A LA LUMIERE DES MATHEMATIQUES ET A L'OMBRE DE LA PHILOSOPHIE

Dix ans de séminaire *mamuphi*

« Mathématiques, musique et philosophie »

Ouvrage réalisé sous la direction de
Moreno Andreatta, François Nicolas et Charles Alunni

Collection *Musique/Sciences*

LETTRES SCIENCES
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

ircam
Centre
Pompidou

Responsable de la communication
Claire Marquet

Cordination éditoriale et mise en page
Moreno Andreatta

Conception couverture
Jean-Claude Thevenon

ISBN 978-2-7521-0139-6

`www.editions-delatour.com`
`www.ircam.fr`

Table des matières

Modélisation qualitative catégoricienne : modèles, signes et formes

René Guitart

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 7 Denis Diderot

On veut commencer ici à cerner les enjeux de la modélisation ou du modelage et la possibilité de les écrire et les développer mathématiquement à l'aide de la théorie des catégories. Il s'agit d'identifier les contraintes principales pour le projet de la construction systématique d'une théorie catégorique de la modélisation, basée *ab initio* sur le seul usage des flèches et des propriétés universelles et d'exactitude, considérée ensuite comme une analyse du défaut d'universalité ou d'exactitude, et *in fine* comme un calcul catégorique de la variation et du nouveau comme cohomologie. Cette approche concerne aussi bien les modèles de la théorie mathématique des modèles que ceux fabriqués par l'ingénieur ou l'artiste, ou encore les théories de la nature et du monde, voire même les instruments et outils. Elle touche, en son départ, à la question de l'imitation et aux calculs de "différences" qualitatives, plutôt qu'aux questions a priori de logique, de déduction, de preuve et de vérité.

En mathématiques notamment cette approche vise à l'avancement théorique par analyse et synthèse des gestes d'imitations dans le travail mathématique avec les prétendus objets et leurs transformations, avec leurs coordinations, plutôt que par la formalisation univoque serrée d'un objet substantiellement construit et du calcul interne d'icelui. On ne la confondra donc pas avec le formalisme, ni avec un certain structuralisme formel.

Pour cette approche dans la science de la nature, ou dans les arts — mais nous ne développerons pas ce point ici — il serait question notamment d'éviter le recours a priori au numérique et à la mesure aveugle. Les modèles seront à élaborer au plus près des gestes du praticien.

Pour cette fois nous allons donc examiner seulement quelques aspects de trois points basiques : la question du sens même du terme "modélisation" — et des variations de sens qui sur ce point pulsent —, la question de la sémiotique et du système d'écriture que nous visons, par fléchages uniquement, avec ce que nous appelons les "autographes", et la question de la "forme" d'un objet inconnu (et notamment de tout système de signes) analysable comme un recollement de ses composantes connues.

Modèles

On commence par quelques observations sur l'équivocité propre au terme même de "modèle".

Admettons, comme le propose Herbert Stachowiak [1] que le modèle M soit toujours modèle de quelque chose (représentation), représentant des “originaux” O, qui sont naturels, artificiels, voire d'autres modèles, que le modèle ne soit pas identique à l'original mais en constitue une présentation réductrice (compression) c, et que le modèle soit instrumental pour de l'interprétation en vue de certains actes ou pensées (pragmatique). Sur la question cruciale de “l'original”, nous renvoyons aux travaux indispensables de Charles Alunni [2] notamment en relation avec la question de la *traduction*, de la trahison. En tous cas modéliser c'est à la fois nécessairement trahir *et* être fidèle, et nous soulignons cette hésitation constitutive du modèle : est-il un vrai modèle (une copie) ou un faux modèle (un original) ?

L'idée de modèle pulse entre idéal à réaliser et réalisation empirique d'un idéal : on pensera par exemple — comme le souligne Laurent Coppey — aux sens équivoques du terme “modèle” dans les phrases ”Je voudrais ce modèle de chaussure” et ”Ce modèle me fait mal au pieds”. On se demandera aussi si l'idée d'un modèle exceptionnel unique n'est pas paradoxale.

Et “Modèle” pulse encore entre fiction libre et explication, entre imitation et expression, traduction et trahison, duplication et duplicité, construction et déconstruction, transposition et interprétation, copie et motif, schématisme et systématisme, etc. Il y a là un vaste champ pulsatif à constituer, voire à modéliser, ce que nous ne ferons pas ici.

Nous n'irons pas plus loin maintenant dans cette direction d'analyse, et nous tiendrons compte essentiellement des seules conséquences des deux alternatives du concept et du savoir-faire, du monde et de l'entendement que nous explicitons maintenant, et à cause desquelles l'idée de modèle admet encore en gros quatre acceptions ou orientations, au demeurant bien évidentes :

– modèle théorique de la théorie (EC),

– théorique de la pratique (MC),

– pratique de la théorie (EF),

– pratique de la pratique (MF),

ainsi croisées :

	Concept	Savoir-Faire
Entendement	EC	EF
Monde	MC	MF

D'après Alain Badiou [3], Louis Althusser parlait de “théorie de la pratique théorique” pour parler de la philosophie comme science de l'effet de connaissance ; cela dit en entendant par “pratique théorique” la pratique scientifique, soit : les différentes sciences,

1. H. Stachowiak, *Allgemeine Modelltheorie*, Springer, Wien, 1973.

2. C. Alunni, 1) “La langue en partage”, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1989, n° 1, Armand Colin, p. 59-68 ; 2) *Tradition – Transmission – Traduction, l'action d'un foncteur universel*, HDR, Ecole Normale Supérieure, 15 novembre 2003.

3. A. Badiou, *Petit panthéon portatif*, La fabrique éditions, 2008, p. 61-62.

la mathématique, la philosophie. On situera cette détermination de la philosophie dans notre tableau comme la diagonale MC-EF.

– La *première alternative* porte sur *le sens de "cognitif"*. Si l'on considère que le modèle produit un lien de connaissance entre un phénomène observé et une théorie, ce lien est-il de nature (concevable) ou de fonctionnement (exécutable) ; c'est-à-dire le modèle déclenche-t-il le savoir sur l'objet en surplomb d'icelui et en semblant indiquer sa nature substantielle constitutive, comme quand on lit une carte, ou bien propose-t-il un lieu théorique d'activité, tel que l'activité en ce lieu soit éprouvable par celui qui la fait comme homologue à l'activité du système, comme quand on circule dans un labyrinthe ?

