La pulsation du ternaire au binaire [*]

René Guitart

1 Motif général et deux remarques— En mathématiques il y a des groupes et des ordres partout, et, unifiant ces deux notions, la notion de catégorie est omniprésente. Côté structures algébriques, tout semble donc réglé en une affaire d'abord de lois binaires associatives et unitaires, éventuellement partielles. Ainsi au jeu de la sélection mathématique naturelle, les lois de monoïdes —éventuellement de monoïde dans les graphes ou dans un topos — semblent les grandes gagnantes, au point que certains catégoriciens en voient partout (avec de bonnes raisons).

Évidemment on dira avec raison que, historiquement parlant, le "2" est préféré au "3" parce que nous avons depuis très longtemps l'exemple-maître des quatre opérations binaires d'addition, soustraction, multiplication et division des nombres. Et aussi il y a le fait que les structures classiques admises disons vers 1950, à savoir d'abord celles de groupe et de treillis, se trouvent être binaires. Mais est-ce une raison mathématique nécessaire ? Et si on les examine de près ces opérations sont-elles proprement et naturellement binaires ?

Je me demande si l'usage exclusif de telles structures *binaires* est bien naturel, et tout spécialement s'il n'y a pas des situations, notamment géométriques ou physiques, où ce seraient plutôt des lois *ternaires* qu'il faudrait considérer, quitte cependant à dégager et promouvoir pour de telles lois l'analogue de l'associativité et l'unitarité. En fait je voudrais maintenant commencer à articuler une tension entre le ternaire et le binaire, en posant le problème de construire des représentations universelles de l'un dans l'autre. Comme début de réponse à ce questionnement je proposerai seulement ici en conclusion de ce premier examen une double proposition d'enquête technique, touchant aux *transitions* et à l'*implication relative.*

2 Le ternaire natif en géométrie — Il serait impossible de penser la géométrie en restant dans le binaire sans penser au moins "par trois", puisque déjà la relation fondamentale d'alignement est ternaire. Et pire, la relation de cocyclicité est quaternaire. De plus beaucoup de résultats en géométrie énoncent que certaines opérations ternaires sont possibles. Je n'en indiquerai que deux exemples. Le premier exemple est le cercle de Monge, qui est le cercle orthogonal à trois cercles donnés. Le second exemple est l'opération qui résulte du théorème de Petersen-Morley, qui dit que, étant données trois droites a, b, c, puis les perpendiculaires communes deux à deux a' perpendiculaire à b et c, b', perpendiculaire à c et a, et c' perpendiculaire à a et b, on considère a'' perpendiculaire commune à a et a', b'' perpendiculaire commune à b et b', c'' perpendiculaire commune à c et c'. Alors il existe une unique droite $[abc]$ perpendiculaire à a'', b'' et c''.

3 D'un retour du ternaire en physique — En physique et mécanique, on semblait avoir réduit les enjeux structurels à du binaire, en termes d'algèbres de Lie ou de Jordan, mais un retour du ternaire refoulé se profile. Partant d'une algèbre associative complexe A, on lui associe classiquement

[*] *Conférence tenue au SIC à Paris le 24 octobre 2009.*

une algèbre de Lie pour la loi $[x, y] = xy - yx$, et une algèbre de Jordan pour la loi $x \circ y = xy + yx$. Depuis les années 1970, on considère aussi des structures ternaires et notamment l'algèbre de Nambu où l'on axiomatise l'opération $[xyz] = xyz + yzx + zxy - yxz - xzy - zyx$.Partant d'une algèbre de Lie abstraite on sait comment la plonger dans une algèbre associative complexe enveloppante (Poincaré-Birkhoff-Witt). Il se développe de même des recherches de réalisation d'algèbre de Nambu.

Pour la physique toujours, avec l'algèbre d'Hestenes on axiomatise $[xyz] = xy^*z$, où y^* est la conjugée transposée de y.. L'algèbre d'Hestenes elle est tout-à-fait comparable à la démarche des demi-amas, où en effet, considérant l'ensemble des relations binaires $\mathcal{P}(E \times F)$ de E vers F on ne voit pas comment introduire de composition binaire sur $\mathcal{P}(E \times F)$, alors qu'en revanche il y a là une loi ternaire naturelle qui est décrite par $[RST] = RS^{\mathrm{op}}T$, en retournant la relation centrale !

