ε, $nec_{\varepsilon op}$ et $pos_{\varepsilon op}$, par : $\Box^+$ et $\Diamond^+$, $\Box^-$ et $\Diamond^-$. Alors la relation fondamentale d'adjonction entre bε et dε (resp. entre $b\varepsilon^{op}$ et $d\varepsilon^{op}$) donne lieu à une articulation fondamentale entre passé et futur qui, à partir de

$$pos_{\varepsilon op}p \leq q \text{ si et seulement si } p \leq nec_\varepsilon\, q,$$
$$pos_\varepsilon p \leq q \text{ si et seulement si } p \leq nec_{\varepsilon op}\, q.$$

s'énonce, en notations allégées :

$$\Diamond^- p \leq q \text{ si et seulement si } p \leq \Box^+ q,$$
$$\Diamond^+ p \leq q \text{ si et seulement si } p \leq \Box^- q.$$

A quoi donc s'ajoute les relations de complémentarités vis-à-vis de la négation N :

$$\Box^+ Np = N\Diamond^+ p,$$
$$\Box^- Np = N\Diamond^- p.$$

De la sorte les 4 modalités $\Box^+$ et $\Diamond^+$, $\Box^-$ et $\Diamond^-$, ou si l'on veut les 4 opérateurs nec_ε et pos_ε, $nec_{\varepsilon op}$ et $pos_{\varepsilon op}$, c'est-à-dire les 4 opérateurs dε etbε^{op}, $d\varepsilon^{op}$ et bε, s'organisent à la façon aristotélitienne en un carré. On y reviendra pour préciser.

31.3. On peut donc profiter des analyses effectuées précédemment en termes de modalités pour l'étude des régimes. En particulier, on comprend ainsi exactement ce que signifient les limitations éventuelles sur la nature des "points de vue" ε, η, etc. Se limiter, dans les calculs d'augmentations et diminutions à des ε, η, etc, qui soient réflexifs, transitifs et symétriques (à la façon du cas des ensembles empiriques), revient (voir en 29.3.) à travailler dans la logique modale S5. Se limiter à des ε, η, etc, qui soient réflexifs et transitifs (à la façon du cas de certains ensembles empiriques gauches dont nous traiterons au numéro 33), revient (voir en 29.3.) à travailler dans la logique modale S4. Mais nous avons vu aussi que S4 admet une sémantique caractéristique topologique (où $\Box$ est interprétée comme int dans un espace topologique, ou même seulement comme int dans le plan), c'est-à-dire répond d'une "logique propositionnelle du voir".

On peut donc dire que la limitation dans le calcul des augmentations et diminutions à des ε, η, etc, réflexifs et transitifs revient exactement à se limiter à la logique du voir, et le calcul est régit par S4. Si on se limite seulement à des ε, η, etc, qui soient transitifs, la logique correspondante est K4, si bien que le cas exacte des assimilations d'un ensemble empirique gauche (cf. 33) quelconque relève d'une logique située entre K4 et S4.

On a donc aussi que le travail avec des ε, η, etc plus généraux nous fait sortir de la contrainte du voir, est effectivement plus général, et nécessaire pour l'étude de l'assimilation dans les discours, qui, on le sait, n'est pas toujours réflexive ou transitive.

31.4. Le cas général (correspondant à la logique K) que nous voulons, n'est pas trop indéterminé. Par exemple les identités vrais pour des augmentations et diminutions par rapport à un ε quelconque sont les mêmes que celle vrais pour tous les ε qui sont des arbres intransitifs finis (voir en 29.2). La logique K est Post incomplète, n'est pas 0-réductible, n'est pas structurellement complète, est Hallden incomplète, mais la logique K est consistante, décidable, finiement approximable, indépendamment axiomatisable, possède la propriété d'interpolation, et possède la propriété de disjonction modale[65]. Autant de faits qui ont donc leurs contre-partie dans les règles du calculs des augmentations et diminutions vis-à-vis d'un ε quelconque. Si l'on veut, étant donné ε, faire intervenir en même temps ε^{op}, la logique adéquate n'est pas K, mais la logique bimodale envisagée au 31.2.

31.5. Si l'on commence avec un régime, et donc pour chaque $i \in I$ une relation binaire $a(i)$ sur l'ensemble E, alors on notera $\Box_i^+$ et $\Diamond_i^+$, $\Box_i^-$ et $\Diamond_i^-$ les modalités associées à $da(i)$ et $ba(i)^{op}$,$da(i)^{op}$ et $ba(i)$. Le calcul des effets des augmentations et diminutions dans le régime est donc un calcul multimodal. Nous y reviendrons, en relation avec les logiques dynamiques et les "arrow logics".

---

[65] voir Chagrov et Zakharyaschev, pp.87-91.

32. ALGEBRES MODALES ET EXTENSIONS DE CADRES MODAUX

32.1. On appelle *algèbre modale* une donnée U = (A, □,⁄, □, ⊥, □) telle que :

- (A, □,⁄, □, ⊥) est une algèbre de Boole,

- □ est une fonction de A dans A telle que :

  - ∀ x, y □ A, □(x □ y) = □x □ □y ,
  - avec T = (⊥ □ ⊥), on a : □T = T.

On montre que U est une algèbre modale si et seulement si pour toutes formules modales f et g de K à variables propositionnelles des éléments de A on a :

si (f€ g) □ K alors f = g dans A.

En particulier □(x □ y) □ □x □ □y est bien un théorème de K[66].

32.2. Si l'on commence avec un cadre modal F = (E, R), on construit une algèbre modale
F^+ = (P(E), ↔, ≈, □, □, $□_R$) où (P(E), ↔, ≈, □, □) est l'algèbre de Boole des parties de E, et où □ est déterminée par :

$□_R$X = {x □ E, ∀ y(xRy □ y □ X)}= XdR .

Si l'on part d'une algèbre modale U = (A, □,⁄, □, ⊥, □), on considère l'ensemble E_U des atomes de U, c'est-à-dire

E_U = {x □ A ; □ (x=⊥) □ ∀ y [(y < x) □ y = ⊥]},

et, sur cet ensemble E_U, on détermine une relation binaire d'accessibilité R_U par :

xR_Uy € ∀ z □ A [x ≤□z □ y ≤ z].

Le cadre modal (E_U, R_U) ainsi construit est noté $U_\_$.

On démontre que :

si U est finie, alors U = $(U_\_)^+$.

32.3. Commençant avec un cadre modal F = (E, R), on peut donc construire l'algèbre modale F^+ = (P(E), ↔, ≈, □, □, $□_R$), mais on peut aussi considérer le cadre modal noté F^ = (P(E), R^) avec

XR^Y € ∀ Z [X ∏ $□_R$Z □ Y ∏ Z].

---

66 voir une preuve dans Chagrov et Zakharyaschev, p.84.

Or X ∏ $\square_R$Z équivaut à X ∏ ZdR, soit à XbR ∏ Z, donc XR^Y signifie que ∀ Z [XbR ∏ Z □ Y ∏ Z], et donc

XR^Y € Y ∏ XbR,

ou encore :

XR^Y € [Y □ $\square_{Rop}$X].

Ce nouveau cadre modal F^ est une extension aux parties du cadre de départ F. En effet,

{x}R^{y} € y □ $\square_{Rop}${x}€ y □ R(x) € xRy.

Naturellement, à partir de F^ = (P(E), R^) on peut recommencer la même construction, c'est-à-dire considérer F^+ et F^^, etc. Autrement dit on considère sur PP(E) les augmentations et diminutions relatives à R^, soit les opérateurs bR^ et dR^.

Mais laissons ceci pour l'instant. Ce sera à reprendre en relation avec les extensions de topologies aux parties abordées en 24, et avec la question de la dualité des régimes et des qualifications. Notons néanmoins dès maintenant deux points comme essentiels :

- la condition "X ∏ $\square_R$Z" n'est pas sans rappeler la formulation [y ∅ x] ∏ int [y ∅ x] rencontrée en 11.2. à propos de l'axiome de passage. On la retrouvera aussi dans la question des espaces de proximité.

- les opérateurs ψ et π, ou bien les opérateurs b et d, joueront le rôle cruciale dans la procédure d'extension, et par suite sont la ressource propre de la dualité.

Cependant les bonnes formulations unifiées de ces constructions d'extensions nécessitent la détermination préalable (puis la considération) des morphismes (de systèmes multimodaux, de régimes). Nous allons faire maintenant un pas dans cette direction.

