CARACTERE GLOBAL ET CARACTERE LOCAL DE LA VERITE[1]

Il s'agit d'exposer comment la question du caractère local et du caractère global de la vérité, et du va-et-vient qui s'active là, a un sens tout à fait net et profond si on l'envisage du point de vue de la pratique mathématique actuelle, et particulièrement de la théorie de la courbure et des classes caractéristiques d'espaces fibrés, et ceci dans le cadre de l'algèbre homologique, des géométries élémentaires et de la théorie de Galois, considérées comme pièces cruciales d'un calcul de l'ambiguïté, et comment, de ce point, on peut amorcer l'idée d'un *modèle géométrique de logique métaphorique.*

1. Logiques et vérités.

a/ Dans la méfiance envers la mathématique il y a la crainte que son usage ne soit coercitif et sa pratique forclusive, il y a le désir de préserver l'humain d'un usage à la lettre où rien ne pourrait rester de son équivocité, d'une pratique automatique, d'une spéculation inopportunément exacte l'exilant de son mystère sacré. C'est ignorer que l'équivoque et l'ambiguïté sont au coeur même de la mathématique, tant dans sa pratique inventive, dans ses objets d'études, et dans les théories qu'elle développe.
Mon but sera précisément de proposer, à la place de la logique mathématique traditionnelle qui est de nature purement hiérarchique, une logique de nature *géométrique* laissant de la place au fonctionnement de la métaphore.

b/ La logique mathématique traditionnelle propose un jeu d'écritures et ré-écritures sur des expressions formelles imitations de certaines énonciations très particulières de la pensée en écrits grammaticalement bien formés. Il est vrai qu'elle atteint son but historique qui est une maîtrise

[1] *Conférence de René Guitart, donnée à la Lysimaque, le 23 septembre 1990. Cette conférence sera développée dans le chapitre 6 du livre à paraître intitulé LA COURBURE DE LA RAISON.*

mathématique de la rigueur, considérée comme usage correct des règles de ré-écriture fixées ; et cela parce que les expressions formelles considérées suffisent pour écrire les résultats et preuves mathématiques. La vérité dans cette logique est d'abord une question de correction grammaticale, vise le pur jeu de substitutions non-ambiguës de lettres à d'autres lettres. Je dirai qu'il s'agit d'abord de vérification métonymique du fait qu'il y a de la métonymie exclusivement, dans un texte qu'il s'agit de prendre à la lettre, c'est-à-dire comme une organisation structurelle impeccable.

c/ Il est significatif que la mathématique soit probablement le domaine de pensée où l'écart entre la pensée inventive (qui s'y effectue sans mots ou lettres en général, mais plutôt en images et mouvements fugaces) et son écriture (qui prétend être utilisable à la lettre - quoiqu'y saisir du *sens* nécessite un *autre* savoir) est le plus grand. Et ce qui permet ce grand écart c'est l'existence de la logique traditionnelle écartant toute équivoque afin d'éviter la confusion. Si l'activité mathématique peut être proposée avec profit, c'est bien centrée sur la pratique de cet écart, par exemple au cours de calculs pointilleux sur des objets géométriques intuitifs. Et de cette activité mathématique la logique mathématique traditionnelle ne rend pas compte (en faisant ici une réserve concernant la théorie de la démonstration dans son développement actuel, laquelle, en s'inquiétant de l'architecture des preuves et non pas seulement du pur calcul de la vérité des énoncés insiste au moins implicitement sur ce que j'appelle l'aspect géométrique de la logique ; ceci dit quoi que l'idée que j'avance de logique géométrique ne se réduise pas à cette observation qu'il y a une géométrie des preuves dans un système formel donné, mais propose plus radicalement que les systèmes formels naturels pertinents soient directement formulables en termes géométriques). Ce qui en rend compte c'est l'ensemble de la théorie mathématique, qui permet l'analyse rigoureuse des figures et la compréhension géométrique des algorithmes, et cela par la prise en charge explicite - et non pas l'évitement -, des équivoques et de la question de l'ambiguïté.

d/ Une *logique* est faite pour comprendre activement, pour donner une prise combinatoire sur un champ de savoir, une possibilité d'entrer dans un jeu de substitutions machinales entre les éléments de ce savoir ; c'est donc une algèbre organisant ce champ comme lieu d'un calcul, d'un mouvement maîtrisé. Alternative à la glose visant d'un coup le verbe vrai et la juste expression de la nature du savoir, la logique propose un détour, la pratique d'un jeu sur le savoir, jeu que l'on sait, qui est parfaitement décrit, et cette pratique donne une émotion qui n'est pas sans rapport au savoir. Une émotion relative à un savoir se produit lorsque l'on circule dans son champ ; et une logique est à la fois une représentation de ce champ et une machine pour y évoluer. L'espace *et* le véhicule, pour induire une mise en mouvement, un ébranlement, une déstabilisation, provoquer l'émotion, indiquer le style et le ton du champ.

e/ La *vérité* dans une logique est ce par quoi elle est constituée, l'énonciation certaine d'une adéquation. Elle se constitue par un discours interne, indiscutable, autorisant, pour tout usage interne, à remplacer machinalement un élément par un autre. Il s'agit des règles d'un jeu, même si le jeu n'est pas nécessairement innocent.

f/ La *vérité* d'une logique est un discours externe informant sur la structure globale même de cette logique, sur la *géométrie* même de la représentation du champ de savoir envisagé. Elle commence nécessairement par l'énonciation des limites dans la vérité interne, des manques dans les possibilités de déplacement dans le champ, et s'achève, hors de la logique même, en critique de l'adéquation de cette logique comme représentation du savoir.

g/ Une logique, considérée comme représentation du mouvement dans un champ de savoir, a donc un caractère géométrique, et par suite la vérité considérée comme le ressort *et* ce qui ressort du logique a un caractère géométrique, et partant de là un caractère local et un caractère global. Sur cela nous reviendrons plus loin.

