Rôle de la ternarité dans la modélisation qualitative catégoricienne*

René Guitart

Travail en cours, 7 avril 2013

1 Argument

La modélisation qualitative catégoricienne en mathématique, en sciences exactes et naturelles, s'origine dans la représentation de tout signe comme flèche, et la description des situations comme systèmes de flèches formant un "autographe" (par exemple un ordre, un groupe, une catégorie, une 2-catégorie, un nœud, etc).
Elle se pose comme qualitative dans la mesure où elle s'écarte du purement numérique au profit de l'analyse structurelle de la forme. Soit à considérer un calcul général des différences comme calcul de problèmes universels plutôt que seulement comme calcul différentiel et intégral classique. Ce qui sera seulement évoqué ici.
Elle intervient au niveau du jeu des écritures, avant la question de la logique fondatrice.

Dans la mise en place ainsi d'une sorte de théorie des modèles, il se trouve qu'il y a, historiquement et théoriquement, une difficulté féconde sur le rôle directeur qu'il faut accorder tantôt au binaire, tantôt au ternaire, comme si la pensée modélisatrice hésitait à s'équiper de moyens de calculs (binaires au plus) ou bien de vue géométriques (ternaires au moins). Ce dont on connait nombre d'exemples.
Faut-il privilégier une logique binaire ou une logique ternaire ? Faut-il représenter les formes par des relations binaires ou ternaires ? Sans décider encore, il faut en tous cas élaborer les possibilités naturelles d'actions du côté ternaire, ce dont nous donnerons deux exemples : théorie de logique borroméenne, théorie des trijonctions.

2 Modèles et flèches

2.1 Raison et modèles scientifiques

Par la raison, dont le point d'appui est la logique (qui croit ou fait semblant de croire à la vérité, et à la "mêmeté"), nous organisons la réalité à proportion de l'humain,

*Colloque *Monade, dyade, triade. Des approche de la réalité*, Univ. de Namur, 8 et 9 avril 2013.

mathématiquement donc. Il faudra ailleurs développer une critique de ce dispositif[1], mais ici nous ferons comme si ce dispositif allait de soi. Re-disons-le autrement : par la pensée organisatrice et représentative, dont le pivot est la substitution dans les écritures et l'acte de calcul, nous modélisons notre monde.

La raison organisatrice modélise tel monde de phénomènes prétendus par un jeu d'écritures qui nomme des percepts, leurs émergences, leurs compositions, leurs modifications. Nous modélisons dès que nous prenons un événement, tel que l'apparition d'une entité mentale ou d'une chose, pour objet, en essayant de l'appréhender d'une combinatoire littérale de nombres et figures.

Nous modélisons le Dieu chrétien par un système de circuits et processions sur un triangle faisant office de trinité, en lisant là une topologie mœbienne et borroméenne[2]. Nous modélisons le cosmos par des changements de figures espacées ; ainsi il passe de chaos à monde, et devient pour nous la nature, la physique. Dans la nature nous modélisons le changement par le mouvement, par une fonction numérique, une organisation d'éléments par un graphe, par un groupe de transformations. Nous modélisons notre activité de modélisation en tant que développement de types de calcul mathématique par la définition des théories, et tel calcul de tel type par un modèle de la théorie qui représente ce type. Nous modélisons même notre ignorance et/ou l'insuffisance de nos modèles par du jeu de statistiques ou d'évaluations flous. Toute cette activité de nombres et de structures et de signes combinés, constitue l'appareil mathématique dont s'autorise la prédiction et l'explication "scientifique". Cela ne valide pas cette activité au point du vrai, mais au point de la mise en évidence d'une proposition organisationnelle. Un modèle n'est pas vrai ; il peut être utile, éclairant ou efficace.