Voilà l'alternative encore : la carte du labyrinthe versus la circulation dans le labyrinthe.

Ceci n'est pas sans rapport avec une question centrale de l'intelligence artificielle : veut-on fabriquer une machine dont l'intérieur soit analogue à celui de notre cerveau, ou bien veut-on une machine dont les productions soit analogues à celles de notre cerveau ? Comprendre et modéliser le cerveau, est-ce comprendre la nature de ses constituants ou la nature de ses productions ? Le modèle permet-il de le voir et de s'identifier à ce qu'il est en substance, ou permet-il de se mettre à sa place pour produire ce qu'il produit ?

Retenons que dans le terme "cognitif" il y a cette pulsation entre connaissance accomplie et connaissance différée et à faire, entre compréhension par concept et compréhension par savoir-faire, les deux aspects étant aussi l'un la raison d'être de l'autre.

L'enjeu est entre, d'une part, la compréhension théorique, qui forme du lien achevé entre théories, de l'idéologique pure, et d'autre part la compréhension en acte, qui forme de la résonance ouverte entre gestes, et partant entre les gens, les praticiens d'artisanats, entre des savoir-faire.

Concernant par exemple la modélisation de la musique, nous nous rencontrons ici, dans l'attention à cette première alternative, avec la proposition de François Nicolas [4] d'élargir à un "ordre du faire" la question du rapport entre mathématique et musique, de sorte à "faire de la mathématique à partir de la musique, faire de la musique à partir de la mathématique".

Nous proposons alors de mettre en place ici des éléments d'une méthode de modélisation mathématique catégoricienne qui soit générale dans son principe, et valable notamment aussi bien du côté des concepts que du côté des savoir-faire.

– La *seconde alternative*, suivant l'axe de *la saisie du réel*, vise *le dilemme entre observer et comprendre* : ou bien mettre plutôt l'accent sur l'observation et la supposition qu'il y a un monde réel à observer, etc., l'objet réel, ou bien mettre plutôt l'accent sur l'intelligibilité, la supposition qu'il y a l'entendement, le sujet maître.

Il s'agit tantôt de modélisation d'une nature externe, d'une étrange répétition du monde, tantôt de modélisation de la compréhension interne, d'un paradoxal outil d'autoanalyse de l'entendement. Dans les deux cas on tombe donc sur le paradoxe qu'il y ait nécessité pour connaître de répéter quelque chose, du même ou de l'autre.

Et nous avons ensuite, paradoxal encore, qu'entre les deux points (le même et l'autre) il est urgent de ne pas choisir, si nous voulons envisager une théorie et une pratique de la modélisation accomplies, qui se fasse tension créatrice de calculs.

4. F. Nicolas, "Pour des rapports d'un type nouveau entre mathématiques et musique, en germe dans l'échange Euler/Rameau de 1752", *Journée "Mathématique et musique"*, SMF, 21 juin 2008.

Notre méthode catégoricienne de modélisation aura donc à fonctionner aussi bien vis-à-vis de la clarté du sens pour l'entendement que de la justesse dans la saisie du monde observable. Et donc, si elle est bien aussi respectueuse de la tension entre concepts et savoir-faire, elle devrait permettre de saisir les gestes de pensée et de perception.

L'approche catégoricienne que nous engageons, par les flèches et leurs propriétés, devrait permettre effectivement de tenir ensemble, en un monde de signes homogènes combinables, les pensées et les perceptions, les actions et les corps. Ceci parce que, une fois une donnée exprimée de façon spécifique, par une construction dans une catégorie qui lui est propre, elle peut être transformée en la spécification d'un régime d'assimilation ou bien finalement d'un fléchage associatif (au sens précisé au paragraphe suivant) voire d'une simple catégorie, ou d'un diagramme de catégories.

Dans cette approche, toute donnée, de n'importe quel niveau, est assimilable à une catégorie — et notamment la catégorie qu'est la forme d'un objet (voir au troisième paragraphe) — est la multiplicité d'une catégorie, et non pas l'Un d'un objet détaché : dès lors, toutes les données sont homogènes, comparables, et peuvent entrer dans un jeu d'échanges. Ce qui alors s'échange ce sont les nombres des multiples en cours et leurs variations, les substitutions de places et les déplacements provisoirement fixés : les calculs et les transmissions de calculs.

On poursuit en insistant sur le fait que sous le terme de "modélisation" — ou bien de "modelage", que nous traduirions en américain par "modeling" [of a system, of a process] — nous voulons donc très-expressément tenir ensemble les deux grandes variétés de "modèles" à tort fréquemment dissociées qui sont :

– d'une part, les *modèles scientifiques* du monde depuis l'époque de Thalès, les modèles pour les sciences physique, biologique, médical, sociologique, etc. (*Naturwissenschaften*) et les modèles pour l'ingénieur, dans divers artisanats ou arts, philosophie, histoire, etc., et jusqu'aux instruments et outils qui souvent subsument en actions des théories, et donc les "mathématiques mixtes" en un sens étendu (*Geisteswissenschaften*) ;
– et d'autre part, les "modèles" que sont les *théories*, et particulièrement les théories en mathématiques pures — classiques ou non — et les modèles de ces théories, ce que l'on nomme aussi les *structures*. En effet ces derniers modèles sont aussi des modèles scientifiques, relatif à la pratique de la science mathématique. Celà est d'autant plus vrai que l'on considère ces modèles non pas comme des élaborations logico-ensemblistes visant à assurer de l'existence "en substance" d'objets, mais comme des motifs et patrons d'activités, des gestes à reconnaître (*pattern recognition*) et refaire. En fait si l'on s'efforce avec ces modèles de réduire la tension inaugurale syntaxe/sémantique, on réalise alors le modèle comme outil, et simultanément en tant qu'avatar de la vérité d'un jugement, le modèle s'efface.