4.1. L'affine – Un premier exemple essentiel est le cas de *l'espace affine*. Si A est un anneau de scalaires fixé, un A-espace affine E est déterminable par les lois 3-aires $\beta_{(a,b,c)}$ de barycentrage ternaires

$$(A, B, C) \mapsto M = \beta_{(a,b,c)}(A, B, C) = aA + bB + cC, \qquad (a + b + c = 1),$$

et notamment la loi ternaire $\beta_{(1,1,-1)}$ produisant le parallélogramme $ABCD$ à partir de A, C, D :

$$B = A + C - D.$$

Si par exemple $A = \mathbb{F}_2$ alors le barycentrage ternaire $\beta_{(1,1,-1)} = \beta_{(1,1,1)}$ ne peut pas s'obtenir à partir des barycentrages binaires qui sont dégénérés. Toutes ces lois ternaires sur les *points* peuvent être réunies en une seule loi ternaire partielle β sur les triplets de *points matériels* (a, A), définie justement pour les triplets $((a, A), (b, B), (c, C))$ tels que $a + b + c \neq 0$, par

$$\beta((a, A), (b, B), (c, C)) = \left(a + b + c, \frac{a}{a + b + c}A + \frac{b}{a + b + c}B + \frac{c}{a + b + c}C\right).$$

Les axiomes de la structure affine sont que cette opération est unitaire et associative. Pour les exprimer il faut utiliser les barycentres quaternaires, déterminés à partir des ternaires. La structure considérée est donc essentiellement ternaire et, de façon dérivée nécessaire, quaternaire. Surtout, je retiens qu'elle n'est pas binaire.

Évidemment, dès que l'on fixe un point O dans l'espace, pour servir d'origine, toute la structure peut se binariser autour de ce point, tout peut se décrire en les termes binaires d'une structure vectorielle E_O. Mais, en érigeant une origine, en pointant l'espace E donc par le point O, on a implicitement changé les morphismes, car ce qui est compatible avec la structure affine (i.e. avec le calcul barycentrique), ce sont les applications affines, tandis que ce qui est compatible avec la structure vectorielle, eh bien ce sont les applications linéaires. Enfin, soulignons que la structure E_O dépend de O, mais n'en dépend qu'à isomorphisme près.

4.2. Autre ternarisation opérationnelle de l'affine plan : les vertus du $ax + b$ — En 1943, pour l'étude de la géométrie plane, en pensant à l'équation des droites $y = ax + b$, Hall a introduit la loi ternaire que l'on trouve dans les anneaux sous la forme

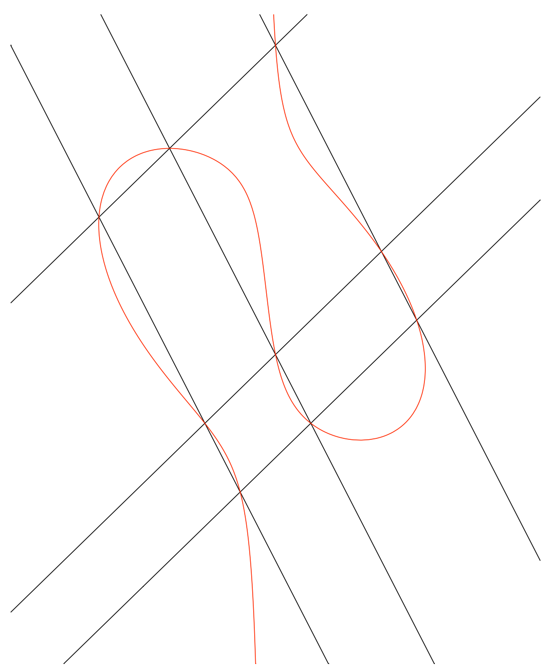
$$[abc] = ab + c,$$

il l'a axiomatisée sous le nom de *planar ternary ring*, par les propriétés suivantes :
1 – [a0b] = [0ab] = b, $[1a0] = [a10] = a$,
2 – Pour tous a, b, c, d avec $a \neq c$, il existe un unique x tel que $[xab] = [xcd]$.
3 – Pour tous a, b, c, il existe un unique x tel que $[abx] = c$.
4 – Pour tous a, b, c, d avec $a \neq c$, il existe un unique (x, y) tel que $[axy] = b$ et $[cxy] = d$.