33. MORPHISMES ET PERCEPTS DES ENSEMBLES EMPIRIQUES GAUCHES

33.1. Reprenons la définition des ensembles empiriques et de leurs morphismes des numéros 13 et 21. On se donne donc un ensemble fixe I muni d'une topologie, dont l'ensemble des ouverts est noté Ω = Ω(I) ; un ensemble empirique observé par I, ou un Ω-ensemble, est la donnée d'un ensemble X et d'une fonction V : X^2 ∅ Ω, telle que, en notant $V_{x,x'}$ ou $[x = x']_V$ ou [x $_X$= x'] ou simplement [x = x'] la valeur de V en (x,x'), et en écrivant "x =¡ x'" pour "i □ $V_{x,x'}$", soit "i □ [x = x']", on ait :

s1- [x = x'] = [x' = x], soit : x =¡ x' □ x' =¡ x ;
s2- [x = x']↔[x' = x"] ∏ [x = x"], soit : x =¡ x' □ x' =¡ x" □ x =¡ x".

Un ensemble empirique gauche (ou non-nécessairement-symétrique) ou Ω-ensemble gauche[67] est une donnée d'un ensemble X et d'une fonction V : X^2 ∅ Ω, telle que, avec les mêmes notations, on ait :

g1- [x = x'] ∏ [x = x], soit : x =¡ x' □ x =¡ x ;
g2- [x = x'] ∏ [x' = x'], soit : x =¡ x' □ x' =¡ x' ;
g3- [x = x']↔[x' = x"] ∏ [x = x"], soit : x =¡ x' □ x' =¡ x" □ x =¡ x".

Pour éviter des confusions et être plus près des notations pour les régimes, nous préfèrerons noter [x∅ x'] pour [x = x'], et "x ∅ ¡ x' " pour "x =¡ x' ". Si nous voulons préciser dans quel X nous sommes nous écrirons $V_{x∅x'}$ ou $[x∅ x']_V$ ou [x$_X$∅ x'] pour [x∅ x'], et "x $_X$∅ ¡ x' " pour "x∅ ¡ x' ". Les axiomes s'écrivent alors :

g1- [x ∅ x'] ∏ [x ∅x], soit : x ∅¡ x' □ x ∅¡ x ;
g2- [x ∅x'] ∏ [x' ∅x'], soit : x ∅¡ x' □ x' ∅¡ x' ;
g3- [x ∅ x']↔[x' ∅ x"] ∏ [x ∅x"], soit : x ∅¡ x' □ x' ∅¡ x" □ x ∅¡ x".

On remarque d'abord qu'un Ω-ensemble est bien un Ω-ensemble gauche particulier, à savoir une Ω-ensemble gauche qui de plus est symétrique (s1). En effet, avec s1 et s2 on a bien g3 (=s2), et aussi g1 et g2. En effet si on a x =¡ x', alors on a x' =¡ x, d'après s1, et alors, par s2, de x =¡ x' et x' =¡ x on tire x =¡ x. Soit g1. Et de mêmeg2.

On remarque aussi que, en présence de g1 et g2, l'axiome g3 peut être remplacé par :

g'3- [x ∅ x']↔[x' ∅ x"] = [x ∅x"],

ce qui signifie aussi que, pour tout i, la relation binaire ∅¡ sur X est idempotente :

---

[67] voir F. Borceux et R. Cruciani, *Skew Ω-sets coincide with Ω-posets*, Cahiers Top. Géo. Diff. Cat. XXXIX-3 (1998), pp. 205- 220. Dans cet article, comme jadis pour les Ω-ensembles, le travail est fait avec Ω un "local" quelconque non nécessairement de la forme Ω(I) (local des ouvert d'un espace I). Nous travaillerons ici dans le seul cas des Ω(I), nous limitant même parfois au cas "discret" des ensembles de parties P(I). Les extensions aux locales sont ensuite assez standards.

g"3- $(\emptyset_i)\circ(\emptyset_i) = (\emptyset_i)$.

Enfin, observons que si cette relation binaire idempotente $\emptyset_i$ est scindable, au sens du numéro 21, alors on a, à partir de $x \emptyset_i x'$, que $x \emptyset_i x$ (d'après g1) et aussi $x' \emptyset_i x'$ (d'après g2) et donc, avec la condition 3- de scindabilité du numéro 21.3, on a $x \emptyset_i x'$.
Autrement dit :
les Ω-ensembles sont exactement les Ω-ensembles gauches "scindables", i.e. tels que pour tout i la relation binaire idempotente $\emptyset_i$ soit scindable.

33.2. Soit A et B deux Ω-ensembles gauches ; on note donc ${}_A\emptyset_i$ et ${}_B\emptyset_i$ les relations d'assimilations de A et de B. La donnée d'un morphisme f de A vers B est la donnée pour tout a □ A et b □ B, de deux éléments notés $[a \emptyset b]_{f+}$ (ou $[a\ {}_{f+}\emptyset\ b]$) et $[b \emptyset a]_{f-}$ (ou $[b\ {}_{f-}\emptyset\ a]$) de Ω(I), tels que, en notant $a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b$ pour i □ $[a \emptyset b]_{f+}$ et $b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a$ pour i □ $[b \emptyset a]_{f-}$, on ait[68] :

m1 - $\approx_a [a'\ {}_A\emptyset\ a] \leftrightarrow [a\ {}_{f+}\emptyset\ b] = [a'\ {}_{f+}\emptyset\ b]$, soit
$\exists a\, [\, a'\ {}_A\emptyset_i\ a$ □ $a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b\,]$ € $a'\ {}_{f+}\emptyset_i\ b$,

m2 - $\approx_a [b\ {}_{f-}\emptyset\ a] \leftrightarrow [a\ {}_A\emptyset\ a'] = [b\ {}_{f-}\emptyset\ a']$, soit
$\exists a\, [\, b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a$ □ $a\ {}_A\emptyset_i\ a'\,]$ € $b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a'$,

m3 - $\approx_b [a_{f+}\emptyset\ b] \leftrightarrow [b_B\emptyset\ b'] = [a_{f+}\emptyset\ b']$, soit
$\exists b\, [\, a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b$ □ $b\ {}_B\emptyset_i\ b'\,]$ € $a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b'$,

m4 - $\approx_b [b'_B\emptyset\ b] \leftrightarrow [b\ {}_{f-}\emptyset\ a] = [b'\ {}_{f-}\emptyset\ a]$, s soit
$\exists b\, [\, b'\ {}_B\emptyset_i\ b$ □ $b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a\,]$ € $b'\ {}_{f-}\emptyset_i\ a$,

m5 - $[b\ {}_{f-}\emptyset\ a] \leftrightarrow [a_{f+}\emptyset\ b']$ ∏ $[b_B\emptyset\ b']$, soit
$b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a$ □ $a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b'$ □ $b\ {}_B\emptyset_i\ b'$,

m6 - $[a\ {}_A\emptyset\ a']$ ∏ $\approx_b [a_{f+}\emptyset\ b] \leftrightarrow [b\ {}_{f-}\emptyset\ a']$, soit
$a\ {}_A\emptyset_i\ a'$ □ $\exists b\, [\, a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b$ □ $b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a'\,]$.

Autrement dit, si l'on note

morph$_i$(f) = {$\exists a\, [\, a'\ {}_A\emptyset_i\ a$ □ $a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b\,]$ € $a'\ {}_{f+}\emptyset_i\ b$}
□{$\exists a\, [\, b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a$ □ $a\ {}_A\emptyset_i\ a'\,]$ € $b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a'$}
□{$\exists b\, [\, a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b$ □ $b\ {}_B\emptyset_i\ b'\,]$ € $a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b'$}
□{$\exists b\, [\, b'\ {}_B\emptyset_i\ b$ □ $b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a\,]$ € $b'\ {}_{f-}\emptyset_i\ a$}
□{$b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a$ □ $a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b'$ □ $b\ {}_B\emptyset_i\ b'$}
□{$a\ {}_A\emptyset_i\ a'$ □ $\exists b\, [\, a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b$ □ $b\ {}_{f-}\emptyset_i\ a'\,]$},

[68] nous reprenons donc ici les conditions données par Borceux et Cruciani, avec d'autres notations.

cette formule exprime que f est un morphisme pour l'"individu observateur" i, ou que i "voit f comme un morphisme". Ainsi, $\mathrm{morph}_i(f)$ se lit :" si, pour i, a' est assimilable à a et si "f(a)" est assimilable à b, alors "f(a')" est assimilable à b ; si, pour i, b est assimilable à "f(a)" et a à a', alors b est assimilable à "f(a')", etc. ...". On a donc que f est est un morphisme si et seulement si :

1° - tout i voit f comme un morphisme, c'est-à-dire si : $\forall i$ □ I $\mathrm{morph}_i(f)$,
2° - $\forall$ a □ A $\forall$ b □ B {i □ I ; a $_{f+}\varnothing_i$ b}□ Ω(I), {i □ I ; b $_{f-}\varnothing_i$ a}□ Ω(I).