Il est en fait essentiel de ne pas confondre, dans le travail mathématique, le moment de modélisation et le moment de preuve en vérité. Qu'il y ait de la preuve "en vérité" vaut comme preuve que du mathématique a été produit, mais le travail mathématique auquel on demande de garder comme horizon ce souci du vrai, commence toujours dans le régime (imaginaire) de l'*imitation*, l'*abstraction*, la *modélisation.* Un modèle n'est pas "vrai" ou "faux", il est d'abord imaginé, d'une imagination que l'on a su écrire, et cette écriture est un outil, mis à l'épreuve ; l'épreuve à laquelle le modèle est soumi n'est pas immédiatement une épreuve de vérité, mais une épreuve d'économie. Un bon modèle est un modèle économique, où peu d'hypothèses simples permettent d'expliquer beaucoup de faits très divers. Ainsi en est-il de la théorie de Newton de la gravitation universelle. Ainsi aussi la notion de groupe est un bon modèle d'un certain geste mathématique au sein de tout éventuel calcul, car on le retrouve très souvent, et sur sa base abstraite seule beaucoup de faits peuvent se déduire. Et de même pour la notion de treillis, pour la notion de catégorie.

Comme le dit Nicolas Bouleau, les modèles sont des *simulacres utiles* ou *représentations partisanes*, valant comme engagement dans l'action, pour agir et décider [5]. Les modèles ne sont pas des vérités mais des possibilités à expérimenter, des conceptions et calculs à faire travailler. Et, insistons-y, cela vaut pour nous pour les théories, qui sont bien des modélisations, pour les modèles *en* mathématique que sont les structures mathématiques (groupes, espaces métriques, etc.), lesquelles simulent en effet l'activité mathématique, et jouent comme langage pour exprimer et compter les inventions d'agencements mathématiques, dans une mise à distance utile de la question du logique et de la vérité directe.

Bien sûr nous faisons l'hypothèse dans notre perspective que les modèles rationnels ou scientifiques de toutes espèces seront finalement exprimables comme structures mathématiques, architectures d'objets, de fonctions et relations, à l'*imitation* d'un "original de la réalité", c'est-à-dire simultanément posé comme du réel (expérimental) et prétendu comme une conception.

On fait souvent le distinguo entre d'une part une modélisation dite d'"ingénierie inverse" où, à l'imitation d'une connaissance partielle d'une situation réelle, d'une chose ou d'un phénomène naturel, on décrit une "machine" ayant les même propriétés observables, et d'autre part une modélisation où l'on fabrique un mécanisme devant réaliser une fonction déjà bien déterminée. Dans le premier cas le modèle vise à découvrir une compréhension théorique d'un bricolage empirique qui marche, dans le second cas le modèle vise à fournir un plan rationnel pour réaliser une fonction architecturée. Dans les deux cas on part d'une sémantique (donnée par un objet ou par une fonction) et le modèle est comme une syntaxe convenant à cette sémantique. Par exemple le canard de Vaucanson imite la digestion et les mouvements d'un canard, la machine d'Anticythère reproduit le mouvement de la lune du soleil et des planètes, suivant la connaissance grecque antique.

Précisons bien que le sens du terme "modélisation" est à envisager d'après beaucoup d'autres points de vue encore, suivant que le modèle est axiomatique ou empirique, fait pour analyser un détail ou simplifier un ensemble, présenter et mettre en valeur un point unique ou au contraire le re-présenter autrement, pour connaître et comprendre ou bien pour rectifier, prédire et agir, voire comme simple prétexte pour penser de façon ouverte, ou se familiariser avec une situation. L'élaboration puis l'efficacité d'un modèle seront sous condition d'un jeu de tels points de vue.

On devrait donc encore examiner nombre de pulsations entre les sens divers du terme "modèle", et préciser sous condition de quelle épistémologie — située relativement aux questions de causalité, d'objet, d'expérience, de cohérence, d'axiomatique, de fondement, etc. — il convient d'envisager la détermination même de ce qu'est un modèle ; et ceci prioritairement pour comprendre si la théorie de la flèche et des catégories est effectivement pertinente dans cette détermination.

5. N. Bouleau, *Philosophies des mathématiques et de la modélisation. Du chercheur à l'ingénieur*, L'Harmattan, 1999, p. 301.

In fine, dans l'après-coup des pulsations constitutives du sens de la modélisation, nous devrions pouvoir soutenir efficacement que tout modèle mathématique procède de flèches et de systèmes de flèches, parce qu'il note et calcule des différences, parce qu'il fait signe, et parce que son sens est la manière dont il intervient comme signe dans la sémiosis.

Signes

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ au sens mathématique est donnée d'un ensemble E dont les éléments $X, Y, ...$ sont nommés les *objets* de $\mathcal{C}$, pour chaque paire d'objets (X, Y) d'un ensemble noté $\mathcal{C}(X, Y)$ de *flèches* $f : X \to Y$ entre les objets, avec une loi de *composition* binaire partielle $(g, f) \mapsto g.f$ associant à toute paire de flèches consécutives, soit disons $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ une flèche composé $g.f : X \to Z$, la composition en question étant *associative* (c'est-à-dire telle que pour tout $h : Z \to W$ on ait $h.(g.f) = (h.g).f$, et, enfin chaque objet X possédant une flèche dite *identité* ou *unité* que l'on note $1_X : X \to X$, telle que pour tout $f : X \to Y$ et toute $f' : Y' \to X$ on ait : $f.1_X = f = 1_X.f'$.

C'est avec cette seule idée initiale de catégorie que l'on voudrait proposer de procéder à toute modélisation. On y a donc notamment deux idées déjà, problématiques, celle de la *flèche* et celle de l'*objet*. Nous allons à l'instant recommencer la définition des catégories sans utilisation des objets ni des identités sur les objets, avec la seule donnée primitive de systèmes de flèches.