2. Mathématique et équivoque.

h/ La mathématique ne vise pas l'établissement d'un consensus et d'une saisie automatique du monde, la clôture d'un savoir définitif. La rigueur et la modèlisation formelle y ont pour fonction première la mise à jour de l'écart entre la représentation et le monde, l'annonce de l'erreur et non pas la proclamation finale de la vérité. C'est un art du faux, qui se déploie par l'élaboration des diverses logiques des divers savoirs, et cela constitue un champ de savoir, ouvert.

i/ La logique est la logique du champ du savoir mathématique. Elle est donc un fragment de mathématiques appliquées, - et non pas une instance préalable à l'activité mathématique (laquelle n'a à s'autoriser que du simple souci de rigueur - lequel, à terme, *est* le souci de l'équivoque)-, à savoir la mathématique appliquée à l'activité mathématique elle-même, dont le centre est le calcul comme art du choix dans du formel libre.
S'il y a question de choix, c'est qu'il y a, de façon naturelle dans la situation en jeu, sous-détermination et équivoque possible à cause d'une alternative constituée et précise, et la logique aura pour objet la géométrie de ces équivoques, l'organisation des alternatives, et le calcul de l'ambiguïté. Elle livrera des moyens de se mouvoir dans le systèmes des choix possibles et les limites mêmes de ces moyens.

j/ Au cours d'un calcul ou d'une écriture algébrique ou géométrique, on dispose, explicitement, de certains moyens que l'on considère comme acceptables ou naturels, et on élimine explicitement l'usage de tout autre moyen. Cette nature limitée des moyens est cause de l'impossibilité de discerner, de marquer distinctement avec ces moyens, avec cette écriture de forme fixée, des objets que de façon transcendante à cette écriture l'on connait comme différents. Ainsi apparaît de l'indiscernabilité, de l'ambiguïté qui est intrinsèque à cette écriture, à ce calcul. Cette ambiguïté est le contraire du vague et du flou, elle est conséquence de la rigueur et du resserrement de l'écriture, la désignation exacte de ce que cette écriture bien définie ne peut dire, parce qu'elle est bien définie.

k/ La vérité est d'abord la vérité du calcul comme système d'opérations de ré-écriture suivant des règles fixées. Il s'agit du droit indéfini de calculer, et, simultanément, du fait que le calcul est limité donc ambiguë, de sorte que si vous calculez indéfiniement dans l'intention d'atteindre un certain objectif, il se peut que vous ne puissiez l'atteindre, mais que cette impossibilité, elle, vous soit accessible comme conséquence d'un autre calcul portant *sur* le calcul lui-même et déterminant exactement son ambiguïté.

l/ Il en est ainsi par exemple dans le calcul algébrique classique, dont les moyens sont les quatre opérations arithmétiques +, ×, - et :, et l'usage de lettres pour désigner des quantités inconnues a priori. Il se trouve que la détermination algébrique (c'est-à-dire par seul usage des moyens de l'algèbre) de chaque racine d'une équation n'est possible que jusqu'à un certain point, la mesure de l'impossibilité étant donnée non par un nombre mais par une structure qui est le groupe de Galois de l'équation considérée, qui nous dit à quel point les éléments de la situation sont collés entre eux et indiscernables. Ce groupe est constitué de toutes les permutations galoisiennes de la situation, une permutation galoisienne étant une façon de mélanger les racines telle qu'on ne puisse écrire, avec les seuls moyens de l'algèbre, une distinction entre la donnée des racines dans un certain ordre et la donnée des racines dans l'ordre obtenu à partir de ce premier ordre après avoir effectué le mélange considéré.
Ce groupe de Galois peut être calculé explicitement.

Partant d'une information négative qui est la limitation exacte de nos moyens de calcul, on obtient une information positive, le groupe de Galois, à partir duquel on pourra résoudre l'équation.
Par exemple, le groupe de Galois de l'équation "$x^2-2 = 0$" est égal à $\mathfrak{S}2$, le groupe des permutations sur deux éléments, de sorte que les deux racines de cette équation que nous désignons par $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont algébriquement indiscernables.

m/ Lorsque le mathématicien fait de la géométrie, c'est-à-dire explore mentalement des figures pour en élucider les lois, il se limite aussi à certains moyens de pensée et d'expression. Par exemple en géométrie euclidienne dans le plan, le seul moyen retenu est l'indication de la distance entre deux points quelconques. Or si l'on considère une figure dans le plan et qu'on la déplace rigidement, en la faisant glisser et tourner, il est impossible de trouver une propriété de figure exprimée dans le langage de la géométrie euclidienne ou géométrie des distances, et qui soit vraie de la figure initiale et fausse de la figure déplacée. Ainsi la géométrie des distances dans le plan est sujette à une ambiguïté fondamentale, décrite positivement comme le groupe des déplacements du plan.
Dès lors la géométrie des distances consiste d'abord en la recherche des éléments associables aux figures qui sont compatible avec tout déplacement, ou, comme on dit, covariants par rapport au groupe des déplacements.
Le même phénomène a lieu pour les diverses géométries élémentaires (conforme, projective, topologique). Cela, et le lien entre les diverses géométries envisagé comme étude du rapport entre les différents groupes correspondants, est le contenu du "programme d'Erlangen" de Klein.