5 Les cubiques et leurs lois —Un deuxième exemple est la question de *la loi de groupe sur une cubique* $\mathcal{C}$. En fait, pour la construire il faut là aussi choisir un point E (sur la cubique), et en fait ce que l'on a naturellement sans choix de point, eh bien c'est une loi ternaire, celle qui au triplet (A, E, B) associe $A +_E B$, point d'intersection avec la cubique de la droite qui joint E et le point AB où la droite qui joint A et B coupe la cubique (voir la figure en page suivante). On a donc un groupe $\mathcal{C}_E$, et comme dans l'exemple précédent, ce groupe dépend du choix de E, mais n'en dépend qu'à isomorphisme près.

En fait il vaut mieux considérer d'abord la loi binaire (de Steiner) qui à A et B associe AB, et en constater la propriété fondamentale, le théorème de Lamé qui dit que $(AB)(CD) = (AC)(BD)$, et dont la loi de groupe se déduit. Ce fait est attaché au paradoxe de Cramer, comme en traitait Euler : considérons les deux cubiques $(y-x)(y-x-3)(y-x+1) = 0$ et $(y+2x)(y+2x-3)(y+2x+2) = 0$. Ces deux systèmes de trois droites parallèles se coupent en neuf points. Pourtant, une cubique étant de degré 3 elle est, en général, déterminée par 8 points sur elle. Mais précisément avec les points d'intersections de deux cubiques nous ne sommes, ni sur l'une ni sur l'autre, dans la situation générale, le rang du système d'équations pour déterminer les coefficients d'une cubique passant par là est abaissé. D'ailleurs, il passe par là toutes les cubiques du faisceau

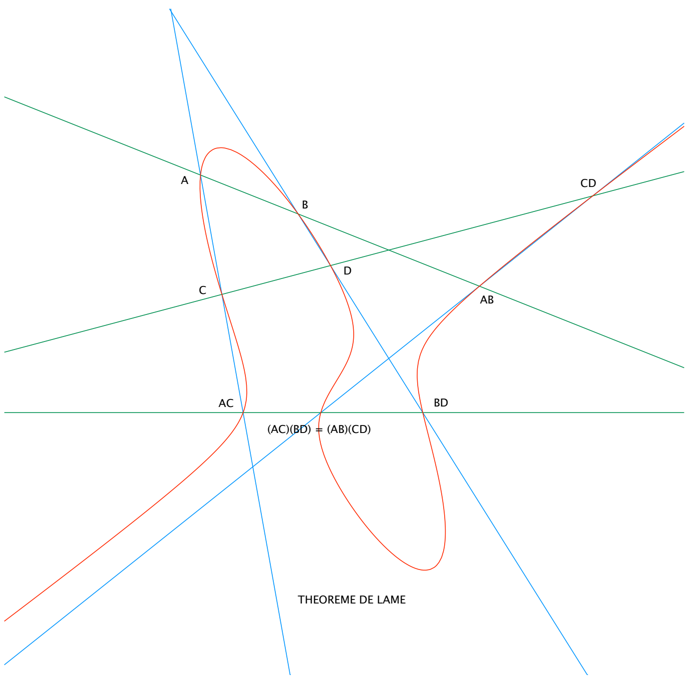
$$\lambda(y-x)(y-x-3)(y-x+1) + \mu(y+2x)(y+2x-3)(y+2x+2) = 0.$$



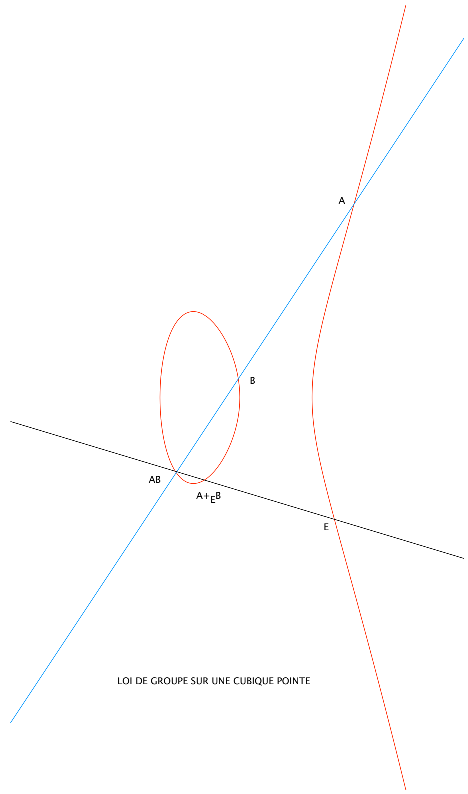
On dessine ici en rouge $(y-x)(y-x-3)(y-x+1) - (y+2x)(y+2x-3)(y+2x+2) = 0.$