Par cette reprise nous montrons donc que la difficulté avec la stabilité constitutive des objets dans toute modélisation, et aussi la difficulté avec l'introduction de plusieurs niveaux ou types de flèches, sont deux points que l'on peut rejeter à plus tard, le système pur des flèches — qui représentent toujours des différences ou des transformations — pouvant être directement posé. Nous insistons donc par là sur la primauté de la flèche seule, sans objets, quand dans cette flèche seule, le domaine statique de la variable de la transformation que la flèche représenterait, comme le codomaine où elle prendrait ses valeurs, ne sont pas encore figés. Cette flèche représente alors du pur transport, sans que l'on sache d'où à où, ni ce qui est transporté. La flèche serait une sorte de *différence pure*, le sens (sémiotique) de la flèche étant son sens (géométrique), qui marque le “signe” ($+$ ou $-$) de la différence que la flèche indique entre deux autres flèches qui en sont le domaine et le codomaine, pas encore dénotés.

Soit donc l'idée d'une flèche, qu'on rattachera évidemment à la théorie du signe développée par Charles S. Peirce [6] :

$$c : O \longrightarrow M,$$

qui montre l'original O comme un objet source (éventuellement mythique ou fictive) et le modèle M comme objet but (le plus pratique possible), le symbole c indiquant la “compression” ; et chaque objet O ou M est à son tour de la forme d'une flèche $F \longrightarrow f$, qui va de sa cause ou fondement vers son effet ou fonctionnement, etc. Immédiatement donc nous sommes installé dans du diagramme de toutes dimensions, comme nous en avions déjà envisagé la nécessité [7] à propos de la question de la représentation.

6. C. S. Peirce, *Collected Papers*, vol. I-VI : 1931-35 par C. Hartshorne, P. Weiss ; vol. VII-VIII : 1958 par W. Burks, Harvard, Harvard University Press.
7. R. Guitart, “Que peut-on écrire et calculer de ce qui s'entend ?”, dans Assayag, G., Nicolas, F. et

Charles Morris [8] divise la sémiotique en syntactique, sémantique, pragmatique, qui en sont peut-être plus précisément trois dimensions, l'objet d'étude étant toujours le même, le phénomène de la sémiosis. Pour Peirce déjà la sémiosis est "une action ou influence qui est, ou implique, une coopération de *trois* sujets, le signe, son objet et son interprétant, telle que cette influence tri-relative ne puisse en aucune façon se résoudre en actions entre couples" (cité CP : 5.584 par Eco [9]). Nous serions tenté d'y voir un dispositif borroméen. Mais d'abord il s'agit implicitement de la promotion du ternaire pur de la flèche.

La sémiotique à la manière de Peirce, théorie du signifié et des interprétants, est bien résumée par Umberto Eco en cinq points [10], que l'on entendra résonner fortement du côté de la pratique en théorie mathématique des catégories (théorie de la composition des flèches) :

– toute expression est interprétée par une autre expression ;

– l'interprétation est le seul moyen de définir le contenu des expressions ;

– le signifié s'accroît à travers les interprétations ;

– le signifié complet d'un signe est l'enregistrement historique du travail pragmatique qui a accompagné chacune de ses apparitions contextuelles ;

– interpréter un signe signifie prévoir tous les contextes possibles où il peut être inséré.

À quoi nous ajoutons la précision que la prévision est aussi une invention ou libre découverte d'un sens ; la théorie des structures en terme d'*esquisse* au sens d'Ehresmann consiste précisément en l'art d'une telle prévision, dans le pur jeu diagrammatique des flèches. En effet *esquisser* un type de structure donné demande de prévoir des effets de réalisations de spécifications de diagrammes commutatifs et de propriétés universelles. Dans cet art il y a suffisamment de liberté pour permettre l'émergence de difficultés nouvelles.

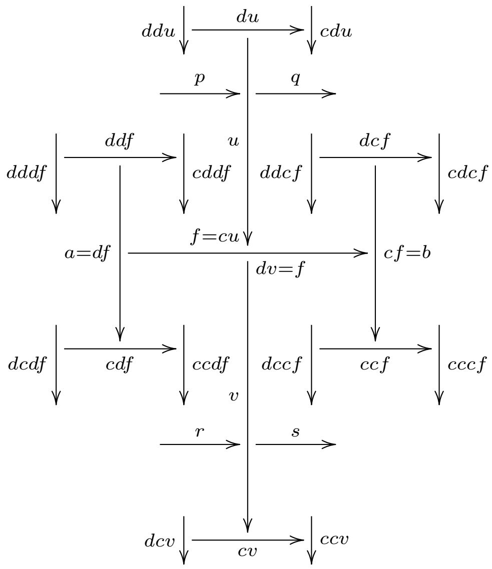
Nous proposons donc d'essayer la théorie des catégories comme modèle de la sémiosis, comme support théorique privilégiée de la sémiotique.

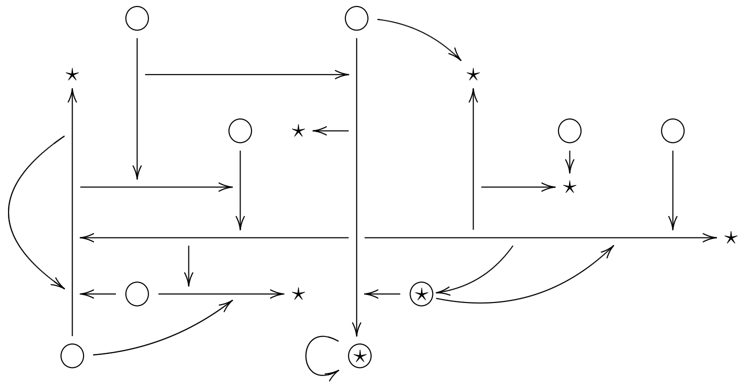
Le fond visuel général où s'inscrit notre pensée organisatrice est donc celui d'une grille de bifurcations indéfinies où chaque flèche f s'origine dans le travers d'une flèche $a = df$ et atteint le travers d'une autre $cf = b$, etc., comme le montre par exemple le tapis suivant, qui constitue donc un fragment élémentaire du fond général, binairement codé à la profondeur 3 pour les domaines et codomaines de f — avec d pour "domaine" et c pour "codomaine" —, autour d'un signe f en forme de flèche, comme on le montre sur le diagramme suivant. Nous donnons ensuite un fragment plus complexe où chaque flèche part d'une flèche, et va vers une flèche, etc., sauf en des places non-saturées. Les places non saturées d'entrées sont marquées par des $\bigcirc$ et celle de sorties par des $\star$; on peut donc considérer que le tapis est une sorte de multi-flèche (connexe dans l'exemple) de multi-source les neuf $\bigcirc$ et de multi-but les huit $\star$. Ce tapis répond de la conception du signe chez Peirce, mais ce seront d'abord des catégories que nous utiliserons, et les catégories apparaissent alors comme des versions simplifiées de ce fond que nous dirons

Mazzola, G. (dir.), *Penser la musique avec les mathématiques ?*, Collection "Musique/Sciences", Ircam-Delatour France, 2006, p. 139-158.