On vérifie alors que l'on a :

1. $\approx_b [a_{f+}\varnothing\, b] = [a\,_A\varnothing\, a] = \approx_b [b\,_{f-}\varnothing\, a]$,
2. $[a_{f+}\varnothing\, b] \ \prod\ [b_B\varnothing\, b]$,
3. $[b\,_{f-}\varnothing\, a] \ \prod\ [b_B\varnothing\, b]$,
4. $\approx_a [a\,_A\varnothing\, a] \ \prod\ \approx_b [b_B\varnothing\, b]$.

et aussi, si f et f' sont deux morphismes de A vers B :

5. $[a_{f+}\varnothing\, b] \ \prod\ [a_{f'+}\varnothing\, b]$ € $[b\,_{f'-}\varnothing\, a] \ \prod\ [b\,_{f-}\varnothing\, a]$.

Par suite on a :

f = f' si et seulement si $[a_{f+}\varnothing\, b] \ \prod\ [a_{f'+}\varnothing\, b]$ et $[b\,_{f-}\varnothing\, a] \ \prod\ [b\,_{f'-}\varnothing\, a]$.

Là aussi, comme pour la définition des morphismes, on peut penser "individu (observateur) par individu", en définissant deux régimes d'assimilations par les "individus" éléments de I sur l'ensemble Hom(A,B) des morphismes de A vers B, dont les assimilations sont notées $_+\varnothing$ ετ $_-\varnothing$:

$$f\ _+\varnothing_i\ f' \text{ € } \forall a \forall b\ (a_{f+}\varnothing_i\, b \ \square\ a_{f'+}\varnothing_i\, b),$$
$$f\ _-\varnothing_i\ f' \text{ € } \forall b \forall a\ (b\,_{f-}\varnothing_i\, a \ \square\ b\,_{f'-}\varnothing_i\, a).$$

on définit alors

$$\text{égal}_i(f,f') = (f\ _+\varnothing_i\ f')\ \square\ (f\ _-\varnothing\ _i\ f'),$$

ce qui exprime que, pour i, f égale f', que i "voit" f et f' égaux. On a donc que f = f' si et seulement si tout i voit que f égale f', c'est-à-dire si : $\forall i$ $\text{égal}_i(f,f')$.

Si f est un morphisme de A vers B et g un morphisme de B vers C, on détermine bien un morphisme noté g∘f de A vers C, appelé le composé de f suivi de g, en posant :

$$[a_{(g\circ f)+}\varnothing\, c] = \approx_b [a_{f+}\varnothing\, b] \leftrightarrow [b_{g+}\varnothing\, c],$$
$$[c_{(g\circ f)-}\varnothing\, a] = \approx_b [c_{g-}\varnothing\, b] \leftrightarrow [b_{f-}\varnothing\, a].$$

Il est montré par Borceux et Cruciani que si on se limite à des ensembles empiriques (symétriques) les morphismes et leurs compositions au sens des ensembles empiriques (voir en 21.5) coincident avec les morphismes et leurs compositions quand on les considère comme ensembles empiriques gauches (i.e. suivant les définitions ci-dessus). De la sorte le nouveau calcul étend convenablement l'ancien.

33.3. Soit A et B deux ensembles empiriques gauches relatif à I. Notons $a(i) = {}_A\varnothing_i$ et $b(i) = {}_B\varnothing_i$ les relations d'assimilations de A et de B, soit :

$$a(i) = \{(a,a') \,;\, a\,{}_A\varnothing_i\, a'\},$$
$$b(i) = \{(b,b') \,;\, b\,{}_B\varnothing_i b'\} \,;$$

donc a(i) est une relation binaire sur A, b(i) une relation binaire sur B.

Posons ensuite dans les définitions ci-dessus :

$$f^+(i) =\{(a,b) \,;\, a \;{}_{f^+}\varnothing_i\, b\},$$
$$f^-(i) = \{(b,a) \,;\, b \;{}_{f^-}\varnothing_i\, a\};$$

donc $f^+(i)$ est une relation binaire de A vers B, et $f^+(i)$ une relation binaire de B vers A.

Avec ces notations, les axiomes d'ensembles empiriques gauches pour A et B, et de morphisme pour f s'expriment ainsi :

- D'abord, on n'oublie pas les conditions préalables qui "expriment la stabilité" à savoir que, pour tous a, a', b,b' :

st : $[a\,{}_A\varnothing\, a'] = \{i \,;\, (a,a') \square\, a(i)\} \square\; \Omega(I)$, st : $[b\,{}_B\varnothing\, b'] = \{i \,;\, (b,b') \square\, b(i)\} \square\; \Omega(I)$,

stm : $[a \;{}_{f^+}\varnothing\, b] = \{i \,;\, (a,b) \square\, f^+(i)\} \square\; \Omega(I)$, et $[b \;{}_{f^-}\varnothing\, a] = \{i \,;\, (b,a) \square\, f^-(i)\} \square\; \Omega(I)$.

- Puis, on demande :

g'1 - $(x, x') \square\, a(i) \;\square\; (x, x) \square\, a(i)$, g'1 - $(x, x') \square\, b(i) \;\square\; (x, x) \square\, b(i)$,
g'2 - $(x, x') \square\, a(i) \;\square\; (x', x') \square\, a(i)$, g'2 - $(x, x') \square\, b(i) \;\square\; (x', x') \square\, b(i)$,
g'3 - $a(i)\circ a(i) = a(i)$. g'3 - $b(i)\circ a(i) = b(i)$.

m'1- $f^+(i)\circ a(i) = f^+(i)$, m'2- $a(i)\circ f^-(i) = f^-(i)$,

m'3- $b(i)\circ f^+(i) = f^+(i)$, m'4- $f^-(i)\circ b(i) = f^-(i)$,

m'5- $f^+(i)\circ f^-(i) \prod b(i)$, m'6- $a(i) \prod f^-(i)\circ f^+(i)$.

Remarquons qu'alors $f^+(i)$ et $f^-(i)$ sont deux relations binaires quasi-inverses c'est-à-dire que :

$$f^+(i)\circ f^-(i)\circ f^+(i) = f^+(i) \quad \text{et} \quad f^-(i)\circ f^+(i)\circ f^-(i) = f^-(i).$$

En effet $f^-(i) = a(i)\circ f^-(i) \prod (f^-(i)\circ f^+(i))\circ f^-(i) = f^-(i)\circ(f^+(i)\circ f^-(i)) \prod f^-(i)\circ b(i) = f^-(i)$, et de même pour l'autre égalité.

Par suite on a aussi que ($f^-(i)\circ f^+(i)$) et ($f^+(i)\circ f^-(i)$) sont deux relations idempotentes sur A et sur B respectivement.

Dans le contexte plus général des régimes, ce sont ces formulations (g' et m') qui auront notre préférence. En particulier, on verra alors que nos réflexions du numéro 21 s'accorderont bien avec ce qui se passe ici pour les Ω-ensembles gauches.

33.4. Soit A un Ω(I)-ensemble gauche, et e un élément de A. Alors si on considère, pour chaque i, les deux parties de A

$$P^+(i) = \{a \,;\, e \;{}_A\varnothing_i\; a\},\ P^-(i) = \{a \,;\, a \;{}_A\varnothing_i\; e\} \,;$$

on a les propriétés suivantes :

psi0 - $\forall$ a □ A {i □ I ; a □ $P^+(i)$} □ Ω(I), {i □ I ; a □ $P^-(i)$} □ Ω(I),

psi1 - a' □ $P^+(i)$ € ∃ a (a □ $P^+(i)$ et a $_A\varnothing_i$ a'),

psi2 - a' □ $P^-(i)$ € ∃ a (a' $_A\varnothing_i$ a et a □ $P^-(i)$),

psi3 - a' □ $P^-(i)$ et a □ $P^+(i)$ □ a' $_A\varnothing_i$ a,

psi4 - {i □ I ; $P^+(i)$ π □} = {i □ I ; $P^+(i)$ ↔ $P^-(i)$ π □} = {i □ I ; $P^-(i)$ π □}.