Sous le déploiement de tous ces modèles algébrico-géométriques, il est, classiquement, suppposé une logique (un déploiement en paroles d'arguments) , dont s'autorisent nos calculs, notre "science" ; ou bien à l'envers, de nos jours après Descartes et Boole, il est supposé des calculs dont se constitue notre logique mathématique. On va même en physique jusqu'à remplacer le jeu a priori des phénomènes par la donation des objets mathématiques par lesquels, ensuite seulement, des phénomènes stables sont mis en relief. Sur cela Bachelard est très clair[3]. On lira aussi Schlick[4], pour apprécier le point de vue que toute connaissance est connaissance de structure, de la forme d'une structure. On lira encore Cassirer[5] pour soutenir, à la racine du structuralisme, le point de vue fonctionnel

[1]R. Guitart, Le besoin de l'exercice mathématique chez Nietzsche. Colloque *Les mathématiques et l'expérience. Ce qu'en ont dit les philosophes et les mathématiciens*, Université Paris VII, 31 mai-1er juin 2013.

[2]Guy-Robert St-Arnaud, Trinité, appropriation, et translittération, *Thèse*, Théologie catholique, Strasbourg 2, 1995.

[3]R. Guitart, Bachelard et la pulsation mathématique, Colloque *Bachelard 2012 Journées de Sytnhèses "Le Surrationalisme 50 ans après"*, 21-23 mai 2012, à l'ENS et l'IHP.

[4]M. Schlick, *Forme et contenu. Une introduction à la pensée philosophique*, Agone, 2003.

[5]E. Cassirer, *Substance et fonction. Éléments pour une théorie du concept* (1910), Éd. de Minuit, 1977.

contre le point de vue substantiel.

C'est ce que nous soutenons en proposant que connaître rationnellement effectivement ce soit modéliser mathématiquement,, d'un geste d'approche fonctionnelle "en raison". Non pas, étant donnée une situation, en établir un format logique qui la fonderait "en vérité", mais plutôt en modeler d'un jeu de fonctions et relations une forme mathématique.

2.2 Le 3 et la flèche, monnaie unité parmi les signes.

2.2.1 Des fonctions aux flèches et aux catégories

Connaître en raison serait modéliser en termes de structures mathématiques, et si l'exposition des fonctions et relations y suffit, alors pour réaliser cette connaissance, pour l'écrire, il nous suffit de jeux de flèches, constituant des *diagrammes* de catégoriciens. Parce que les fonctions et les relations sont des systèmes de flèches.

Ainsi une fonction f est la donnée d'un triplet $f = (B, F, A)$ où F est un ensemble de couples (b, a) — visualisable par une flèche $a \to b$; cet ensemble est supposé "fonctionnel," c'est-à-dire tel que pour tout $a \in A$ il existe un unique $b \in B$ tel que $a \to b$. La donnée de la fonction f est ainsi visualisé par une flèche $A \xrightarrow{f} B$ portant le nom f. Une relation binaire r entre deux ensembles A et B, soit un ensemble quelconque R de flèches $a \to b$, se représente par deux flèches ainsi: $A \xleftarrow{p} R \xrightarrow{q} B$, où p et q sont deux fonctions de projection qui à $(a \to b) \in R$ associent respectivement a et b.

Ainsi les ensembles et fonctions, avec leurs identités et compositions, constituent une catégorie notée Ens, le monde de flèches "concrètes" que suppose l'approche structurale ensembliste.

L'abstraction de cette situation est précisément la notion de *catégorie* elle-même, où des objets et flèches "abstraites" (non construits mais donnés) seront en jeu ; une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un ensemble d'objets et d'un ensemble de flèches, chaque flèche f ayant un objet source ou domaine df, un objet but ou codomaine cf, et on écrit alors $f : df \to cf$, chaque objet X ayant une flèche identités noté $\mathrm{Id}_X : X \to X$, deux flèches consécutives $f : W \to X$ et $g : X \to Y$ ayant une composée $k = gf : W \to Y$, de sorte que si $h : Y \to Z$ on ait l'associativité $h(gf) = (hg)f$ et l'unitarité $f\,\mathrm{Id}_W = f = \mathrm{Id}_X\, f$.

Le travail de modélisation catégoricienne consistera à construire des diagrammes ayant certaines propriétés relatives au seul système $\mathcal{C}$ de flèches et objets donné abstraitement.

Mais quelle efficacité sémiotique peut-on espérer de la pratique de ce seul jeu des flèches ?