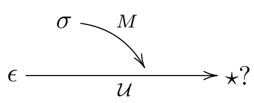
8. C. Morris, *Foundations of a Theory of Signs*, Chicago University Press, 1938.
9. U. Eco, *Les limites de l'interprétation*, Grasset, 1992, p. 288.
10. *Ibid.*, p. 299.

peircéen, avec un seul niveau d'imbrication, chaque flèche partant d'un objet et arrivant à un objet.





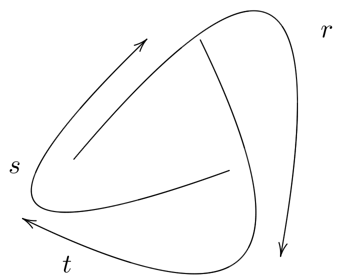
Un mini exemple intéressant est le dessin du schéma de ce qu'est un modèle au sens ensembliste : on se donne pour commencer comme sémantique un univers $\mathcal{U}$ ("modèle" naïf) d'une théorie des ensembles ϵ, et alors est syntaxique un σ donné comme habitant du même niveau d'écriture que la théorie des ensembles ϵ dont l'univers considéré est un modèle, et pour quoi cela fait sens de pouvoir être représenté comme élément dans cet univers $\mathcal{U}$. Nous avons donc là un schéma d'organisation de l'idée de modèle qui s'écrit par un fléchage qui se dessine :



Un autre exemple est l'autographe "borroméen" qui se liste :

$$r : s \to t,\ s : t \to r,\ t : r \to s$$

et se dessine d'un coup :



Suivant le même principe, on obtient automatiquement un fléchage à partir d'une "mise à plat" d'un nœud ou d'un entrelac quelconque ; ici dessus l'exemple procède de la mise à plat du nœud de trèfle.

On trouverait encore une image mathématique précise mais hétérogène du fond peircéen du côté des n-catégories voire des ∞-catégories, où sont considérées des flèches de différentes dimensions, et leurs compositions. Mais nous ne rentrerons pas ici dans la description de ces structures (voir toutefois ci-dessous quelques indications sur les 2-catégories), d'autant plus que l'on peut tout directement, sans introduire a priori un jeu de dimensions — lequel se récupérerait ensuite après-coup dans un calcul de différences de niveaux et par l'ajout de compositions successives à chaque niveau — faire un modèle de ce fond peircéen par ce que nous appelons un *fléchage associatif*. En fait les 2-catégories, les catégories doubles, les n-catégories, sont au bout du compte descriptibles comme des fléchages ordinaires (sans qu'il soit nécessaire a priori d'introduire divers types ou niveaux de flèches). Plus généralement tout fléchage "étiqueté" (où chaque flèche est d'un "niveau" déterminé) est équivalent à la donnée d'un simple fléchage.

Une *fléchage* (partiel) est un ensemble $\mathcal{F}$ d'éléments nommés "flèches", certaines flèches f ayant une source ou domaine df et un but ou codomaine cf qui sont encore des flèches (et non pas, comme dans les catégories, des objets ou des flèches identités), et on écrit alors $f : df \to cf$; c'est donc la donnée sur $\mathcal{F}$ d'une relation ternaire particulière Φ, telle que $(u, v, w) \in \Phi$ si et seulement si $u = dv$ et $w = cv$.

Le fléchage est *complet* si toute flèche à une source et un but. C'est donc la simple donnée d'une fonction

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^2.$$

Un fléchage complet est aussi appelé un *autographe*. Ce nom est justifié si l'on considère qu'un automate est représenté par des états et des flèches indiquant des changements entre ces états, le système des flèches s'appliquant à la donnée extérieure des états, tandis qu'ici les états sont internes au système, ce sont les flèches elles-mêmes. Un autographe simule un jeu de gestes d'auto-transformation d'un système de gestes.

Dans un fléchage incomplet chaque entrée $\bigcirc$ et chaque sortie $\star$ peut être considérée comme une flèche $a : a \to a$, et alors on est en présence d'un autographe.

Un *fléchage complet à composition associative* est un fléchage où les flèches consécutives se composent associativement : pour toute donnée de $f : u \to v$ et $g : v \to w$ il est spécifiée une flèche notée $g.f : u \to w$ et appelée composée de f suivie de g, et cela de façon que si $h : w \to x$ alors

$$h.(g.f) = (h.g).f.$$

Les flèches "identités" sont alors définies comme les flèches i qui sont neutres pour la composition et qui sont en boucle, c'est-à-dire avec $di = ci$, et on demande alors que pour toute flèche f il soit déterminée une flèche identité $i_f : f \to f$. Par suite toute identité i s'écrit de manière unique $i = i_f$, de sorte que tout flèche f est aussi assimilable à un objet reconnu comme objet par son identité i_f ; et si l'on note $X = i_f$ un objet, alors l'unique f pourra se noter $\phi(X)$.

Une *catégorie*, telle que définie au début de ce paragraphe, est bien alors une *fléchage complet associatif à identités*, c'est-à-dire où de plus pour tout f on a

$$i_{df} = df \quad \text{et} \quad i_{cf} = cf.$$

Étant donné un fléchage $\mathcal{F}$ (ou bien en particulier une catégorie $\mathcal{C}$), on en construit un autre, dit *opposé* et noté $\mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ (ou $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$), en renversant le sens de toutes les flèches : une flèche de $\mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ est une donnée notée $f^{\mathrm{op}} : v^{\mathrm{op}} \longrightarrow u^{\mathrm{op}}$ où $f : u \longrightarrow v$ est une flèche de $\mathcal{F}$.