On dira que psi(e) = $(P^+(i), P^-(i))_{i□I}$ est le percept symétrique indivisible (psi) ou l'unité perceptive symétrique ou l'individu symétrique déterminé par l'élément e.
Et on appellera *percept symétrique indivisible (psi)* ou *unité perceptive symétrique* ou *individu symétrique*[69] une donnée quelconque de la forme P =$(P^+(i), P^-(i))_{i□I}$ vérifiant les conditions psi0 à psi4. Si jamais il existe un élément e tel que P = psi(e), on dira que P est représentable et que e est un représentant de P. On appelle *support* de P l'ensemble

supp(P) = {i □ I ; $P^+(i)$ π □} = {i □ I ; $P^+(i)$ ↔ $P^-(i)$ π □} = {i □ I ; $P^-(i)$ π □}.

On notera que supp(P) □ Ω(I), puisque supp(P) = $\approx_{a □ A}${i □ I ; a □ $P^+(i)$}.

Si i □ supp(P), on dira que "i voit P" ou que "i perçoit P". Comme supp(P) □ Ω(I), la perception de P est "stable".

---

[69] nous préférons ici le terme "individu" au terme "singleton" employé par Borceux et Cruciani. Toutefois on ne confondra pas ces individus ou percepts indivisibles avec les éléments de i, qu'il nous arrive de nommer des "individu observateurs" ; en fait il vaudrait mieux désigner ces derniers comme des éléments observateurs, puis traiter de l'idée d'individus observateurs suivant le même principe que les percepts indivisibles, à savoir comme percepts indivisibles vis-à-vis d'un deuxième étage faisant régime d'assimilation (pensé comme observation) sur I. On y reviendra. De plus nous ajoutons le qualificatif "symétrique" en vertu des remarques qui terminent le numéro 4 et du numéro 6. Dans le cas général des régimes quelconques, il nous faudra déterminer ce que sont les percepts indivisibles (pi) quelconques.

Fixons un i $\square$ I, et considérons dans P la donnée du couple (P^+(i), P^-(i)) que nous notons alors simplement - i étant sous-entendu - (P^+, P^-). On a donc :

i-psi1 - $a' \square P^+ \text{€} \exists\, a\, (a \square P^+$ et $a \varnothing_i a')$,
i-psi2 - $a' \square P^- \text{€} \exists\, a\, (a' \varnothing_i a$ et $a \square P^-)$,
i-psi3 - $a' \square P^-$ et $a \square P^+ \square\ a'\ {}_A\varnothing_i\ a$,
i-psi4 - $P^+ \pi \square \text{€} P^+ \leftrightarrow P^- \pi \square \text{€}\ P^- \pi \square$.

Une donnée (P^+, P^-) vérifiant ces conditions i-psi1 à i-psi4 sera appelée un *i-percept symétrique indivisible (i-psi)*. Un i-psi est donc ou bien de la forme ($\square$, $\square$), ou bien de la forme (P^+, P^-) avec :

$$C := P^+ \leftrightarrow P^- \pi\ \square.$$

Dans ce cas, de i-psi1 et g1, de i-psi2 et g2 ; avec Ai := {a ; $a \varnothing_i a$} on tire :

$$P^+ \prod \text{ Ai et } P^- \prod \text{Ai}.$$

Sur Ai, la relation binaire $\varnothing_i$ est transitive et réflexive, et donc la relation $\sim_i$ définie par :

$$a \sim_i a' \text{ € } (a \varnothing_i a' \ \&\ a \varnothing_i a'),$$

est une relation d'équivalence.

Ensuite, si a et a' sont dans C, on a $a \varnothing_i a'$ et $a \varnothing_i a'$, d'après i-psi3 ; et réciproquement, d'après i-psi1 et i-psi2, si $a \varnothing_i a'$ et $a' \varnothing_i a$ et si $a \square C$, alors $a' \square C$. Autrement dit, C est une classe d'équivalence modulo $\sim_i$.

Puis, connaissant la classe d'équivalence C en peut retrouver P^+ et P^-. En effet si on choisit un c $\square$ C, alors pour tout a tel que $c \varnothing_i a$ on a $a \square P^+$, d'après i-psi1, et, réciproquement, si $a \square P^+$, alors $c \varnothing_i a$, d'après i-psi3. De même pour tout a tel que $a \varnothing_i c$ on a $a \square P^-$, d'après i-psi2, et, réciproquement, si $a \square P^-$, alors $a \varnothing_i c$, d'après i-psi3. Ainsi on a :

$$P^+ = \{a \square A \,;\ c \varnothing_i a\} = \{a \square A \,;\ \exists\, c \square C\, (c \varnothing_i a)\},$$
$$P^- = \{a \square A \,;\ a \varnothing_i c\} = \{a \square A \,;\ \exists\, c \square C\, (a \varnothing_i c)\}.$$

Enfin, supposons donnée une classe d'équivalence C quelconque, et déterminons P^+ et P^- par les formules ci-dessus. On vérifie alors bien, avec g3, les axiomes i-psi1 à i-psi4. Autrement dit, la donnée d'un i-psi (P^+, P^-) ≠ ($\square$, $\square$) est absolument équivalente à la donnée d'une classe d'équivalence C modulo $\sim_i$. De plus si on prend C = $\square$, alors la définition ci-dessus donne (P^+, P^-) = ($\square$, $\square$).

On peut donc reformuler la définition des percepts symétriques indivisibles ainsi : un psi P de A est exactement déterminé par la donnée unique pour tout i □ I d'une partie C(i) de A telle que :

i-psi - C(i) est soit □, soit une classe d'équivalence modulo $\sim_i$,

psi0'- ∀ a □ A {i □ I ; ∃ c □ C(i) (c $\varnothing_i$ a) } □ Ω(I),
{i □ I ; ∃ c □ C(i) (a $\varnothing_i$ c) } □ Ω(I).

Le support de P est alors supp(P) = {i □ I ; C(i) π □}.

Cette formulation, comme celle en terme de représentants que nous abordons plus loin, vise à faire comprendre d'où vient l'idée de la définition initialement proposée, et à en donner éventuellement une possibilité de travail "à la main" ; mais c'est bien la définition initiale qui, quoi que plus abstraite, est la bonne, car c'est elle qui permet de voir les percepts comme morphismes (voir en 5), et qui est effectivement "structurelle", éventuellement étendable à des cas plus généraux que les ensembles empiriques gauches.

Nous pouvons alors revenir sur la question des psi représentables par un élément e □ A. La donnée (P^+(i) = {a ; e $_A\varnothing_i$ a}, P^-(i) = {a ; a $_A\varnothing_i$ e})$_{i□I}$ = psi(e) se détermine par la donnée des classes (e modulo $\sim_i$) pour chaque i tel que e □ Ai, et de □ dans le cas des i où e □ A/Ai ; le support de psi(e) est {i □ I ; e □ Ai}.
Le psi P déterminé par les C(i) est donc représentable par e si et seulement si : ∀ i □ I ((e □ Ai □ C(i) = □) □ (e □ Ai □ e □ C(i))). On dira donc aussi que e représente P pour i si ((e □ Ai □ C(i) = □) □ (e □ Ai □ e □ C(i))), soit aussi : (e □ Ai □ e □ C(i))⁄(e □ Ai □ C(i) = □), ou encore : (C(i) π □ □ e □ C(i))⁄(C(i) = □ □ e □ Ai). On pose donc

R(i) = Rep_i(P) = C(i) si C(i) π □
A/Ai si C(i) = □

On peut donc pour tout psi P introduire l'ensemble de ses représentants

Rep(P) = $\leftrightarrow_{i □ I}$ {e ; (e □ Ai □ C(i) = □) □ (e □ Ai □ e □ C(i))},
= $\leftrightarrow_{i □ I}$ Rep_i(P).

Et P est représentable si et seulement si Rep(P) est non-vide.

On peut donc reformuler la détermination d'un psi P par la donnée des R(i). La donnée d'un psi P équivaut à la donnée des ensembles R(i) tels que :

i-rpsi- R(i) est soit A/Ai, soit une classe d'équivalence modulo l'équivalence $\sim_i$ sur Ai ,

rpsi0- ∀ a □ A {i □ I ; ∃ c □ R(i) (c $\varnothing_i$ a) } □ Ω(I),
{i □ I ; ∃ c □ R(i) (a $\varnothing_i$ c) } □ Ω(I).

En effet si ∃ c □ R(i) (c $\varnothing_i$ a) ou si ∃ c □ R(i) (a $\varnothing_i$ c), alors on a c $\varnothing_i$ c (g1 et g2), et c □ R(i) , donc R(i) π A/Ai, et R(i) = C(i).

Remarquons enfin que la notion de psi est effectivement en un sens "symétrique". Tout d'abord le caractère "gauche" des ensembles empiriques gauches n'est que partiel. En effet, à cause des axiomes g1 et g2, on a par exemple:

$$\forall i\ \forall a\ [\exists a'\ (a'\ {}_A\varnothing_i\ a) \text{€}\ \exists a''\ (a\ {}_A\varnothing_i\ a'')],$$

ce qui entretient encore une certaine symétrie faible des ressources du calcul.

