REGIMES D'ASSIMILATIONS

ET

CALCUL DES VARIATIONS

A LA POURSUITE DU MÊME

Notes Préparatoires

D **Numéros 43 à xx**

[avril 1999 à zzzzz 1999]

René GUITART
guitart@math.jussieu.fr

Université Paris 7

TABLE[1]

Table

Introduction [à compléter]
00. Parti-pris : le dire et le montrer inséparés
01. Assimilations et relations binaires
02. Va-et-vient et fixation, adjonctions à droite et à gauche
03. Augmentation et diminution ; variation brute
04. Travail du négatif, borroméenité
05. Complémentarité et négations
06. Cas logiques et monotonies des augmentation et diminution
07. Propriété fondamentale des augmentation et diminution
08. Extension des augmentation et diminution aux points de vue
09. Ouvertures et fermetures ; adoucissements ; gradients
10. De l'enlacement des parties
11. Régime de hauteur h et axiome de passage
12. Régimes de hauteur 1 versus gractes versus réécritures
13. Régimes de hauteurs 2 et 3 et ensembles empiriques
14. Le régime linéaire élémentaire ou règle du plan
15. Régime métrique du plan, images, squelettes
16. Topologie, uniformité
17. Groupes et actions de groupes
18. Structures, géométries, algèbres

19. A la poursuite du même : questions de méthode
20. Quantifications et dynamique des relations binaires
21. Préalables aux morphismes de régimes
22. Engrénement, filtres, grilles, ultrafiltres, assemblages
23. Le régime de la convergence
24. Topologie sur les parties
25. Révélation topologique des formes et de leurs stabilités
26. Question de la logique du voir
27. Sémantiques topologiques des syntaxes propositionnelles
28. Vers la logique du voir
29. Modalités et relations binaires d'accessibilité
30. Réduction des modalités
31. Modalités, augmentations, diminutions : au-delà du voir
32. Algèbres modales et extensions de cadres modaux
33. Morphismes et percepts des ensembles empiriques gauches

Introduction (complément)
34. Le borroméen, ou le ternaire sous l'impossible
35. Icosaèdre et yin-yang dans la langue.
36. Le dodécagramme trigonométrique
37. Croisement des lieux de la philosophie et de la psychanalyse
38. Logotopie
39. D'un fondement borroméen de l'espace de la langue
40. Conditions de la logique RSI
41. De l'opposition fondatrice
42. Des lieux communs et du site proverbial

43. Entourages et recouvrements larges : dualité de Weil-Tukey
44. Rôle de l'augmentation dans la distance des parties
45.

[1] Le présent texte constitue une quatrièmelivraison des Notes pour le Groupe de Travail "Sémantique Discursive", telle que mise au point à la date du XXX 1999, relatives à une partie du travail de l'année 1998-99. Les critiques sont toujours utiles.

43. ENTOURAGES ET RECOUVREMENTS LARGES : DUALITE DE WEIL-TUKEY

43.1. Au numéro 16 se sont introduites d'une part les topologies, d'autre part les structures uniformes, et, troisièmement, les topologies associées aux structures uniformes. Il est nécessaire de repenser ces données et leur ordonnancement. Reprenons donc depuis le numéro 16.5. la définition à la Weil :

Une *structure uniforme* [2] $\mathcal{U}$ sur E est - avec notre terminologie (cf. 11.1.) - un régime de hauteur 1 "canonique" ou ensemble de points de vue - appelés entourages -, satisfaisant aux axiomes suivants :

F I Toute point de vue (i.e. toute relation binaire sur E) contenant un point de vue de $\mathcal{U}$ est lui aussi un point de vue de $\mathcal{U}$.

F II Toute intersection finie de points de vue de $\mathcal{U}$ est encore un point de vue de $\mathcal{U}$.

U I Tout point de vue de $\mathcal{U}$ est réflexif.