2.2.2 Des signes quelconques aux flèches

Comme disait Hegel, “les mots sont les signes des représentations”, ils appellent ces représentations à la conscience ; comme le remarque Jean Cohen[6] il y a deux type de représentations dans le langage et la parole, dénotative (prose) et connotative (poésie), et chaque mot, c’est-à-dire chaque unité-signe dans l’ordre de la parole a un double sens virtuel : dénotatif et connotatif. La connotation poétique produit un affect dont on peut rendre compte en termes de figures et métaphores, de diagrammes dans la grammaires implicite des affects.

C’est sous réserve d’entendre cette alternative dénotation/connotation — qui indique comme les deux faces d’une pièce — que nous pouvons admettre avec Jean-Joseph Goux[7] que de même que, suivant Marx, la monnaie est l’équivalent universel dans le monde des marchandises, les *signes de la parole* valent pour n’importe quels autres signes, car ils sont très-disponibles pour retenir le sens ; ce sont des équivalents universels dans le monde des signes, du point de vu du sens. C’est par là que le rapport à la réalité que construit ou propose toute modélisation, tout système organisé de signes exposant tel point du chaos ou de l’ignorance, est une “représentation d’un état de monde”, est sous condition du *logos*, de la raison et de la parole, et donc sous condition de la logique. Ainsi les sons musicaux, les mouvement du corps qui danse, sont des signes, et nous pouvons écrire d’autres signes qui, par abstraction, les transcrivent partiellement, dans la notation musicale, dans la chorégraphie ; et puis ce qui est ainsi transcrit peut se dire, est lisible et fourni un sens énonçable. On descend ensuite du “sens” à l’“organisation” en passant de la parole au mathématique, en atteignant le niveau de la figure et du chiffre. Il suffira enfin de comprendre que le caractère mathématique ou purement organisationnel des jeux de signes, réductibles donc aux figures et jeux de mots, aux discours et analyses logiques, se réduit en fait aux jeu de nombres, de lettres algébriques (et, in fine, aux flèches, nous allons y venir).

Passant des jeux de signes aux paroles, des paroles aux signes mathématiques, le sens des mots est perdu, semble-t-il, la sémantique étant mise entre parenthèses, sauf que tout le sens combinatoire demeure accessible : seule est perdue l’interprétation dans ce qu’elle a d’arbitraire. Si donc nous nous proposons au plan de la modélisation, de réduire la parole aux chiffres et/ou aux figures, sous les lois de l’arithmétique et de la géométrie, nous pouvons espérer que la capacité de prédiction et de compréhension de la structure ne seront pas oblitérés. L’hypothèse de la modélisation mathématique est donc que toute représentation rationnelle par un discours est exprimable schématiquement par une modélisation en formules et figures.

Qu’il s’agisse à la base de calculs logiques ou de nombres, clairement au fondement de nos pratiques modélisatrices mathématiciennes — qui formant des *sur-objets*

[6]J. Cohen, *Structure du langage poétique*, Flammarion, 1966, p. 199.

[7]J.-J. Goux, Marx et l’inscription du travail, in Tel Quel, *Théorie d’ensemble*, Seuil, Point 121, 1968, 173-196, p. 176-177.

mathématiques construisent la réalité accessible comme “surrationnelle” au sens de Bachelard — il y a un double principe de représentation portant sur l’exercice d’écriture et de lecture, qui s’énonce :

Il y a du multiple, dans ce multiple de la proximité et de la mêmeté,
et, se formant au départ de multiplicités, de l’Un.

Et par suite il n’y a pas de modélisation pouvant effectivement produire des effets (de prédiction ou de sens) sans la mise en jeu du multiple (deux) et de sa répétition potentielle (trois). C’est donc à ce niveau précisément qu’il faut chercher l’unité-signe dans l’ordre du mathématique : il s’agit du trois, ou bien — ce qui rend le trois visible — de la flèche :

$$A \xrightarrow{f} B.$$

C’est donc à ce signe qui est la flèche, et à un modèle formé d’un jeu de tels signes — un diagramme donc — que nous prétendons réduire toute structure, tout système de mots faisant un discours, tout système de signes en général considéré comme une représentation.