De plus, si on équipe A de la symétrisée de ${}_A\varnothing$, notée[70] ${}_A\times$, et définie par :

$$a\ {}_A\times_i\ a'\ \text{€}\ a'\ {}_A\varnothing_i\ a\ \&\ a\ {}_A\varnothing_i\ a',$$

on note A_{sym} l'ensemble empirique (symétrique) ainsi défini, appelé donc le symétrisé de A. On note que $A_{sym}i$= Ai, et que $\sim_{sym\ i} = \sim_i$. Et on voit qu'un psi de A_{sym} est la donnée pour tout i □ I d'une partie C(i) de A telle que :

i-psi -sym C(i) est soit □, soit une classe d'équivalence modulo $\sim_i$,

psi0'-sym ∀ a □ A {i □ I ; ∃ c □ C(i) (c $\times_i$ a) } □ Ω(I),
{i □ I ; ∃ c □ C(i) (a $\times_i$ c) } □ Ω(I) ;

et cette dermière condition s'exprime encore par :

psi0"-sym ∀ a □ A {i □ I ; a □ C(i)} □ Ω(I).

Comme en fait , étant donné un psi de A, on a :
{i □ I ; ∃ c □ C(i) (c $\varnothing_i$ a) }↔ {i □ I ; ∃ c □ C(i) (a $\varnothing_i$ c) }
= {i □ I ; ∃ c □ C(i) (c $\times_i$ a) } = {i □ I ; a □ C(i)},
la condition psi0'-sym ou psym0"-sym est impliquée par psi0', puisque dans Ω(I) l'intersection de deux ouverts est un ouvert. Autrement dit tout psi de A est un psi de A_{sym}, et est donc "symétrique".

La non-symétrie de A interviendrait néanmoins peut-être encore, mais seulement pour retenir comme psi de A, parmi les psi de A_{sym}, ceux pour lesquels on n'aurait pas la condition psi0', c'est-à-dire ceux pour lesquels on aurait, pour tout a, {i □ I ; a □ C(i)} □

[70] on préfère distinguer $\times_i$ entre et $\sim_i$, la première étant sur A, et la seconde étant la limitation de la première à son domaine Ai ; donc $\sim_i$ est une relation d'équivalence (sur Ai), et $\times_i$ n'est pas une relation d'équivalence sur A, mais induit l'équivalence $\sim_i$ sur Ai. Si besoin étaient, on distinguerait aussi ces deux objets du troisième qui est la relation d'équivalence $♠_i$ sur A dont les classes sont A/Ai et les classes de $\sim_i$. Par exemple un i-psi défini par l'ensemble R(i) de ses représentants (pour i) est donc donné par une classe R(i) de $♠_i$.

Ω(I) sans avoir cependant, pour tout a, {i □ I ; ∃ c □ C(i) (c $\emptyset_i$ a)} □ Ω(I), ou sans avoir, pour tout a, {i □ I ; ∃ c □ C(i) (a $\emptyset_i$ c)} □ Ω(I).

Si un psi de A représentable comme psi(c) pour un c de A, la condition psi0' à lieu, puisqu'elle équivaut à ce que pour tout a on ait [c ∅ a] et [a ∅ c] éléments de Ω(I). Donc les psi représentables de A sont les même que ceux de A_{sym}.

En fait, tout psi de A_{sym} est un psi de A, c'est-à-dire que si {i □ I ; a □ C(i)} □ Ω(I) alors {i □ I ; ∃ c □ C(i) (c $\emptyset_i$ a)} □ Ω(I) et {i □ I ; ∃ c □ C(i) (a $\emptyset_i$ c)} □ Ω(I). En effet, voyons-le par exemple pour le premier. On pose U(c) = {i □ I ; c □ C(i)}□ Ω(I). Alors c □ C(i) équivaut à i □ U(c), et

{i □ I ; ∃ c □ C(i) (c $\emptyset_i$ a)} = {i □ I ; ∃ c (i □ U(c) □ (c $\emptyset_i$ a)} = $\approx_c$ (U(c) ↔ [c ∅ a]).

Il y a donc identité entre les psi de A et ceux de A_{sym}, c'est pourquoi nous les appelons psi. Si P est un psi de A, on le note P_{sym} quand on veut le considérer comme psi de A_{sym}.

33.5. Si U □ Ω(I), on note I[U] le Ω-ensemble (symétrique) comportant un seul élément noté * et où l'on a * $_{I[U]}\emptyset_i$ * si et seulement si i □ U. On vérifie alors que :

la donnée d'un psi P équivaut à celle d'un morphisme p : I[supp(P)] ∅ A, avec

a □ P^+(i) ∈ [* $_{p^+}\emptyset_i$ a] et a □ P^-(i) ∈ [a $_{p^-}\emptyset_i$ *].

Le premier avantage de cette présentation plus conceptuelle est de rendre immédiat la "fonctorialité" du calcul des psi, c'est-à-dire le fait que si on note Psi(A) l'ensemble des psi de A, et Psi(B) celui de B, et si f : A ∅ B est un morphisme, alors f détermine une application Psi(f) : Psi(A) ∅ Psi(B), en posant :

Psi(f) : Psi(A) ∅ Psi(B) : p l∅ Psi(f)(p) = f∘p,

et Psi est ainsi un foncteur des Ω-ensembles dans les ensembles, c'est-à-dire que :

$\mathrm{Psi}(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Psi}(A)}$ et Psi(g∘f) = Psi(g)∘Psi(f).

On a donc :

[* $_{Psi(f)(p)^+}\emptyset$ b] = $\approx_a$[* $_{p^+}\emptyset$ a] ↔ [a $_{f^+}\emptyset$ b],
[b $_{Psi(f)(p)^-}\emptyset$ *] = $\approx_b$ [b $_{f^-}\emptyset$ a] ↔ [a $_{p^-}\emptyset$ *].

Si on note P le psi déterminé de A par p, et f(P) le psi de B déterminé par psi(f)(p), on a :

b □ f(P)$^+$(i) ∈ ∃a (a □ P^+(i) □ a $_{f^+}\emptyset_i$ b),

$$b \square f(P)^{-}(i) \;\text{€}\; \exists a\,(b_{f\text{-}}\varnothing_i\, a \;\square\; a \square P^{-}(i)).$$

Si ($P^{+}(i)$, $P^{-}(i)$) est déterminé par une classe C(i) modulo $\sim_i$ dans A ou par C(i) = $\square$, alors :

$$f(P)^{+}(i) \;=\{b \square B \,;\, \exists c\,(c \square\; C(i) \square c\;{}_{f+}\varnothing_i\, b)\},$$

$$f(P)^{-}(i)) \;=\{b \square B \,;\, \exists c\,(b_{f\text{-}}\varnothing_i\, c \;\square\; c \square\; C(i))\},$$

et si l'on note f(C)(i) la classe modulo $\sim_i$ dans B (ou $\square$) qui détermine le couple ($f(P)^{+}(i)$, $f(P)^{-}(i)$), il vient :

$$f(C)(i) = \;\{b \square B \,;\, \exists c\,(c \square\; C(i) \square b_{f\text{-}}\varnothing_i\, c \;\square c\;{}_{f+}\varnothing_i\, b)\}.$$

Si C(i) = $\square$, alors f(C)(i) = $\square$. Et, réciproquement si f(C)(i) = $\square$, alors C(i) = $\square$: en effet si C(i) ≠ $\square$, et si c $\square$ C(i), alors, $c\varnothing_i c$, et, d'après l'axiome m6, f(C)(i) ≠ $\square$.

Ainsi f(C) se calcule "i par i", et pour chaque i, fait correspondre $\square$ à $\square$, et à chaque classe dans A modulo $\sim_i$ une classe dans B modulo $\sim_i$. La fonction ainsi définie pour chaque i est notée

$$\text{i-psi(f) : i-Psi(A)} \varnothing \text{ i-psi(B)},$$

et on obtient donc

$$\text{Psi(f)}(C(i))_{i \square I} \;= (\text{i-psi(f)}(C(i)))_{i \square I}\,.$$

Comme de plus on dispose de l'application psi_A = A ∅ Psi(A), qui à e associe $psi_A(e)$ = psi(e) donné par :

$$psi(e)^{+}(i) = \{a\,;\, e\;{}_{A}\varnothing_i\;\, a\},\; psi(e)^{-}(i) = \;\{a\,;\, a\;{}_{A}\varnothing_i\;\, e\},$$

on peut aussi considérer le composé

$${}^{psi}f = Psi(f)\circ psi_A :\; A \;\varnothing\; Psi(B)\,;$$

alors pour tout a $\square$ A, ${}^{psi}f(a)$ est déterminé par la donnée pour chaque i tel que a $\square$ Ai de la classe dans B modulo $\sim_i$ brièvement notée ${}^{psi}f(a)(i)$ et déterminée par :

$${}^{psi}f(a)(i) = \;\{b \square B\,;\; b_{f\text{-}}\varnothing_i\, a \;\square\, a\;{}_{f+}\varnothing_i\, b\},$$

et par la donnée de ${}^{psi}f(a)(i)$ = $\square$ pour chaque i tel que a $\square$ A/Ai.