n/ Un autre exemple est la cinématique einsteinienne. L'information négative initiale consiste en trois points :
- d'une part, le principe de relativité de Galilée affirmant qu'aucune expérience mécanique conduite à l'intérieur d'un système physique ne peut déceler le mouvement uniforme de ce système ;
- d'autre part, le rejet de la possibilité de mesure absolue du temps, des longueurs, des vitesses ;
- enfin, l'affirmation qu'il est impossible de mettre en évidence une différence entre les mesures de la vitesses de la lumière dans deux repères en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.
De ces limitations physiques sur les moyens de la cinématique on tire alors, par un travail mathématique, une information positive, à savoir le groupe de Lorentz, qui infléchit a priori

la forme des lois physiques, lesquelles devront être covariantes sous l'action du groupe de Lorentz sur l'espace-temps.

o/ Enfin, considérons la façon dont nous considérons la sphère opaque. De cet objet dont toujours on ne voit qu'une partie, nous savons que c'est une sphère, en en faisant le tour et constatant l'identité de toutes les vues obtenues. Chaque vue sous-détermine l'objet qui reste alors ambiguë. La sphère imaginée est plus que la sphère vue, c'est la sphère perçue *et* équipée de l'ambiguïté portée par cette perception particulière. Ou bien c'est un travail de l'esprit sur la sphère vue, l'organisation de toutes les vues d'une sphère. Ainsi chaque vue découpe de la sphère un fragment exprimable globalement dans la logique de l'oeil, et autre chose que l'oeil, l'esprit, recolle ces fragments pour arriver à la qualité même de la sphère. Ces vues sont comme des noms fantômatiques de la sphère, tous utiles dans leur cohérence, puisque c'est finalement cette cohérence même qui est la sphère, ce qu'on en sait. Ce qui importe pour chaque vue c'est sa "différence" d'avec la sphère, la tension qu'elle induit vers la sphère. La façon algébrique précise dont les diverses vues doivent s'agencer pour être la sphère, voilà la vérité de la sphère considérée comme champ de savoir face à la logique de l'oeil. Soit un récit de comment la sphère échappe à l'oeil en se cachant derrière soi, de comment l'oeil coupe la sphère et comment ces coupures organisent la sphère. Mathématiquement cela est décrit par divers groupes, appelés groupes d'homotopie, d'homologie, de cohomologie.

p/ Dans la mathématique contemporaine, les groupes de Galois, groupes des géométries élémentaires, groupe de relativité, groupe d'homotopie, d'homologie et de cohomologie vivent ensembles, interfèrent, et constitue un corpus que j'appellerai brièvement l'*homologie*, qui vise le calcul de l'ambiguïté dans tous les codages et toutes les descriptions formelles limitées du champ du savoir mathématique. A ce titre l'*homologie* est le coeur de la logique, le calcul de l'organisation même du savoir mathématique constitué. J'écrirai le "slogan" :

LOGIQUE = HOMOLOGIE

q/ A ce point nous voyons que le monde n'est pas absolument observable en espace et en temps (Ptolémée) et le calcul absolument rationnel (Pythagore) : l'observation du monde est relative (Einstein) et le calcul ambigu (Galois).
Cette relativité et cette ambiguïté sont à l'opposé du relativisme et du vague, de la mollesse inconsistante qui proposerait de modérer indéfiniement ses opinions, en affirmant qu'il y a du bon dans tout ; ce sont de fortes *contraintes logiques actives* élaborées à partir de limitations.
Il est positivement nécessaire de poser les impossibilités comme principes, principes négatifs d'abord, principes que l'on transforme ensuite en principes positifs, sous la forme de principes de covariance relativement à un certain groupe.
Ainsi nos représentations d'un champ de savoir devront comporter des principes de covariances, expressions positives de l'ambiguïté qui s'expose d'abord négativement dans les limites d'une logique de ce champ.
<u>L'ambiguïté est à poser, pour commencer la logique.</u>
<u>Puis, à poser, un jeu de distinctions.</u>

3. Vérité et courbure de fibrés.

r/ Revenons maintenant à l'activité mathématique considérée dans son grand écart entre rigueur absolue et visions intérieures diffuses. L'intelligence rationnelle de cette situation est de l'ordre d'une gestion de la sous-détermination des images évoluant sous contraintes, chacun peut la pratiquer, en faisant des mathématiques et examinant sa démarche au fur et à mesure, obtenant ainsi un sentiment empirique de ce qu'est l'homologie, laquelle s'occupe de la même question à un niveau formalisée. On éprouve ainsi une logique qui est au plus près de la logique de la pensée comme question du cogito (au sens de, dirai-je, Deleuze, ou de Derrida commentant Foucault commentant Descartes), de la traversée du cogito considéré comme fissuration, comme écart infime entre sentiment et raison, entre fusion et hiérarchie.

s/ Il n'y a pas de pensée sans ambiguïté, de sens sans double sens, de résultats positifs sans négations. Il y a des miroirs.

La traversée des miroirs incessante, le fourmillement dans la fissure du cogito fêlé, anime la pensée, et s' effectue par la *négation*, la marque d'un écart, dont la parole est trace fluide. Il y a la duplicité et la fluidité du réel. Ces miroirs font qu'il y a la libre expression, architecture de choix - et non de "vérités", ce qui détermine le sentiment d'identité et pose la question de la continuïté comme conscience du contact avec soi-même, du nouage pulsif entre perception et entendement, la question du cogito comme question du *même&change.*

Historiquement, la mathématique s'occupe d'une part de la mêmeté ou fusion, comme question des groupes (d'opérateurs), et d'autre part de la question du change ou variation dans une hiérarchie, comme question de placement en des espaces, en des continuums dichotomiquement construits, soit comme question des fonctions continues.