Bien entendu ce geste est une réduction qui peut paraître assez extravagante, de remplacer toute la richesse de la sémiosis ou même seulement de la parole, au jeu des répétitions du seul signe $\longrightarrow$; elle est cependant tenable si l’on se limite à la question de l’organisation : la pratique de nos modèles nous permet d’envisager des interventions sur la “réalité” (qui est déjà seulement une construction humaine du réel), au point justement du contrôle de son organisation. Le chaos réel n’est pas organisé, il n’y a pas deux choses identiques ou qui soient la même, et donc la mathématique est à sa racine une erreur à propos du réel. Mais cette erreur singulière est identique à la volonté humaine d’organiser, et son développement constitue la vérité de notre volonté d’organiser et par là de maîtriser. C’est donc dans cette perspective bien limitée que nous posons l’universalité de la flèche.

2.2.3 La flèche, donnée ternaire, comme signe au sens de Peirce

Pour Peirce chaque signe est une donnée ternaire, où un représentamen est interprété par un interprétant comme une représentation d’un objet. Ce que nous figurerons par :

$$R \xrightarrow{I} O,$$

qui peut donc se lire : du point de vue I, R est un indice de O ou encore I est une différence qui ajoutée à R produit O.

En réalité toute flèche peut ainsi se penser comme un signe. Par exemple une fonction $f : A \to B$ peut être pensée comme une différence entre A et B, une transformation qui conduit de l’objet A à l’objet B, de sorte que A est comme un indice de B du point de vue de f.

2.3 Le ternaire et la flèche en arithmétique et en géométrie

Le compte arithmétique et le traçage d’une figure géométrique élémentaire s’écrivent évidemment comme jeux de flèches. En voici deux aspects très primitifs.

2.3.1 Les quatre opérations sont des relations ternaires, et un jeu de flèches

L'extrême réduction est la réduction pythagoricienne aux nombres, différences et rapports, aujourd'hui au numérique et à la pixelisation. Elle est excessive quand elle se résume à un codage binaire systématique uniforme sans structure directrice singulière, le sens organisationnel ne pouvant plus se retrouver, la prédiction calculable seule pouvant être effectuée. L'usage général et prédominant des nombres entiers relatifs est donc trop vite admis.

La première relation arithmétique ternaire fondamentale s'écrit $b = a + c$, ou sous forme adjointe $b - a = c$, ce qui se montrer comme une flèche :

$$a \xrightarrow{c} b.$$

La deuxième relation arithmétique ternaire fondamentale s'écrit $b = a \times c$, ou sous forme adjointe (quand $a \neq 0$) $b/a = c$, ce qui se montrerait aussi comme flèche d'un autre type :

$$a \overset{c}{\dashrightarrow} b.$$

On peut alors exprimer toute combinaison de lettre par les quatre opérations comme dans l'exemple où e représente $d/(b - a)$:

$$\begin{tikzcd} & d & \\ b & & a \arrow[ll, "c"', ""{name=C}] \arrow[from=C, to=1-2, dashed, "e"] \end{tikzcd}$$

2.3.2 Enchaînement d'alignements

La géométrie plane suppose tout d'abord la donnée de la relation d'alignement de trois points $\mathcal{A}(P, Q, R)$ signifiant que chaque point est sur la droite déterminée par les deux autres. On pourra écrire cela par un premier système de flèches

$$P \overset{R}{\to} Q.$$

Le premier axiome de géométrie sera la règle que

$$P \overset{R}{\to} Q, \quad P \overset{S}{\to} Q, \quad P \overset{T}{\to} Q \;\Rightarrow R \overset{T}{\to} S.$$

3 Arité en théorie classique des modèles

3.1 Perspectives et arités.

La ternarité au plan de la modélisation signifie d'abord qu'un temps de conclure — et de dire la loi — est mis en jeu dans la théorie même du modèle en construction. Autrement dit est prise en charge explicitement l'altérité ou le point de vue externe d'où la théorie est de fait conditionnée, doù elle tient sa légitimité, l'instituant ainsi dans le modèle comme un point de perspective.