On a aussi :

$^{psi}f(a)^+(i) = \{b \square B \;;\; \exists a' \,(a \;\varnothing_i\; a' \square a'_{f+}\varnothing_i\, b)\} = \{b \square B \;;\; a_{f+}\varnothing_i\, b\},$

$^{psi}f(a)^-(i) = \{b \square B \;;\; \exists a' \,(\, b_{f-}\varnothing_i\, a' \square a' \varnothing_i\; a)\} = \{b \square B \;;\; b_{f-}\varnothing_i\, a\}.$

On prendra garde de ne pas confondre $^{psi}f(a)(i)$ comme classe, et les composantes $^{psi}f(a)^+(i)$ et $^{psi}f(a)^-(i)$ du même i-percept ; on note aussi encore $^{psi}f(a)$ le percept ainsi associé à a. Le lecteur, suivant les circonstances, saura de quoi l'on parle.

Notons bien qu'en général, f ne détermine pas une fonction de A dans B, mais seulement de A dans Psi(B), et de Psi(A) dans Psi(B).

33.6. Nous pouvons alors revenir à la question de la "symétrie" des psi et le rôle de la symétrisation. En effet on a un morphisme h : $A_{sym} \varnothing A$, défini par :

$$a'_{h+}\varnothing_i\, a \;\; € \;\; a'\varnothing_i\, a, \qquad \text{et} \qquad a_{h-}\varnothing_i\, a' \;\; € \;\; a \varnothing_i\, a'.$$

par suite, si P est un psi de A_{sym}, noté pour chaque i, $(P^+(i)_{sym}, P^-(i)_{sym})$, son image par h, h(P) est définie par :

$b \square h(P)^+(i) \;€\; \exists a\, (a \square P^+(i)_{sym} \square a \varnothing_i\, b) = P^+(i),$

$b \square h(P)^-(i) \;€\; \exists a\, (b \varnothing_i\, a \;\square\; a \square P^-(i)_{sym}) = P^-(i),$

les $P^+(i)$ et $P^-(i)$ finaux étant à entendre dans A. Les classes C(i) associée à P (dans A_{sym}) et à h(P) (dans A) sont les mêmes, $h(P)_{sym} = P$. Par conséquent, Psi(h) détermine une bijection entre $Psi(A_{sym})$ et Psi(A). Nous l'avons déjà vu au numéro 4.

Mais cela va plus loin. Non seulement tout psi vu comme morphisme p : I[supp(P)] $\varnothing$ A est en réalité à valeur dans A_{sym}, c'est-à-dire peut s'écrire de manière unique sous la forme $h \circ p_{sym}$, pour un morphisme p_{sym} : I[supp(P)] $\varnothing$ A, mais cette propriété tient uniquement au fait que notre "modèle de psi", I[supp(P)], est un Ω-ensemble symétrique. Précisément, si S est un Ω-ensemble symétrique et A un Ω-ensemble quelconque, alors[71] pour tout morphisme f: S $\varnothing$ A il existe un unique morphisme f_{sym}: S $\varnothing$ A_{sym} tel que $f = h \circ f_{sym}$. Ce f_{sym} est défini par

$$[a\; {}_{f_{sym}-}\!\varnothing\; s] = [a\; {}_{f-}\!\varnothing\; s] \leftrightarrow [s\; {}_{f+}\!\varnothing\; a] = [s\; {}_{f_{sym}+}\!\varnothing\; a].$$

33.7. On a, pour f: S $\varnothing$ A avec S symétrique :

$$a\; {}_{f_{sym}-}\!\varnothing_i\; s \;\; € \;\; a\; {}_{f-}\!\varnothing_i\; s \square s\; {}_{f+}\!\varnothing_i\; a,$$
$$s\; {}_{f_{sym}+}\!\varnothing_i\; a \;\; € \;\; a\; {}_{f-}\!\varnothing_i\; s \square s\; {}_{f+}\!\varnothing_i\; a,$$

ou bien

$$i \square [a\; {}_{f_{sym}-}\!\varnothing\; s] \;€\; a \;\square\; {}^{psi}f(s)(i) \;€\; i \square [s\; {}_{f_{sym}+}\!\varnothing\; a],$$

---

[71] voir Borceux et Cruciani.

de sorte que f_{sym} est déterminé par ${}^{psi}f$. Par suite le morphisme $f : S \varnothing A$ soi-même, déterminé comme $h \circ f_{sym}$, est déterminé par la fonction ${}^{psi}f : S \varnothing Psi(A)$.

Si nous considérons $f, g : A \varnothing B$ et si $f \circ h = g \circ h : A_{sym} \varnothing B$, alors $f = g$.

En effet $f = g$ si et seulement si $[a_{f}{+}\varnothing\, b] \prod [a_{g}{+}\varnothing\, b]$ et $[b\, _{f}{-}\varnothing\, a] \prod [b\, _{g}{-}\varnothing\, a]$, soit : $a_{f}{+}\varnothing_i\, b \;\square\; a_{g}{+}\varnothing_i\, b$, et $b\, _{f}{-}\varnothing_i\, a \;\square\; b\, _{g}{-}\varnothing_i\, a$, ce qu'il nous faut donc prouver sous l'hypothèse $f \circ h = g \circ h$ qui elle s'exprime :

$$a_{(f\circ h)}{+}\varnothing_i\, b \;\square\; a_{(g\circ h)}{+}\varnothing_i\, b, \text{ et } b_{(f\circ h)}{-}\varnothing_i\, a \;\square\; b_{(g\circ h)}{-}\varnothing_i\, a,$$

soit : - $\exists a' (a_{h}{+}\varnothing_i\, a' \;\square\; a'_{f}{+}\varnothing_i\, b) \;\square\; \exists a'' (a_{h}{+}\varnothing_i\, a'' \;\square\; a''_{g}{+}\varnothing_i\, b)$,

- $\exists a' (b_{f}{-}\varnothing_i\, a' \;\square\; a'_{h}{-}\varnothing_i\, a) \;\square\; \exists a'' (b_{g}{-}\varnothing_i\, a'' \;\square\; a''_{h}{-}\varnothing_i\, a)$,

ou encore :

1 - $\exists a' (a\, \varnothing_i\, a' \;\square\; a'_{f}{+}\varnothing_i\, b) \;\square\; \exists a'' (a\, \varnothing_i\, a'' \;\square\; a''_{g}{+}\varnothing_i\, b)$,

2 - $\exists a' (b_{f}{-}\varnothing_i\, a' \;\square\; a'\, \varnothing_i\, a) \;\square\; \exists a'' (b_{g}{-}\varnothing_i\, a'' \;\square\; a''\, \varnothing_i\, a)$.

Pour montrer par exemple que $a_{f}{+}\varnothing_i\, b \;\square\; a_{g}{+}\varnothing_i\, b$, de l'hypothèse $a_{f}{+}\varnothing_i\, b$ on déduit d'abord, par m1 pour f, que $\exists a' (a\, \varnothing_i\, a' \;\square\; a'_{f}{+}\varnothing_i\, b)$, puis, par l'hypothèse 1, on tire que $\exists a'' (a\, \varnothing_i\, a'' \;\square\; a''_{g}{+}\varnothing_i\, b)$, d'où, par m1 pour g, $a_{g}{+}\varnothing_i\, b$.

Pour $f : A \varnothing B$, puis $f \circ h_A : A_{sym} \varnothing B$, on a $(f \circ h_A)_{sym} : A_{sym} \varnothing B_{sym}$, tel que $f \circ h_A = h_B \circ (f \circ h_A)_{sym}$. On notera $f_{sym} := (f \circ h_A)_{sym}$. Donc on a :

$$f \circ h_A = h_B \circ f_{sym} .$$

Autrement dit, puisque

$$a_{(f\circ h_A)}{+}\varnothing_i\, b \;€\; a_{f}{+}\varnothing_i\, b, \quad \text{et} \quad b_{(f\circ h_A)}{-}\varnothing_i\, a \;€\; b_{f}{-}\varnothing_i\, a,$$

on a :

$f_{sym} : A_{sym} \varnothing B_{sym}$ est déterminé par :

$$a_{f_{sym}}{+}\varnothing_i\, b \;€\; a_{f}{+}\varnothing_i\, b \;\square\; b_{f}{-}\varnothing_i\, a,$$

$$b_{f_{sym}}{-}\varnothing_i\, a \;€\; b_{f}{-}\varnothing_i\, a \;\square\; a_{f}{+}\varnothing_i\, b.$$

On remarque donc que f est complètement déterminé par f_{sym}.