Je pose que <u>la question philosophique de la continuïte</u> n'est pas celle de l'élaboration du continuum (ce qui ne fait que "donner à voir" la continuïté comme pur change dans une multiplicité), mais <u>est la question de l'articulation qui met en contradiction fusion et hiérarchie,</u> soit, sur le plan mathématique, la question du rapport entre groupe et espace. Un "modèle" de cette question sera donc une mise en tension, en contradiction, d'un groupe et d'un espace. Or, cela est réalisé en mathématique par la notion d'*espace fibré.*

t/ Fixons un groupe **G** et un espace **B**. La donnée d'un *espace fibré de groupe* **G** *et de base* **B** est la donnée d'un espace **X** lié à **G**, lié à **B**, de sorte que ces deux liens soient cohérents entre eux :

- le lien de **X** à **G** consiste en ce que **G** opère sur **X**, c'est-à-dire en la donnée pour tout g de **G** et tout x de **X** d'un élément noté gx de **X** appelé résultat de l'action de g sur x, cette donnée devant vérifier, pour e l'élément neutre du groupe, pour tout g,tout g' de **G**, pour tout x de **X**

$$ex = x, \quad g'(gx) = (g'.g)x,$$

g'.g désignant l'élément de **G** obtenu par composition dans **G** de g' et g.

- le lien de **X** à **B** consiste en la donnée d'une application continue appelée projection de **X** sur **B**, notée $p : X \longrightarrow B$.

- et la cohérence demandée entre ces deux liens consiste en ce que, pour tout g de **G** et tout x de **X**, on ait

$$p(gx) = p(x)$$

Pour tout b de **B**, l'ensemble, noté $p^{-1}(b)$ ou X_b, formé des x de **X** tels que $p(x) = b$, est une partie de **X** appelée *fibre* en b de p, ou fibre en b de **X**, et considéré comme "espace intérieur" de b. La cohérence entre l'action de **G** sur **X** et la projection de **X** sur **B** s'exprime encore en disant que l'action de **G** sur **X** transforme chaque fibre de p globalement en elle-même, ou encore laisse fixes les fibres.

Pour un **G** et un **B** donnés, on peut toujours construire un fibré "banal" ainsi : on prend $X = G \times B$, on pose $g'(g,b) = (g'.g,b)$, et $p(g,b) = b$. Un tel fibré est une platitude, ne nous apprend rien sur le rapport entre **G** et **B**, n'établit pas de véritable mise en contradiction, parce que dans **X** l'action de **G** et la projection sur **B** sont séparées, et ne sont cohérentes que parce que elles n'ont rien à voir entre elles, ne sont pas mise à l'épreuve l'une de l'autre. Et effectivement à contempler **X** où à y circuler on n'éprouve rien, aucune émotion entre fusion et spatialisation n'est véritablement succitée. Ce qui sera significatif ce sera un fibré non-banal, non-trivial ; son "sens" sera justement la mesure de sa non banalité, de sa non-trivialité, ce qui est mathématiquement décrit par ses "classes caractéristiques".

Pour être précis ici il me faut dire ce que c'est qu'un fibré *trivial*, au sens mathématique du mot (qui n'est pas vulgaire dans le sens de grossier, d'inconvenant, mais au contraire vulgaire dans le sens de très commun, très évident, et donc sans intérêt, sans subtilité méritant qu'on s'y arrête, banal) : soit donc un espace **F** équipé d'une action de **G**, notée gu, pour $g \in G$ et $u \in F$; on défini alors un fibré sur **B** en prenant $X = F \times B$, et en définissant une projection $p : X \longrightarrow B$ par $p(u,b) = b$, et une action de **G** sur **X** par $g(u,b) = (gu,b)$. Voilà ce que c'est qu'un fibré trivial, le plus trivial des fibrés triviaux étant donc le fibré banal (où $F = G$).

Pour qu'un fibré soit non-trivial, il est nécessaire que d'une part **G** comporte au moins deux éléments, c'est-à-dire au moins un élément non-neutre, et que d'autre part **B** ne soit pas contractile, c'est-à-dire homotopiquement équivalent à un point, c'est-à-dire "fasse trou". Pour ces raisons, le "plus petit" **G** possible est 𝔖2 (le groupe des permutations sur 2 éléments, groupe constitué de deux éléments notés e et t, et où la loi de composition est donnée par e.e = e, e.t = t.e = t, t.t = e), et le "plus petit" **B** possible est le cercle S^1.

Prenons donc **G** = 𝔖2 et **B** = S^1. Il existe alors un fibré non-trivial de groupe **G** et de base **B**, fibré qui est donc le plus simple fibré non-trivial, et on l'obtient en prenant pour **X** la *bande de Moebius* **M**, laquelle est la surface obtenue à partir d'une bande rectangle ABCD (en désignant par A,B,C,D les 4 sommets du rectangle, dans l'ordre où ils se suivent en parcourant le bord du rectangle dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre) en collant le bord AB sur le bord CD en collant A avec C et B avec D, en imprimant à la bande pour ce faire 1 demi-torsion (et non pas 3,5,7 ... demi-torsions, comme cela serait possible). Alors le milieu E de AB et le milieu F de CD sont collés, de sorte que sur la bande de Moebius la droite de la bande rectangle qui joint E à F devient une ligne fermée en un cercle S^1, que j'appellerai cercle médian de la bande. On définit alors p : **M** $\longrightarrow$ S^1 en associant à chaque point x de **M** le point p(x) de S^1 le plus proche de x sur la bande, et on définit une action de 𝔖2 sur **M** en posant, pout tout x de **M**, ex = x, et en définissant tx comme le symétrique de x par rapport au cercle médian S^1. On a bien t(tx) = x, et on a bien p(ex) = p(tx) = p(x).