Considérons sur une cubique quelconque, quatre points quelconques A, B, C, D. Alors on a :

$$(AB)(CD) = (AC)(BD).$$



THEOREME DE LAME



LOI DE GROUPE SUR UNE CUBIQUE POINTE

En fait donc on préférera considérer comme plus directe et naturelle la loi ternaire

$$[EAB] = E(AB) = A +_E B,$$

sans y fixer la valeur de E.

6. La logique sans vérité — Je considère maintenant la structure peu connue mais très importante ici de *l'algèbre de Whiteman* (1936). Il s'agit d'un ensemble E avec une loi ternaire $[abc]$ telle que $[abc] = [bca]$, et telle que, en posant $[aaa] = a'$ on ait $[a'bb'] = a$ et $[ab[cde]'] = [[abc]'abd]'e]$. Si l'on choisit un élément quelconque u de E, en posant $Z = u'$, $a + b = [abu]'$, $ab = [abZ]'$, E devient une algèbre de Boole E_u (Nous prenons ici la notion d'algèbre de Boole comme définie par Huntington, en 1913, pour axiomatiser le calcul de Boole des années 1850 ; mais il existe aujourd'hui de nombreuses axiomatisations équivalentes) et on a

$$[abc] = a'b' + b'c' + c'a'.$$

De plus, E_u dépend du choix de u, mais n'en dépend qu'à isomorphisme près.

Ainsi l'algèbre de Whiteman est à l'algèbre de Boole ce que l'espace affine est à l'espace vectoriel. Dans une telle algèbre il n'y a pas de vérité ou de faux de référence, où s'originerait le calcul propositionnel. Toute proposition peut y servir de représentant idéal du faux, d'origine.

7.1. Les 3-groupes — J'en viens maintenant au cas d'un 3-*groupe*, soit un ensemble E muni d'une loi ternaire $[wxy]$ telle que l'on ait :
1- (simplifiabilité) : si $[wxy] = z$, si trois des éléments sont connus, le dernier existe et est unique.
2- (associativité) : $[vw[xyz]] = [v[wxy]z] = [[vwx]yz]$.
Ces axiomes généralisent à l'arité 3 une des axiomatiques possibles pour les groupes ordinaires. Si G est un groupe, c'est aussi un 3-groupe pour la loi $[xyz] = x(yz)$. De plus une partie E d'un groupe G peut très bien être stable par composition par trois mais pas par composition par deux (comme on peut voir en considérant dans le groupe $G = \mathcal{S}(n)$ l'ensemble $\mathcal{I}(n)$ des permutations impaires) ; cette partie E de G est alors un 3-groupe qui n'est pas un groupe. En fait Post a prouvé que tout 3-groupe pouvait se voir ainsi, comme sous-3-groupe d'un groupe, autrement dit que tout 3-groupe se plonge dans un groupe.

On retiendra enfin le théorème suivant de Glushkin-Hosszu : soit E un 3-groupe. Faisons le choix d'un élément quelconque u de E, et posons $x.y = [xuy]$. Cette loi est associative, et avec élément neutre l'unique v tel que $[yuv] = [uvy] = y$; c'est donc une structure de groupe E_u sur E. De plus, E_u dépend du choix de u, mais n'en dépend qu'à isomorphisme près. Enfin, si l'on pose $h(x) = [vxv]$ et $b = [vvv]$, alors la loi ternaire se représente par :

$$[wxy] = w.h(x).h(h(y)).b.$$

7.2. Autre ternarisation opérationnelle des groupes — La structure de groupe peut s'axiomatiser encore par une loi ternaire comme l'a fait Jeremiah Certaine. Soit sur un ensemble E une loi ternaire $[abc]$ et un élément u, tels que :

$$[[auc]de] = [au[cde]],\ [auu] = a,\ [aau] = u.$$

Alors, en posant $a.b = [aub]$ on obtient un groupe. Et de plus on a

$$[abc] = a.b^{-1}.c,$$

si et seulement si $[[abc]de] = [ab[cde]]$, si et seulement si $[bba] = a$.