Mais alors nous pouvons voir que f est complètement déterminé par ${}^{psi}f_{sym}$, ou bien par $Psi(f_{sym})$, puisque f_{sym} à pour source un ensemble empirique symétrique, et est donc déterminé par ${}^{psi}f_{sym}$.et a fortiori par $Psi(f_{sym})$. Et enfin, puisque $f \circ h_A = h_B \circ f_{sym}$, on a $Psi(f) \circ Psi(h_A) = Psi(h_B) \circ Psi(f_{sym})$, et, les fonctions $Psi(h_A)$ et $Psi(h_B)$ étant bijectives, on a $Psi(f_{sym}) = Psi(h_B)^{-1} \circ Psi(f) \circ Psi(h_A)$, qui est donc déterminée par $Psi(f)$.

Ainsi f est déterminé par la fonction Psi(f).

On peut même dire que f est déterminé par ${}^{psi}f$.

Pour le voir il suffit de voir que Psi(f) est déterminé par ${}^{psi}f$, c'est-à-dire que si ${}^{psi}f = {}^{psi}g$, alors Psi(f) = Psi(g). En fait on a vu que Psi(f) se calcul sur les classes par :

$$f(C)(i) = \{b \square B \,;\, \exists c\ (c \square C(i) \square b_{f\text{-}}\varnothing_i\, c \ \square\, c_{\ f+}\varnothing_i\, b)\},$$

que ${}^{psi}f$ associe à chaque a le système de classes donné par :

$${}^{psi}f(a)(i) = \{b \square B \,;\ b_{f\text{-}}\varnothing_i\, a \ \square\, a_{\ f+}\varnothing_i\, b)\},$$

et donc on a :

$$\begin{aligned} f(C)(i) &= \{b \square B \,;\, \exists c\ (c \square C(i) \square b \square {}^{psi}f(c)(i)\} \\ &= \approx_{c \,\square\, C(i)} {}^{psi}f(c)(i) \\ &= {}^{psi}f(-)(i)(C(i)). \end{aligned}$$

33.8. Nous avons vu que Psi(A) et Psi(A_{sym}) ont les mêmes éléments. Toutefois, la différence entre A et A_{sym} va se retrouver dès que l'on va équipper Psi(A) d'une structure associée à celle de A (resp. Psi(A_{sym}) d'une structure associée à celle de A_{sym}). En général donc, pour tout A, on défini sur Psi(A) les assimilations $P \varnothing_i P'$ par :

$$P \varnothing_i P' \text{ € } \exists a\ (a \square P(i)^{+} \square\ a \square P'^{-}(i)).$$

On note que $P \varnothing_i P$ si et seulement si $C(i) \neq \square$. Si P et P'sont tels que $C(i) \neq \square$ et $C(i) \neq \square$, alors

$$P \varnothing_i P' \text{ € } \forall a \square C(i)\ \forall a' \square C'(i)\ (a \varnothing_i a').$$

Ainsi on voit que sur i-Psi(A)\{$\square$} la relation binaire $\varnothing_i$ est réflexive, transitive et antisymétrique, c'est-à-dire est une relation d'ordre.

Notons en particulier que si a A et si P est un psi de A, alors :

$$\begin{aligned} psi(a) \varnothing_i P &\text{ € } a \square P^{-}(i), \\ P \varnothing_i psi(a) &\text{ € } a \square P^{+}(i), \end{aligned}$$

et plus particulièrement encore on a :

$$psi(a) \varnothing_i psi(a') \text{ € } a \varnothing_i a'.$$

Ainsi les $\varnothing_i$ sur Psi(A) "prolongent bien les $\varnothing_i$ sur A.

On vérifie que Psi(A) muni des $\varnothing_i$ que nous venons de définir est bien encore un Ω-ensemble gauche ; pour le distinguer de l'ensemble Psi(A), nous le noterons Psi(A). Ainsi Psi(A) = Psi(A_{sym}), mais Psi(A) ≠ Psi(A_{sym}). En fait on aura $\mathsf{Psi}(A)_{sym}$ = Psi(A_{sym}).

Deux faits sont alors notables[72] :

- Un Ω-ensemble gauche de la forme Psi(A) est univoquement complet, c'est-à-dire que tout psi de Psi(A) est représentable de manière unique par un élément de Psi(A) : si $\underline{P}$ est un psi de Psi(A), alors $\underline{P}$ = psi(P) pour un psi P de A unique, qui est donné par :

$$a \,\square\, P^{+}(i) \text{ € } \exists Q\, (Q \,\square\, \underline{P}^{+}(i) \;\square\; a \,\square\, Q^{+}(i)),$$
$$a \,\square\, P^{-}(i) \text{ € } \exists Q\, (Q \,\square\, \underline{P}^{-}(i) \;\square\; a \,\square\, Q^{-}(i)).$$

- En réalité, A et Psi(A) sont isomorphes comme Ω-ensembles gauches, quoique très différents comme simples ensembles. Un isomorphisme α et son inverse ω sont fournis par :

$$a_{\alpha+}\varnothing_i\; P \text{ € } a \,\square\, P^{-}(i), \qquad P_{\alpha-}\varnothing_i\; a \text{ € } a \,\square\, P^{+}(i),$$

$$P_{\omega+}\varnothing_i\; a \text{ € } a \,\square\, P^{+}(i), \qquad a_{\omega-}\varnothing_i\; P \text{ € } a \,\square\, P^{-}(i).$$

Arrivé à ce stade, il ne peut y avoir d'inconvénients à adopter une notation allégée et plus intuitive, en considérant comme synonymes les écritures :

- a □ psi(a')$^{-}$(i) , a' □ psi(a)$^{+}$(i) , psi(a) $\varnothing_i$ psi(a'), ou encore : a $\varnothing_i$ a' ;
- a □ P^{-}(i), psi(a) $\varnothing_i$ P, $a_{\alpha+}\varnothing_i$ P, $a_{\omega-}\varnothing_i$ P, encore noté : a $\varnothing_i$ P ;
- a □ P^{+}(i), P $\varnothing_i$ psi(a), $P_{\alpha-}\varnothing_i$ a, $P_{\omega+}\varnothing_i$ a, encore noté : P $\varnothing_i$ a.

On peut donc penser à Psi(A) comme à une complétion "externe" de A qui, du point de vue intrinsèque des Ω-ensembles gauches ne modifie pas A, mais complétion qui, d'un point de vue externe, analyse comment se représente ce qui dans A est perceptible pour les "individus" i □ I, complétion qui nous "représente" la hiérarchie entre les percepts que, stablement, la collectivité I peut percevoir, distinguer.

Nous allons confirmer que la construction des Psi(A) est convenable en examinant son rôle dans la représentation des morphismes.

33.9. Il nous reste à examiner la question réciproque de celle examinée en 7 : étant donnée une fonction φ : A ∅ Psi(B), sous quelles conditions est-elle de la forme ^{psi}f : A ∅ Psi(B) pour un morphisme f : A ∅ B ?

D'après ce qui précède, nous savons que si f existe alors f est unique, donnée, sur les classes, par :

$$f(C)(i) = \varphi(-)(i)(C(i)) = \{b \,\square\, B \,;\, \exists c\, (c \,\square\, C(i) \,\square\, b \,\square\, \varphi(c)(i)\}.$$

---

[72] voir Borceux et Cruciani.

D'où par exemple les formulations :

$f(P)^{+}(i) = \{b \,\square\, B ; \exists b' (b' \,\square\, f(C)(i) \,\square\, b' \emptyset_i b)\}$
$=\{b \,\square\, B ; \exists b' (\exists c (c \,\square\, C(i) \,\square\, b' \,\square\, \varphi(c)(i)) \,\square\, b' \emptyset_i b)\}$
$=\{b \,\square\, B ; (\exists c (c \,\square\, C(i) \,\square\, b \,\square\, \varphi(c)^{+}(i))\}$,

$f(P)^{-}(i)) = \{b \,\square\, B ; \exists b' (b \emptyset_i b' \,\square\, b' \,\square\, f(C)(i))\}$
$=\{b \,\square\, B ; \exists b' (b \emptyset_i b' \,\square\, (\exists c (c \,\square\, C(i) \,\square\, b' \,\square\, \varphi(c)(i)))\}$
$= \{b \,\square\, B ; \exists c (c \,\square\, C(i) \,\square\, b \,\square\, \varphi(c)^{-}(i)))\}$.