Ce fibré non-trivial nous apprend quelque chose, à savoir qu'il y a un véritable nouage entre d'une part 𝔖2 soit l'idée d'un monde **X** en miroir où tout élément x a un reflet tx dont il est indiscernable, et d'autre part un monde **X** troué (parce que se projetant continuement sur le cercle S^1 qui est troué "1-dimensionnellement), et où le mouvement nous fait tourner autour d'une absence). Je dirai donc que la bande de Moebius donne à voir un nouage entre indiscernabilité par couples et trouage 1-dimensionnel, entre mirage et tournage. Dès lors on éprouvera ce nouage comme pulsion en pratiquant la bande de

Moebius, en dessinant dessus, en y circulant, en la coupant, et en renvoyant cette chirurgie simultanément à l'idée de miroir et à l'idée de tour. J'appellerai *moebien* ce nouage là, *mirage&tournage*.
Il sera question d'une logique où en lieu et place des objets "sémantiques" de la logique mathématique traditionnelle (qui sont les algèbres de Boole, de Heyting, algèbres cylindriques) nous aurons des objets "sémantiques" géométriques comme la bande de Moebius et les fibrés, et, par suite, des algèbres de Grassmann, des algèbres de Clifford.

u/ A ce point disons que pour obtenir une logique il faut d'abord poser une "ambiguïté" (i.e. un principe de fusion) soit un groupe **G**, puis une "localisation" (i.e. un principe de distinction, de hiérarchie) soit un espace **B**, et ensuite établir une tension entre **G** et **B**, soit donner un fibré de groupe **G** et de base **B**, et enfin décrire dans ce fibré une connexion (i.e. une "loi" - il faudrait expliquer ceci plus en détail). On dispose alors d'un "monde-de-parole".
Signalons aussi qu'il y aurait lieu de remplacer le groupe **G** et l'espace **B** par la donnée de deux catégories ; nous avons pour cela des arguments (raisons structurelles ou exemples) très précis, que nous ne développerons pas ici.
Du point de vue de la vérité, le parti pris ici est que la vérité n'est pas la pure réponse à une alternative inquisitrice, n'est pas une mesure, un nombre, ni une figure ni un nom, ni rien d'abréviatif ou d'économisant a priori, mais qu'elle existe de façon dynamique, qu'elle a une structure, ou mieux, qu'elle *est* une structure, la structure d'un monde-de-parole. Et cette structure est *géométrique*, et comporte donc en particulier un aspect topologique. Le problème de la vérité de la parole a à voir avec de la topologie parce que nous le considérons comme un problème de *logotopie*.

v/ Imaginons que la production de texte en une grammaire s'identifie au traçage de lignes continues lisses sur une surface transparente **B**. Par exemple sur une sphère transparente. En chaque point de la surface il y a une "alternative" (à

multiples choix) qui est le problème du choix de la direction vers laquelle le traçage va se poursuivre, la détermination de la tangente à la ligne comme point de fuite du discours dans l'instant. L'espace de toutes ces directions est isomorphe au plan tangent à la surface au point considéré ; il a une structure linéaire et métrique, et le groupe des isométries linéaires du plan réel $\mathbf{R}^2$, noté GL(2,**R**) = **G**, agit dessus. Etre attentif à l'équivoque dans le texte c'est alors considérer que précisément ce n'est pas **B** seul (la grammaire explicite) qui est en jeu, mais aussi ce groupe **G** comme analyse positive de l'ambiguïté à chaque instant, et ce qui va rendre compte de la tension entre **B** comme pure grammaire explicite où le texte s'inscrit et cette ambiguïté **G** sans laquelle la question de la poursuite, de l'à venir, et partant de la la question même du désir et de la pulsion, reste ineffable et a priori close d'avance, ce sera un fibré de base **B** et groupe **G**, à savoir le fibré tangent à **B**, noté **TB**, dont la fibre $(\mathbf{TB})_b$ au point b de **B** est le plan tangent à **B** en b.
Le fibré étant fixé, on considère que le texte comme chemin dans **B** a d'une part une structure métonymique qui est de l'ordre de la pure substitution interne d'une lettre à une autre dans la "grammaire", soit ce qu'on en observe "horizontalement" du seul point de vue interne à **B**, et d'autre part une structure métaphorique qui est le rapport "vertical" (c'est-à-dire le long des fibres) de **B** à **G**, invisible comme chemin dans **B**, lié à du mouvement dans les fibres, inscrit dans le fibré, dans l'épaississement de **B** qu'est le fibré. Et métaphore et métonymie ne sont pas sans rapport, c'est la question de la loi, de la connexion.

w/ Alors à force d'écrire sur la surface transparente **B**, je fini, sans que cela ne s'achève jamais, par en deviner la forme. De même qu'en tournant autour d'une sphère je fini par la percevoir dans son intégrité de sphère. Cette *divination naturelle* est possible donc si l'on "voit" la surface de façon extrinsèque, comme plongé dans un espace plus vaste où nous résidons, extérieurs à la surface (revoir le § **2. o/**). Mais cela n'est pas exactement nécessaire. Il suffit, si nous résidons sur la surface même, sans possibilité de la voir depuis son extérieur, que nous y disposions d'un souvenir de ce plongement, d'une information intrinsèque à la surface sur la façon dont elle est plongée dans l'espace. Cette information est la donnée de la possibilité de mesurer les longueurs sur la surface (comme l'arpenteur mesure les longueurs sur la surface courbe de la terre, en posant son mètre sur la dite surface, ou en comptant ses pas dessus), et pour cela il suffit de disposer de la mesure des longueurs infinitésimales, les longueurs finis s'obtenant ensuite par intégration. Techniquement, cela s'inscrit comme la structure métrique sur les espaces tangents en chaque point, soit ce qu'on appelle la structure *riemannienne* de la surface. En fait cette structure riemanniennne n'intervient que par la connexion qui lui est associée, et la courbure de cette connexion. Ainsi cette divination n'est possible que par un épaississement, une "sortir infime" de la surface, que par quelque chose qui livre l'équivoque de chaque instant, que par la *structuration de l'équivoque* à chaque instant. Disons que du sens global sur le discours, et en particulier la saisie de ce discours comme poursuite, ne peut émerger sans métaphorisation.