Un fléchage associatif à identité revient encore à la donnée d'une catégorie équipée d'une fonction ϕ associant à tout objet X une flèche $\phi(X) = f$ avec pour tout g ayant X comme source $dg = \phi(X)$. On ne confondra par $\phi(X)$ avec $\mathrm{Id}_X = i_f$. En bref, un fléchage associatif est une catégorie où chaque objet X "est" aussi une flèche $\phi(X)$. Ce $\phi(X)$ est pensé comme l'*érection* de X, On pourra aussi appeler un fléchage associatif une *autocatégorie.*

On notera qu'une autocatégorie — ainsi nommée en prolongement de la terminologie "autographe" — aurait peut-être aussi pu être appelée une "hypercatégorie", en parallèle avec la notion d'hyper-ensemble (*hyperset*) : dans les hyper-ensembles l'axiome de fondation qui permet une hiérarchie constructive des ensembles est abandonné, comme dans une autocatégorie est abandonnée la hiérarchie des dimensions que l'on pose dans les n-catégories (cet abandon permettant d'intégrer comme cas les mises à plat de nœuds). Mais dans les hyper-ensembles l'axiome de fondation n'est pas seulement abandonné, il est remplacé par un autre axiome précis qui le contredit.

Partant d'un fléchage $\mathcal{F}$ complet à composition associative, on peut décider déclarer être une identité d'objet toute flèche ψ qui est un domaine ou un codomaine d'une flèche f, soit donc de la forme $\psi = df$ ou $\psi = cf$, remplacer cette flèche ψ par un "objet" X_ψ, et faire disparaître toutes les flèches ψ' de source ou but une telle ψ, toute ψ'' de source ou but une ψ', etc ; c'est-à-dire que l'on identifie $1_{X_\psi} = \psi = \psi' = \psi'' = \dots$; après ces identifications, il reste seulement des flèches entre des objets (sur lesquels il y a des identités), et les compositions éventuelles dans le fléchage initiale sont à leur tour passées au quotient, c'est-à-dire que pour ce faire il faut éventuellement encore de nouvelles identifications, et on arrive ainsi à un graphe multiplicatif associatif associé au fléchage, qui en fait est une catégorie $\mathcal{C} = D(\mathcal{F})$ — à lire "Dessus" de $\mathcal{F}$ — associée à $\mathcal{F}$ par écrasement des domaines et codomaines sur des identités, et conservation des flèches dites du-dessus. Toute catégorie peut évidemment s'obtenir ainsi de multiples façons, et un tel $\mathcal{F}$ est une sorte de "présentation" de $\mathcal{C}$ par "en-dessous".

On retiendra que la considération des autographes, qui inclut les catégories, et aussi bien les n-catégories et les mises à plat d'entrelacs, vaut, au plan de la modélisation du fait de faire jouer à la seule flèche le rôle de signe élémentaire, et cela est permis en dissociant trois idées qui sont habituellement fusionnée dans la notion de catégorie : l'idée d'un objet, l'idée d'un domaine ou d'un codomaine, l'idée d'une identité ou unité sur un objet. Une telle dissociation semble indispensable au développement d'une mathématique précise de la sémiotique peircéenne.

Toutefois ici nous utiliserons explicitement les objets de catégories, tant la fonction abréviative de l'objet est précieuse. Et il nous faut encore préciser les notions de foncteur, de 2-catégorie, et enfin le lemme de Yoneda. Nous comprendrons alors pourquoi, parmi les fléchages, les catégories avec leurs objets doivent être privilégiées.

On appelle *foncteur* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ d'une catégorie $\mathcal{A}$ vers une catégorie $\mathcal{B}$ une fonction F associant à toute flèche $f \in \mathcal{A}$ une flèche $F(f) \in \mathcal{B}$ de façon compatible avec la composition et la détermination des sources et but. Les catégories appartenant à un univers $\mathcal{U}$ modèle de la théorie des ensembles, et les foncteurs entre ces catégories, constituent à leur tour une catégorie $\mathcal{C}at$ qui est au centre du travail des catégoriciens. Ensuite entre deux foncteurs $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ on détermine un nouveau type de flèches, les *transformations naturelles* $t : F \Rightarrow G$, une telle t étant la donnée d'une famille $(t_A : F(A) \to G(A))_A$ indexée par les objet de $\mathcal{A}$ telle que pour tout $a : A \to A'$ on ait

$$G(a).t_A = t_{A'}.F(a).$$

Cela conduit à faire de $\mathcal{C}at$ une 2-catégories [11], ce que nous ne développerons pas ici formellement. Indiquons seulement ce qu'il en est dans le cas de $\mathcal{C}at$.

Avec $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $t : F \Rightarrow G$ on définit :
– $t.K : F.K \Rightarrow G.K$ par $(t.K)_{A'} = t_{K(A')}$, avec $K : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$
– $L.t : L.F \Rightarrow L.G$ par $(L.t)_A = L(t_A)$, avec $L : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$
– $t't : F \Rightarrow H$ par $(t't)_A = t'_A.t_A$; avec $t' : G \Rightarrow H$. Il s'agit de la composition "verticale" des transformations naturelles :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow t"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow t'"] & \mathcal{B} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t't"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Et enfin on compose "horizontalement", considérant — dans la figure ci-dessous — que t va de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ et que s va de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, bend right=60, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=60, "M"] \arrow[r, bend right=60, "N"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "M.F"] \arrow[r, bend right=60, "N.G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s.t"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

suivant

$$st := (s.G)(M.t) = (N.t)(s.F).$$

11. J. Bénabou, I*ntroduction to bicategories*, SLN 47, (1967) Springer, p. 1-77.

Ainsi les transformations naturelles "sont" des flèches" en deux sens, et forment une catégorie "verticale", une catégorie "horizontale", et les lois horizontales et verticales commutent au sens que

$$(s's).(t't) = (s'.t')(s.t).$$

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories, on note $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ et les morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs (avec la composition verticale).