U II Si ε est un point de vue de $\mathcal{U}$, alors ε^{op} est aussi un point de vue de $\mathcal{U}$.

U III Pour tout ε point de vue de $\mathcal{U}$, il existe un η, point de vue de $\mathcal{U}$, tel que

$$\eta\circ\eta \prod \varepsilon.$$

Si $\mathcal{U}$ est une structure uniforme quelconque, alors les opérateurs (-)d$\mathcal{U}$ et (-)b$\mathcal{U}$ satisfont bien aux axiomes des topologies. On parle alors pour la topologie en question de la topologie associée à $\mathcal{U}$. Mais toute topologie n'est pas de ce type.

Voici maintenant la présentation de Tukey[3]. Soit E un ensemble, et $\mathcal{M}$ un *recouvrement* de E, soit un ensemble de parties de E dont l'union est E. On dit que le couvremt $\mathcal{M}$ est un *raffinement* du recouvrement $\mathcal{N}$ si toute partie M de E élément de $\mathcal{M}$ est contenue dans une partie N de E élément de $\mathcal{N}$. On écrit alors : $\mathcal{M} < \mathcal{N}$.

Si X est une partie de E et $\mathcal{M}$ un recouvrement de E, on définit l'étoile de X dans $\mathcal{M}$, qui est notée Star(X, $\mathcal{M}$), commel'union de tous les ensembles de $\mathcal{M}$ qui rencontre X ; et ensuite, pour tout recouvrement $\mathcal{M}$, on définit le recouvrement $\mathcal{M}^*$ comme l'ensemble dont les éléments sont les Star(M, $\mathcal{M}$), pour tous les M de $\mathcal{M}$. On définit alors entre recouvrement la relation *< par $\mathcal{M}$ *< $\mathcal{N}$.si et seulement si $\mathcal{M}^* < \mathcal{N}$. On dit alors que $\mathcal{M}$ est un **-raffinement* de $\mathcal{N}$.

Enfin, une *uniformité* sur un espace topologique X = (E, O(X)) est un ensemble **U** de recouvrements ouverts U de E tel que :

1. Si U < U ' et si U $\in$ **U** alors U ' $\in$ **U** .
2. Si $U_1, U_2 \in$ **U** alors il existe un $U_3 \in$ **U** tel que U_3 *< U_1 et U_3 *< U_2.

Les éléments U de **U** sont appelés les recouvrements *larges*.

43.2. Par exemple, dans un espace métrique, un recouvrement U sera décrété "large" s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ la boule B(x, ε) de centre x et rayon ε soit un élément de U. Pour un recouvrement ouvert quelconque U, le plus grand $\varepsilon \geq 0$ tel que

---

[2] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Ac. SC. & Ind., n° 551, Paris, Hermann, 1937.

[3] J.W. Tukey, *Convergence and Uniformity in Topology*, Ann. Math. Stud. 2, Princeton, 1940.

pour tout x E la boule B(x, ε) de centre x et rayon ε soit un élément de U. est appelé la constante de Lebesgue de U ; et on pourrait la noter l(U) et la nommer la *largeur* (de Lebesgue) *de* U ; les recouvrements larges sont donc ceux de largeur non nulle.

De même, dans un espace uniforme à la Weil, on détermine les recouvrements larges U (éléments de **U**) (large donc relativement à la donnée 𝒱, et on dira donc 𝒱-large) par la condition qu'il existe un entourage ε (un point de vue de 𝒱) tel que, pour tout x E l'ensemble ε[x] soit un élément de U. Pour un recouvrement 𝒱-large, on peut définir sa largeur L(U) comme le plus grand ε 𝒱 tel que pour tout x E l'ensemble ε[x] soit un élément de U.