Donc, de nos sens, à partir d'informations locales dynamiques, nous procédons à une *intégration*, un calcul intégral, nous livrant de la qualité globale de l'objet. Dans l'observation d'une surface **B**, nous percevons sa courbure (et si nous sommes *sur* la surface, seulement sa *courbure gaussienne* κ), et notre circulation autour (ou au-dedans) de l'objet, intègre cela et nous donne le type topologique de la surface. Plus précisément si la surface est bornée, sans bord, orientable, nous savons que son type topologique est caractérisé par un nombre que l'on appelle son *genre* et que l'on note g, ce genre étant 0 pour la sphère, 1 pour le tore (qui est la bouée), 2 pour le "tore à deux trous", etc, le genre étant précisément défini comme le nombre *maximal* de coupures, exécutées chacune suivant un cercle fermé non réduit à un point, que l'on peut effectuer dans la surface, *sans qu'il soit obligatoire* que la surface soit alors découpée en morceaux *disjoints*, soit alors composée de plusieurs composantes connexes. Autrement dit, le genre de **B** est > n si et seulement si il existe n coupures distinctes qui, une fois effectuées laissent **B** d'un seul tenant. On sait, donc, que deux surfaces bornées, sans bord, orientables, sont homéomorphes (i.e. en bijection continue l'une sur l'autre) si et seulement si elles ont le même genre. Je dis, donc, que notre processus d'intégration nous livre le genre. Ainsi, nous finissons par conclure : "c'est une sphère", ou bien "c'est un tore", etc. Du point de vue mathématique, l'articulation entre la donnée locale de κ et la donnée globale de g, est fourni par la formule intégrale de Gauss-Bonnet :

$$\int_{\mathbf{B}} \kappa = 4\pi(1-g)$$

Par exemple pour une sphère on a $\kappa = 1/R^2$, où R est le rayon de la sphère, et on a $\int_{\mathbf{B}} (1/R^2)d\sigma = 4\pi R^2(1/R^2) = 4\pi = 4\pi(1-0)$, donc $g = 0$.

Pour un tore d'équation paramétrée

$$f(s,\vartheta) = [(a+b\cos s)\cos\vartheta,\ (a + b\cos s)\sin\vartheta,\ b\sin s)$$

on trouve $\kappa = (\cos s)/(b(a + b\cos s))$, puis en intégrant $g = 1$.

On considère donc que la vérité locale de **B** est sa courbure gaussienne, et que sa vérité globale est son genre, et que le passage intégrant le local en global est la formule de Gauss-Bonnet. Ceci dit, donc, pour le fibré tangent à **B**. Pour des fibrés plus généraux, la théorie correspondante est la théorie des classes caractéristiques.

x/ La vérité de la vérité n'est pas plus sa composante globale que sa composante locale, ni seulement la procédure d'intégration en information globale des informations locales. C'est plutôt la tension complète même entre local et global comme contradiction, et donc la structure même du va-et-vient entre local et global. Il est donc essentiel dans ce point de vue de ne pas négliger l'analyse de la localisation, de comment de l'information globale retombe dans le local. Voici un exemple d'analyse dans ce sens.

Considérons une surface **B** décrite de façon combinatoire comme collage par leurs bords deux par deux de polygones en nombre fini, soit comme un polyèdre. On suppose **B** sans bord, orientable. Alors on pose χ = F-A+S, avec F le nombre de face, A le nombre d'arêtes, et S le nombre de sommets du polyèdre **B**. On a alors que

$\chi = 2(1-g)$, où g est le genre de la surface. Ainsi si **B** est homéomorphe à une sphère on a $g = 0$, donc $\chi = 2$. De là résulte une information observable localement sur **B**. Par exemple on peut montrer que, si $\chi = 2$, alors **B** *ne peut pas* être constituée uniquement de faces hexagonales, et donc en circulant sur **B**, on va nécessairement rencontrer une face non-hexagonale si l'on va partout. Ou si l'on veut, la sphère est un objet impossible à construire pour qui ne disposerait comme moyens que du collage d'hexagones, de sorte que si l'on sait que $\chi = 2$, on sait que la structure de ce **B** que l'on parcourt nécessite pour être élucidée de sortir de ces moyens.

En voici la preuve.

Soit F_i le nombre de faces à i sommets. Alors on a

$$\Sigma F_i = F,\ \Sigma iF_i = 2A,\ \Sigma iF_i \geq 3S,\ F-A+S = 2,$$

et donc $6(F-A+S) = 12$ donne $6\Sigma F_i - 3\Sigma iF_i + 2\Sigma iF_i \geq 12$, donc $\Sigma(6-i)F_i \geq 12$, soit $[6F_0+5F_1+4F_2+3F_3+2F_4+F_5] - [F_7+2F_8+\ldots] \geq 12$, et comme en fait $F_0=F_1=F_2=0$, on obtient $3F_3+2F_4+F_5 \geq 12$, et par suite on a $F_3>0$ ou $F_4>0$ ou $F_5>0$, ce qui signifie qu'il y a au moins une face avec moins de 6 sommets. En fait, plus précisément, de $3F_3+2F_4+F_5 \geq 12$ on tire qu'il y a au moins 4 faces avec chacune moins de 6 sommets.