Enfin en notant Ens la catégorie des ensembles, on pose $\widehat{\mathcal{C}} = \mathrm{Ens}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, et on définit le foncteur de Yoneda

$$\mathrm{Yon}_{\mathcal{C}} \; : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}},$$

par

$$\mathrm{Yon}_{\mathcal{C}}(C) : C' \mapsto \{f : C' \longrightarrow C\},$$

et pour $g : C \longrightarrow D$,

$$\mathrm{Yon}_{\mathcal{C}}(g) : (f : C' \longrightarrow C) \mapsto \mathrm{Yon}_{\mathcal{C}}(g)(f) = (g.f : C' \longrightarrow D).$$

On voit donc que le foncteur de Yoneda, donné en abrégé par : $\mathrm{Yon}(g)(f) = g.f$, détermine très exactement la loi de composition de $\mathcal{C}$; de plus c'est un foncteur précisément parce que la loi de composition est unitaire et associative. C'est pourquoi la notion de catégorie est si fondamentale parmi les fléchages, car elle permet pile-poil la construction des foncteurs $\mathrm{Yon}_{\mathcal{C}} \; : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$, qui représentent chaque catégorie concrètement, par action sur elle-même, comme sous-catégorie pleine de celle de toutes les actions de $\mathcal{C}$, qui est $\widehat{\mathcal{C}} = \mathrm{Ens}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, laquelle catégorie est très régulière, à savoir un topos.

Pour conclure ce paragraphe à propos du signe, nous considérons donc que la flèche dessinée est matériellement le quantum d'écriture, le trait orienté, et s'il s'agit d'en donner à lire tout un tapis, cela vaut bien en soi comme une sorte de nombre généralisé.

Le"chiffre fondamental" ou l'ingrédient élémentaire de la modélisation, en tant qu'il doit s'agir de la trace d'un signe quelconque, sera donc la flèche — et partant de là les fléchages et les multi-flèches, les diagrammes, les catégories, les foncteurs, etc., et tout système de flèches — laquelle flèche jouera d'abord du point de la pulsation de son équivoque constitutive qui est de signifier ou bien du *change*, une action de transformation, une différence, ou bien du *même*, une stabilité, une identité préservée, une assimilation.

Au demeurant la flèche est le schème du geste fondamental qui consiste à *montrer du doigt*, et ce geste en effet est toujours équivoque, car on n'y reconnaît pas a priori s'il pointe un chemin à suivre ou un chemin à éviter, chemin vers un "objet" qui peut bien lui-même être un autre doigt pointé.

Formes

Après avoir proposé la flèche comme unité élémentaire de signe, et le développement initial de la théorie des catégories (jusqu'au lemme de Yoneda, et avec les fléchages et autocatégories) comme modèle basique de l'activité de la sémiosis, nous pouvons poursuivre la modélisation catégoricienne avec une idée supplémentaire décisive, l'idée de *forme*.

Il existe donc une théorie de la forme (*Shape Theory*) très générale de portée, et très simple dans sa mise en place, par laquelle il est naturel de continuer notre mise en place de la modélisation en mathématiques.

On dispose d'une catégorie $\mathcal{X}$ d'objets "complexes" à étudier, et d'un foncteur

$$J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X},$$

où $\mathcal{M}$ est une catégorie bien maîtrisée d'objets bien connus (considérés comme des "modèles abstraits", idéaux et simples). Concrètement, la catégorie $\mathcal{M}$ peut être la catégorie des modèles d'une théorie, par exemple d'une algèbre figurative, d'une esquisse, etc. Mais $\mathcal{M}$ peut aussi être une catégorie d'objets "simples", comme par exemple la catégorie des polyèdres, la catégorie des inclusions entre ouverts d'un espace numérique, les sites Diff_∞ des applications indéfiniment différentiables entre ouverts d'espaces numériques, ou Stoch la catégorie des probabilités de transitions entre espaces probabilisés, etc.

L'idée est d'analyser alors chaque objet inconnu $X \in \mathcal{X}$ comme recollement d'objet $J(M_i)$ venant d'objets connus M de $\mathcal{M}$, soit sous la forme d'une limite $X = \lim_i J(M_i)$, et cette limite est construite suivant un patron qui s'appelle la *catégorie de forme* de X, à savoir la catégorie J/X ayant pour objets les couples (M, m) avec M un objet de $\mathcal{M}$ et m un morphisme $m : J(M) \to X$, et pour morphisme de m vers m' un morphisme $h : M \to M'$ tel que $m'.J(h) = m$. Cette catégorie est équipée d'un foncteur

$$[J/X] : J/X \to \mathcal{M},$$

lequel est à proprement parler la J-forme de X, ou simplement la forme de X.

La construction qui directement à $R : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ associe la fibration ou catégorie d'hypermorphismes associée $H_R : \mathcal{H}(R) \longrightarrow \mathcal{C}$ se retrouve comme exemple ici :

$$H_R \simeq [\mathrm{Yon}_{\mathcal{C}} / R],$$

avec $\mathrm{Yon}_{\mathcal{C}}$ le plongement de Yoneda introduit au paragraphe précédent.

Et d'autre part, pour un J quelconque on a

$$[J/X] \simeq H_{\mathrm{Yon}_{\mathcal{X}}(X).J^{\mathrm{op}}}.$$

On appelle catégorie de J-co-forme de X la catégorie $X/K = (K^{\mathrm{op}}/X)^{\mathrm{op}}$, et elle est équipée du foncteur $[X/K] = [K^{\mathrm{op}}/X]^{\mathrm{op}} : X/K = (K^{\mathrm{op}}/X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{M}$.

Un exemple particulièrement intéressant et bien développé est la géométrie algébrique à la façon de Grothendieck, dont l'amorce peut se présenter comme voici.