Dans l'autre sens, partant d'une uniformité **U** à la Tukey, on détermine une structure uniforme 𝒱, en déterminant les entourages comme les "largeurs" L(U) des recouvrements larges U **U** , au sens que voici . Cette définition vaut sans supposer même que U soit un recouvrement (en fait **X** est un recouvrement si et seulement si L(**X**) est un point de vue réflexif) :
si **X** PP(E), j'appelle *largeur* de **X** , et je note L(**X**), le plus grand ε P(E^2) tel que, pour tout x E, on ait ε[x] **X** . Autrement dit :

L(**X**)[x] = ≈{ X **X** ; x X}.

Autrement dit :

y $\varnothing_{L(\mathbf{X})}$ x € ∃X **X** (x X y X).

J'appellerai *dualité de Weil-Tukey* ce va-et-vient entre la définition de Weil et celle de Tukey ; il y est question d'une alternative : ou bien on se donne d'abord ce qui exprime abstraitement la mesure de petitesse (les entourages), ou bien on se donne d'abord ce qui est utilisé comme large (les recouvrements larges). Au niveau des régimes, c'est la question de l'alternative entre une *assimilation* ou une *qualification* (on y reviendra).

44. ROLE DE L'AUGMENTATION DANS LA DISTANCE DES PARTIES.

44.1. Dans l'analyse des topologies sur les parties, un argument important était leurs rapport à la distance de Hausdorf D sur les parties fermées, donnée (cf. numéro 24.3.) si l'espace E est compact métrisable de distance d, par :

$$D(A, B) = \sup[\ \sup_b \inf\{d(a,b)\ ;\ a \ \square\ A\},\ \sup_a \inf\{d(a,b)\ ;\ b\ \square\ B\}]\ .$$

Sous cette forme, le côté "naturelle" (par exemple pour les distances de courbes dans le plan) est bien visible. Mais en fait il importe, pour notre analyse qui veut mettre en avant le rôle prépondérant des assimilations et augmentations et diminutions, de souligner que cette distance D s'exprime aussi, avec nos notations, comme suit[4] :

$$D(A, B) = \inf\{\varepsilon\ ;\ (A\ \prod Bb\varepsilon\ )\ \square\ (B \prod Ab\varepsilon\ )\}.$$

44.2. Sous cette dernière forme on voit mieux, plus directement, comment la distance D est simplement déterminée à partir du régime métrique sur E. En particulier la description directe du régime sur les parties de E qui est associé ici au régime de départ sur E devient immédiate. En effet on a :

$$D(A, B) \leq \varepsilon\ \ \text{€}\ (A\ \prod Bb\varepsilon\ )\ \square\ (B \prod Ab\varepsilon\ ).$$

Autrement dit, le régime métrique sur les parties de E associé au régime métrique sur E est donné par :

[4] voir M. Schmitt et J. Mattioli, *Morphologie mathématique*, Masson, Paris, 1994, p.57, et voir aussi C. Meyer, *Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique*, CDU, Paris, 1969, p.176.

45. LA TERNARITE DE PEIRCE

45.1. On trouve[5] chez Peirce le schéma suivant :

Deduction

Rule All the beans from this bag are white
Case These beans are from this bag
ùResult These beans are white

Induction

Case These beans are from this bag
Result These beans are white
ùRule All the beans from this bag are white

Abduction

Rule All the beans from this bag are white
Result These beans are white
ùCase These beans are from this bag

On identifie donc formellement D, I et A comme les trois "figures" :

De = (Ru, Ca ; Re), In = (Ca, Re ; Ru), Ab = (Ru, Re ; Ca).

Pour Peirce, la Déduction prouve que quelque chose *doit* être, l'Induction montre que quelque chose *effectivement* est opératoire, l'Abduction simplement suggère que quelque chose *peut* être. Ces trois figures invoquent le principe de la première, mais la seconde et la troisième contiennent d'autres principes en plus.

[5] J'emprunte ici la chose au livre (p. 8, p. 182) :
U. Eco and T. A. Sebeok (Editors), The sign of Three -,Dupin, Holmes, Peirce, Indiana University press, 1983, First Midland Book Edition 1988.