Mais comme ${}^{psi}f(a)^{+}(i) = \{b \,\square\, B ; a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b\}$ et ${}^{psi}f(a)^{-}(i) = \{b \,\square\, B ; b_{f-}\emptyset_i\ a\}$, nous avons en fait nécessairement directement f déterminé par :

$a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b$ € $b \,\square\, \varphi(a)^{+}(i)$ € $\varphi(a) \emptyset_i b$,

$b_{f-}\emptyset_i\ a$ € $b \,\square\, \varphi(a)^{-}(i)$ € $b \emptyset_i \varphi(a)$.

Il s'agit donc d'exprimer sur φ le fait que ces dernières formules déterminent bien un morphisme f. De plus, nous l'exprimerons en utilisant la structure de A et la structure de Psi(B) donnée en 8. On a :

La fonction $\varphi : A \emptyset Psi(B)$ détermine un morphisme de A dans B si et seulement si :

m"1. $a \emptyset_i a$ € $\varphi(a) \emptyset_i \varphi(a)$,

m"2. $a \emptyset_i a' \,\square\, \varphi(a) \emptyset_i \varphi(a')$.

En premier lieu on peut observer que si $\varphi = {}^{psi}f$, alors la condition $\varphi(a) \emptyset_i \varphi(a)$ signifie que $\exists b (b \,\square\, {}^{psi}f(a)^{+}(i) \,\square\, b \,\square\, {}^{psi}f(a)^{-}(i))$, soit $\exists b (a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b \,\square\, b_{f-}\emptyset_i\ a)$; cela résulte bien de $a \emptyset_i a$, d'après m6, et cela implique $a \emptyset_i a$ car d'après m2 $b_{f-}\emptyset_i\ a$ implique qu'il existe un a' tel que $a' \emptyset_i a$, et g2 entraîne $a \emptyset_i a$. Donc m"1 est bien nécessaire.
La condition $\varphi(a) \emptyset_i \varphi(a')$ signifie $\exists b (b \,\square\, {}^{psi}f(a)^{+}(i) \,\square\, b \,\square\, {}^{psi}f(a')^{-}(i))$, ou aussi bien $\exists b (a\ {}_{f+}\emptyset_i\ b \,\square\, b_{f-}\emptyset_i\ a')$, et ceci à lieu si $a \emptyset_i a'$, d'après m6. Donc m"2 est nécessaire.
Reste à vérifier que m"1 et m"2 sont suffisants. Que nous laissons au lecteur.

Et enfin, nous caractériserons les applications $F : Psi(A) \emptyset Psi(B)$ qui sont de la forme Psi(f) pour un morphisme $f : A \emptyset B$. Si un tel f existe il est bien unique, puisque F détermine ${}^{psi}f = Psi(f) \circ psi_A : A \emptyset Psi(B)$, qui doit être $F \circ psi_A$. Donc F est de la forme Psi(f) si et seulement si $\varphi := F \circ psi_A$ est de la forme ${}^{psi}f$, c'est-à-dire satisfait m"1 et m"2 :

m'"1. $a \emptyset_i a$ € $F(psi(a)) \emptyset_i F(psi(a))$,

m'"2. $a \emptyset_i a' \,\square\, F(psi(a)) \emptyset_i F(psi(a'))$.

Mais si on ne veut plus faire jouer aux psi(a) un rôle particulier dans Psi(A), on peut obtenir une condition en principe plus exigente (mais en fait équivalente) aux niveau des percepts quelconques, à savoir :

Une application F : Psi(A) ∅ Psi(B) est déterminée par (et détermine) un morphisme (unique) f : A ∅ B sous la forme F = psi(f) si et seulement si :

M1. $P \varnothing_i P$ € $F(P) \varnothing_i F(P)$,

M2. $P\varnothing_i P'$ □ $F(P) \varnothing_i F(P')$.

Cette condition est évidemment suffisante d'après ce qui précède (m'"1 et m'"2), pour voir qu'elle est nécessaire il reste à la vérifier quand F est de la forme psi(f).
Nous avons vu que $P \varnothing_i P$ si et seulement si C(i) ≠□, si bien que M1 résulte de ce que nous avons vu en 5, à savoir que C(i) ≠□ si et seulement si f(C)(i) ≠□.
Quand à M2, si F = Psi(f), la condition $F(P) \varnothing_i F(P')$ signifie que ∃b (b □ $f(P)(i)^+$ □ b □ $f(P')^-(i)$), c'est-à-dire ∃b (∃a (a □ $P^+(i)$ □ $a_{f+}\varnothing_i$ b) □ ∃a' ($b_{f-}\varnothing_i$ a' □ a' □ $P^-(i)$)), et en effet si $P \varnothing_i P'$ c'est-à-dire si ∃a" (a" □ $P(i)^+$ □ a" □ $P'^-(i)$), alors $a"\varnothing_i a"$, et d'après m6 il existe un b tel que $a"_{f+}\varnothing_i$ b □ $b_{f-}\varnothing_i$ a", et ce que l'on désire est bien vrai.

Remarque : les conditions M1 et M2 seules définissent donc bien les morphismes de Ω(I)-ensembles gauches, sans nécessiter de plus une référence à la topologie et la "stabilité" (pour exprimer que [a $_{f+}\varnothing$ b]) et [b $_{f-}\varnothing$ a] sont éléments de Ω(I)) ; en effet cet aspect des choses à été enkisté dans la détermination des Psi(A), et, en l'espèce résulte ici de ce que Psi(B) soit un Ω(I)-ensemble gauche.

33.10. Pour terminer, il y a pour les Ω(I)-ensembles gauches un prolongement de la représentation faisceautique "à la Higgs" des Ω(I)-ensembles symétriques.

Soit A un Ω-ensemble gauche, univoquement complet (on pourra au besoin, vu ce qui précède, remplacer un A quelconque par Psi(A), qui lui est isomorphe et est univoquement complet). Pout tout U□ Ω(I), on pose :

E(U) = {a □ A ; [a ∅ a] = U} = {a □ A ; $a \varnothing_i a$ € i □ U},

Ω(U) = {V □ Ω(I) ; V ∏ U },

χ(U) : $E(U)^2$ ∅ Ω(U) : (a, a') l∅ [a ∅ a'],

≤(U) = {(a,a')□ $E(U)^2$; [a ∅ a'] = U}.

Alors E est un faisceau[73] sur Ω(I) et χ le morphisme de faisceau caractéristique de la relation réflexive, transitive et antisymétrique sur E, noté ≤.

[73] par exemple voir F. Borceux, *A handbook of categorical algebra, vol. 3 : categories of sheaves*, Cambridge University Press, 1994, section 2.9.

Ainsi à A se trouve associé un faisceau ordonné sur $\Omega(I)$, noté $(E,\leq)[A]$.

Réciproquement, si $\leq$ est un ordre sur un faisceau E sur $\Omega(I)$, c'est-à-dire une donnée pour chaque U d'un ordre $\leq(U)$ sur $E(U)$ telle que si $V \subseteq U$ alors l'application de restriction $res_{V \subseteq U} : E(U) \to E(V)$ soit monotone, on peut construire un $\Omega(I)$-ensemble gauche univoquement complet noté $A[(E,\leq)]$. On procède en définissant l'ensemble sous-jacent A comme la réunion disjointe des $E(U)$, soit $A = \coprod_{U \in \Omega(I)} E(U)$; en définissant, pour tout $a \in A$, $\kappa(a) = U$, où U est la composante de la somme disjointe dont a est élément ; en notant $a|_W = res_{W \subseteq \kappa(a)}(a)$ pour tout $W \subseteq \kappa(a)$, et en posant

$$a \to_i a' \Leftrightarrow \exists W \in \Omega(I) [i \in W \wedge a|_W \leq(W) a'|_W].$$

Alors on montre que les deux constructions sont fonctorielles, que $A[(E,\leq)[A]]$ est isomorphe à A et que $(E,\leq)[A[(E,\leq)]]$ est isomorphe à $(E,\leq)$, et qu'ainsi la catégorie des $\Omega(I)$-ensembles gauches est équivalente à la catégorie des faisceaux ordonnés sur $\Omega(I)$.

Remarque : cette représentation ramène donc l'étude des Ω-ensembles gauches à celle des ordres dans un contexte logique de type intuitioniste.