On remarque aussi que si **B** ne comporte pas de faces triangles, alors il y a au moins 6 faces carrés ou pentagones.

Et on remarque enfin qu'effectivement avec 4 triangles on peut faire une sphère (comme tétraèdre), et qu'avec 6 carrés on peut faire une sphère (comme cube).

De même soit S_i le nombre de sommets i-dièdres (i.e. où aboutissent i arètes. Alors on a $\Sigma iS_i = 2A$, donc $F-A+S = 2$ donne $\Sigma 4F_i - \Sigma iF_i - \Sigma iS_i + \Sigma 4S_i = 8$, soit $\Sigma(4-i)(F_i+S_i) = 8$, soit, comme $S_0=S_1=S_2 = 0$, $[F_3+S_3] - [(F_5+S_5)+2(F_6+S_6)+\ldots] = 8$, donc $F_3+S_3 \geq 8$.

Ainsi si un polyèdre homéomorphe à la sphère est réalisé par collage par leurs bords deux par deux de quadrilatères, il faut au moins 6 quadrilatères, et il y aura au moins 8 sommets 3-èdres. On constate qu'ainsi le cube est un modèle "en quadrilatères" optimum.

y/ Ainsi la vérité d'une logique comme fibré est d'abord de savoir si ce fibré est trivial (c'est-à-dire plus précisément s'il est isomorphe à un fibré trivial), soit sa courbure ou ses classes caractéristiques. Mais ensuite il s'agira de savoir si un fibré **X**, de base **B** et groupe **G**, est isomorphe à un autre fibré **Y**, de base **B** et groupe **G**, et plus généralement encore de déterminer les morphismes de **X** à **Y**. Aussi si chaque fibré est considéré comme une logique mettant en tension de la fusion et de la distinction, alors la logique de ces logiques est naturellement la catégorie dont les objets sont ces fibrés, et dont les morphismes sont les morphismes de fibrés. On considère donc que chaque morphisme entre fibrés est une "émergence de sens" entre les deux logiques distinctes **X** et **Y**, entendant donc qu'il y a du sens en vertu de l'imcompatibilité entre **X** et **Y**, et en dépit de leur isomorphie. Dans la ligne de cette "philosophie" on considère donc comme identique des fibrés isomorphes, et on dit de deux fibrés isomorphes qu'il définissent le même cardinal de type $(\mathbf{G},\mathbf{B})$, et on désigne par $\mathbb{CARD}(\mathbf{G},\mathbf{B})$ la classe de ces cardinaux. De ce point de vue, la logique de type $(\mathbf{G},\mathbf{B})$ commence par une arithmétique, par la détermination de la structure de $\mathbb{CARD}(\mathbf{G},\mathbf{B})$. Si $\mathbf{G} = \mathfrak{S}1$, le groupe à un élément et si $\mathbf{B} = \mathbf{1}$, l'espace à un point, alors il s'agit des cardinaux ordinaires de la théorie des ensembles, les fibrés de type $(\mathfrak{S}1,\mathbf{1})$ étant tout simplement les ensembles (dans ce cas toutes les données en plus de l'ensemble **X** sont "dégénérées"). Un premier cas non-classique consiste en $\mathbb{CARD}(\mathfrak{S}2,\mathbf{1})$ que j'appelle le semi-anneau des cardinaux-miroirs.Dans des cas plus complexes, la détermination de $\mathbb{CARD}(\mathbf{G},\mathbf{B})$ ou du moins d'une "partie" de l'information contenue dans $\mathbb{CARD}(\mathbf{G},\mathbf{B})$ relève de ce que l'on appelle la K-*théorie*, K-théorie que j'envisage donc ici comme "appareillage arithmétique" de l'étude des "logiques".

De ce point de vue "arithmétique", chaque fibré **X** est d'une part un élément de $\mathbb{CARD}(\mathbf{G},\mathbf{B})$, et d'autre part un pont entre **G** et **B**, et par suite permet une comparaison entre $\mathbb{CARD}(\mathbf{G},\mathbf{1})$ et $\mathbb{CARD}(\mathfrak{S}1,\mathbf{B})$. On considère donc que la détermination et la comparaison abstraite de ces semi-anneaux $\mathbb{CARD}(\mathbf{G},\mathbf{B})$ a du sens logique, et plus spécialement, vue ce que nous avons développé plus haut, à du sens par rapport à la question logique de la métaphore.

z/ Pour terminer, je voudrais mettre sous les yeux du lecteur deux objets à peine plus compliqué que $\mathfrak{S}2$ et S^1, à savoir $\mathfrak{S}3$ et S^2, laissant au lecteur le plaisir d'examiner, en allant au besoin parcourir les livres de topologie, ce qui pourrait les mettre en tension, les nouer de manière non-triviale.

$\mathfrak{S}3$ est le groupe de toutes les permutations possibles sur 3 éléments , éléments désignés par 1,2, et 3, de sorte que $\mathfrak{S}3$ comporte 6 éléments qui sont écrit ainsi :
$\iota=(123)$, $\sigma^+=(231)$, $\sigma^-=(312)$, $\tau_1=(132)$, $\tau_2=(321)$, $\tau_3=(213)$.
Ces écritures fonctionnent ainsi : si les trois éléments sont écrit dans l'ordre 1^{er}, puis $2^{ème}$, puis $3^{ème}$, alors, par exemple, τ_1 les ré-écrit en laissant le 1^{er} à sa place et en échangeant $2^{ème}$ et $3^{ème}$, σ^+ les ré-écrit en plaçant le 1^{er} en $3^{ème}$, le $3^{ème}$ en $2^{ème}$, et le $2^{ème}$ en 1^{er}, et de même pour les autres éléments de $\mathfrak{S}3$. Alors ces 6 éléments de $\mathfrak{S}3$ se composent entre eux, en désignant par $\alpha.\beta$ la composée des permutations α et β, $\alpha.\beta$ est la permutation dont l'effet s'obtient en faisant sur une écriture de trois éléments agir d'abord la permutation β, puis en faisant agir sur le résultat la permutation α. Ainsi tous les composées entre eux des éléments de $\mathfrak{S}3$ sont donnés par la "table de composition" ci-après, où l'on peut donc "lire" que, par exemple, $\sigma^-.\tau_1 = \tau_2$, $\tau_2.\sigma^+ = \tau_3$, etc.