Soit $\mathrm{Ann}_{c.u.}$ la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, soit $\mathrm{Aff} = \mathrm{Ann}_{c.u.}{}^{\mathrm{op}}$ la catégorie duale, et le plongement de Yoneda :

$$\mathrm{Yon}_{\mathrm{Aff}} : \mathrm{Aff} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}}.$$

Si $S : \mathrm{Ann}_{c.u.} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, — par exemple si S est un schéma — alors la $\mathrm{Yon}_{\mathrm{Aff}}$-forme de S est le domaine de définition des S-champs, lesquels sont des lax-foncteurs particulier

$$C : \mathrm{Yon}_{\mathrm{Aff}} / S \rightsquigarrow \mathcal{C}at.$$

Dans le cas abstrait on pourrait imiter cet exemple, et considérer un X- champ comme un lax-foncteur

$$C : J/X \rightsquigarrow \mathcal{C}at,$$

ou bien, plus particulièrement, une fibration sur J/X, soit un objet de $\mathrm{Fib}(J/X)$.

La prise en compte de cette notion de forme équivaut de fait au lemme de Yoneda, du fait de considérer pour tout $J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X}$ le foncteur de J-forme, de $\mathcal{X}$ vers la catégorie $\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$ des fibrations sur $\mathcal{M}$, qui a tout objet X de $\mathcal{X}$ associe la fibration $[J/X]$:

$$[J/] : \mathcal{X} \to \mathrm{Fib}(\mathcal{M}).$$

Et par cette opération $[?/]$ qui à tout foncteur J associe le foncteur $[J/]$ on détermine enfin un foncteur

$$[?/] : \mathrm{Fonc}(\mathcal{M}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Fonc}(\mathcal{X}, \mathrm{Fib}(\mathcal{M}))^{\mathrm{op}}.$$

On peut comprendre ce dernier foncteur comme l'extension naturelle au cas des catégories de l'opération ensembliste

$$(?)^{-1} : \mathrm{Fonction}(E, F) \longrightarrow \mathrm{Fonction}(F, \mathcal{P}(E)).$$

qui à toute fonction $f : E \to F$ d'un ensemble E vers un ensemble F associe la fonction notée $f^{-1} : F \to \mathcal{P}(E) : y \mapsto \{x \in E; f(x) = y\}$ et dite "image réciproque par f", de F vers l'ensemble des parties de E. L'opération ensembliste $(?)^{-1}$ est fondamentale, elle est à la racine de l'opérabilité logique du topos des ensembles et son universalité est l'axiome original des topos, et de même l'opération catégoriste $[?/]$ est cruciale dans l'étude de la 2-catégorie des catégories. Elle permet notamment d'unifier deux domaines $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ au titre d'un aspect commun $\mathcal{M}$, déterminé par deux foncteurs

$$J : \mathcal{M} \to \mathcal{X}, \quad K : \mathcal{M} \to \mathcal{Y}.$$

En effet on dispose alors de

$$[J/] : \mathcal{X} \to \mathrm{Fib}(\mathcal{M}), \quad [K/] : \mathcal{Y} \to \mathrm{Fib}(\mathcal{M}),$$

qui représentent $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ comme deux zones inconnues d'un même milieu connu $\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$. Ce que l'on énonce : si deux catégories ont en elles un fragment commun, alors elles sont dans un lieu commun. On pourrait à partir de là développer une théorie systématique des correspondances ou des relations entre catégories.

Cela s'applique par exemple lorsque $\mathcal{M}$ est la catégorie Graph des graphes, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ les catégories des espaces topologiques et des k-spectroids (comme manipulés pour la théorie des gestes et des formules [12]) : on peut alors comparer un espace topologique et un k-spectroid en les considérant comme des présentations de fibrations sur le topos Graph. Par suite les "gestes" et les "formules" introduits par Guerino Mazzola et Moreno Andreatta sont unifiés : ce sont des présentations de morphismes de la catégorie Fib(Graph). Autrement dit la dualité entre algèbre et géométrie sera active dans cette situation en raison de l'alternative entre chercher à présenter un morphisme donné de Fib(Graph) à partir d'une formule ou à partir d'un geste.

Ainsi, indépendamment de la façon singulière originale dont la catégorie $\mathcal{X}$ a été construite, indépendamment du contenu que l'on a mis dans chacun de ses objets X, via $[J/]$, chaque objet de $\mathcal{X}$ est maintenant vidé de son contenu singulier, lequel est remplacé par un contenu universel exprimé en termes "connus" ($\mathcal{M}$ joue le rôle du connu). Chaque

12. G. Mazzola et M. Andreatta, "Diagrams, gestures and formulae in music", *Journal of Mathematics and Music*, vol. 1, n° 1, Mars 2007, p. 23-46.

objet X est maintenant assimilé à une catégorie J/X ou plutôt à une fibration $[J/X]$, dont le contenu n'est que d'agencements d'objets abstraits et flèches abstraites, ce qui décrit ce que du point de vue J on sait de X, au seul niveau de ses rapports à certains autres objets de sa catégorie $\mathcal{X}$, soit ce que J sait de la place de X dans $\mathcal{X}$. Par ce procédé on livre au calcul commun la part universelle de X, mettant entre parenthèses ce qui de sa singularité est impropre au calcul. Les calculs cohomologiques, soit l'essentiel des calculs analysant la constitution de X, et permettant les comparaisons entre la constitution de X et celle d'un Y, se trouvent être des invariants de formes : ils ne dépendent que de la forme, pour un J adapté. Ce passage à la forme nous l'appelons l'*évidement*[13]. Nous tenons là une définition de la forme : la forme d'un objet est ce qui prenant le dehors "connu" de l'objet comme substance première de celui-ci se constitue comme la cohérence de cet objet vis-à-vis de ses alter ego, et vient prendre place de sa constitution singulière accidentelle ; c'est ce qui place l'objet au lieu de l'universel et du partage en calcul.

Notre hypothèse est que dans le travail de modélisation nous n'accédons jamais aux objets, mais à des formes d'objets, qui valent comme *sens* des objets en question. Et ces formes, véritables propositions d'accès mathématiques à l'objet par composition à partir d'objets familiers, vont permettre alors des calculs qualitatifs (par propriétés universelles, extensions de Kan et analyses cohomologiques).

13. R. Guitart, "L'évidement des objets et le dehors comme substance", *Colloque Le lemme de Yoneda "enjeux mathématiques et philosophie"*, organisé par Ch. Alunni et A. Badiou, ENS, 18 juin 2007.