7.3. Ternarisation relationnelle des groupes abéliens — La loi d'un groupe abélien peut s'analyser par les propriétés d'une relation ternaire sur un ensemble E, comme l'a proposé Rainich, en pensant donc à la relation

$$a + b + c = 0,$$

noté $A(abc)$, dont il propose les axiomes suivants :
1 – La relation $A(abc)$ est symétrique.
2 – Pour tous u, v il existe un x de E tel que $A(uvx)$.
3 – Propriété des $9 = 3 \times 3$ points : Si l'on considère 9 points de E mis en un tableau 3×3, et si cinq lignes ou colonnes du tableau

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

sont formées d'éléments vérifiant A, alors il en est de même de la dernière.
Ce dernier axiome fait penser au théorème de Lamé que nous avons vu dans le cas des cubiques.

Alors, si l'on fait le choix d'un élément u quelconque, on définit une addition de groupe abélien en posant

$$a + b = s \Leftrightarrow A(abc) \& A(csu).$$

8 Des lois binaires aux relations ternaires, et retour — Évidemment une loi binaire détermine, par son graphe, une relation ternaire. On est intéressé à la réciproque, et pour cela je me tourne vers le théorème suivant, démontré par Ginsburg et Tamari : soit E un ensemble et T une relation ternaire sur E, soit $T \subseteq E^3$. Alors on peut construire un ensemble N(on peut prendre par exemple $N = 3E + 2E^2$) et une injection

$$r : E \to \mathcal{P}(N \times N)$$

de sorte que $(a, b, c) \in T$ si et seulement si $r(c) \supseteq r(b) \circ r(a) \neq \emptyset$..

On peut donc introduire dans l'algèbre relationnelle binaire sur N, la loi de composition imitée de celle de Hall pour les planar rings, définie par

$$[tsr] = t \cup (s \circ r),$$

que j'appelle l'opération *d'implication relative*, et exprimer la relation T par :

$$(a, b, c) \in T \Leftrightarrow \Big([r(c), r(b), r(a)] = r(c) \;\;\&\;\; [\emptyset, r(b), r(a)] \neq \emptyset\Big).$$

9 Conclusion : loi ternaires transitionnelles — Nombre d'exemples ci-avant relèvent donc de la situation que voici, que je qualifierai de situation transitionnelle. On considère une catégorie d'algèbres ternaires, dont chaque objet $(E, [\ ])$ est donc un ensemble E muni d'une loi ternaire $[\ ]$, où un morphisme $f : (E, [\ ]) \to (F, [\ ])$ est une application $f : E \to F$ telle que, pour tous $a, b, c \in E$ on ait $[f(a)f(b)f(c)] = f([abc])$. Pour chaque objet $(E, [\ ])$, et pour chaque élément $u \in E$, on note $E_u = (E, ._u)$ l'ensemble E muni de la loi binaire $x._u y = [xuy]$. Alors en fait si v est un autre élément de E, on a une bijection que l'on appelera une *transition* $\theta_{(u,v)} : E_u \simeq E_v$ qui permet de "passer" de $._u$ à $._v$. Le mélange des isomorphismes entre les structures binaires et les transitions produit les isomorphismes entre structures ternaires ou isotopies.

Ensuite, pour une loi ternaire transitionnelle qui peut s'analyser en lois binaires ainsi, par pointages, en tenant compte d'une théorie précisée des transitions, on peut — chaque loi binaire déterminant par son graphe une relation ternaire, et cette relation se représentant dans un semi-anneau ordonné — comparer ladite loi ternaire à l'opération d'*implication relative*. Mais la loi d'implication relative n'est pas elle-même transitionnelle. et on aimerait une loi transitionnelle concrète universelle, construite à partir d'un système de lois binaire, où puisse se représenter toute loi ternaire transitionnelle.

René Guitart, U. Paris Diderot Paris 7,
IMJ, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris
guitart@math.jussieu.fr