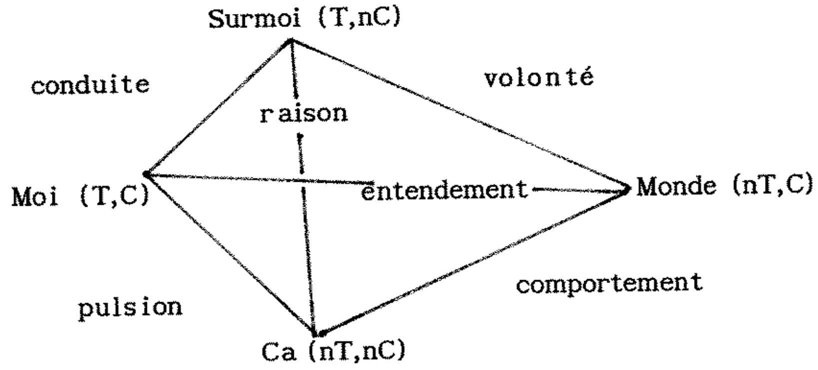
.	ι	σ^+	σ^-	τ_1	τ_2	τ_3
ι	ι	σ^+	σ^-	τ_1	τ_2	τ_3
σ^+	σ^+	σ^-	ι	τ_3	τ_1	τ_2
σ^-	σ^-	ι	σ^+	τ_2	τ_3	τ_1
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	ι	σ^+	σ^-
τ_2	τ_2	τ_3	τ_1	σ^-	ι	σ^+
τ_3	τ_3	τ_1	τ_2	σ^+	σ^-	ι

Qu'est-ce à compter?
On doit donc considérer ce groupe comme l'analyse de l'ambiguïté dans la saisie de trois objets, par exemple dans le parcours de

l'oeil sur une multiplicité d'objets en vue de les compter. On sait que le résultat du compte ne dépend pas du parcours choisi, et que néanmoins le choix d'un parcours est nécessaire pour effectuer le compte. Ainsi dans le comptage de trois éléments il y a une ambiguïté en action, représentée par $\mathfrak{S}3$, et d'autant plus importante qu'elle peut ne pas être relevée, puisque des choix indispensables qu'elle sous-tend il ne reste rien à la fin. C'est comme le statut du métaphorique.

S^2 est, combinatoirement parlant, présentable comme un tétraèdre, constitué donc de 4 sommets reliés deux par deux par une arête, soit en tout 6 arêtes distinctes, et chaque trio constitué des arêtes ne contenant pas l'un sommet formant une face, soit en tout 4 faces.

Dans sa thèse intitulée *Utopie et Uchronie, théorie de l'équivoque* (Lille III, 15/4/1972), Duponchel propose un schéma tétraédrique pour exprimer "l'unité du phénomène humain", et il le commente par rapport à Freud, à Heiddeger, à Sartre. Mais ici je ne m'intéresses pas à la pertinence de l'analyse de Duponchel, mais seulement à la portée d'un tel geste de proposer un schéma, d'abord, pour commencer. Son schéma est le suivant :



Qu'est-ce à voir ?

Le point essentiel est donc l'usage d'une écriture non-linéaire, donc de lecture équivoque, multiple, quoi que parfaitement rigoureuse et précise. Il est donc proposée une théorie du sujet sans point de vue, à partir d'un non-point de vue, qui est la structure (tétraédrique ici) du sujet considéré comme un système d'instances articulées (et non pas disjointes), chaque instance étant donc un point de vue sur le sujet en tant que lien entre les autres instances via les articulations. De plus il y a donc les articulations, soit les arêtes et les faces, les arêtes que Duponchel appelle des segments de vues. En fait chaque sous-espace du tétraèdre est un "lieu de vue", et comporte une logique propre qui lui est attachée, et ces diverses logiques sont nouées par le tétraèdre. Chaque logique associée à chaque sommet est ici spécifiée par T (tautologique) ou nT (non-tautologique), et par C (contradictoire) ou nC (non-contradictoire).

Ultérieurement, pour une étude systématique de la topologie du sujet comme système d'instances articulées, il conviendra de comparer ce schéma à d'autres schémas du même style, comme ceux de Sampaio, d'Abellio, de Berne.

4. Conclusion.

Ainsi il apparaît que le *travail* des mathématiciens avec les groupes de Galois, de Lorentz, avec les espaces, et avec les espaces fibrés, réalise en fait le lieu d'une logique dont le coeur est la question philosophique de la tension entre même et change, dont le premier modèle non-trivial est la bande de Moebius. Ce travail établit essentiellement une arithmétique du va-et-vient local/global, et cette arithmétique exprime *dynamiquement* (i.e. d'une façon qui non seulement propose des objets à métaphoriser mais les insère dans la pratique d'un calcul constitué où la *lettre obscure* peut oeuvrer) une logique de la composante rationnelle du lien entre conscient et inconscient, de ce que j'appelle aussi la *courbure de la raison.*