La perspective est introduite effectivement comme une mise à distance, par le jeu des augmentations d'arités, un nouvel argument pour telle nouvelle dimension devenant de fait un point de perspective.

3.2 Arités des relations et opérations

Au plus simple, classiquement, il y a dans la modélisation un jeu de signes à trois niveaux, dont des objets, des relations entre objets, et, troisième temps, des équations entre ces relations. Par exemple en logique on trouvera des formules, des axiomes, et des règles de déductions ; en géomtrie plane on trouvera les points et droites et cercles, des relations d'alignements et cyclicités, des axiomes entre ces relations. La question se complique du fait que les relations entre objets sont elles-mêmes binaires ou ternaires ou plus. Par exemple ce sont des opérations binaires, espèces spéciales de relations ternaires, voire des opérations ternaires, etc. Et puis de même au niveau des équations entre ces relations, il y a mise en jeu de compositions de relations, qui leurs tours peuvent être darités diverses.

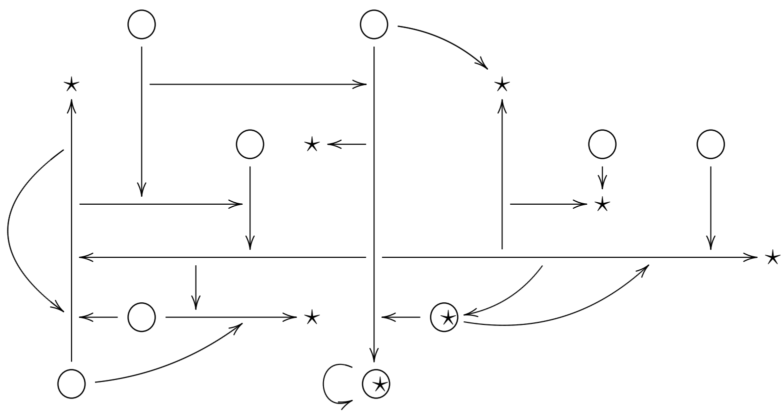
3.3 La réduction d'arité par le choix d'une origine

Un cas fréquent est celui où au naturel on commence avec une opération ternaire, et où ensuite, par le choix d'une origine, la structure se rigidifie un peu et devient présentable par une ou deux lois binaires. C'est le cas du plan affine sur un corps quelconque, dont la structure se présente par les calculs de barycentres de trois points variables relativement a des distributions de poids variables, et où, si l'on fixe un point comme origine, la structure barycentrique peut se présenter par calcul d'addition vectoriel et de multiplication d'un vecteur par un scalaire. Bien sûr ce que l'on modèlise alors n'est plus un espace affine, mais un espace affine pointé.

4 Signes et autographes

4.1 Signes et flèches, autographes

Le fond visuel général où s'inscrit notre pensée organisatrice est celui d'une grille de bifurcations indéfinies comme le montre par exemple le dessin suivant, qui constitue un fragment du fond général :



où chaque flèche part d'une flèche, et va vers une flèche, etc., sauf en des places non-saturées. Les places non saturées d'entrées sont marquées par des $\bigcirc$ et celle de sorties par des $\star$; on peut donc considérer que le tapis est une sorte de multi-flèche (connexe dans l'exemple) de multi-source les neuf $\bigcirc$ et de multi-but les huit $\star$.

Ce tapis répond de la conception du signe chez Peirce, mais ce seront souvent d'abord des catégories que nous utiliserons, et les catégories sont comme des versions simplifiées de ce fond que nous dirons *peircéen*, avec un seul niveau d'imbrication, chaque flèche partant d'un objet et arrivant à un objet.

5 Ternarité pure et objets borroméens

L'idée de *ternarité pure* signifie la situation d'un lien ternaire non-réductible à une composition de liens binaires. C'est cette idée qui dirige le discours théologique sur la trinité, et la visualisation d'icelui en la figure de l'entrelac borroméen de trois ronds qui tient à trois mais pas deux par deux. Par où Jacques Lacan introduit en psychanalyse son objet a et sa logique de l'entrelac du réel, du symbolique et de l'imaginaire. Ce qui est expliquable du point de vue catégorique et de l'objet borroméen [8].

5.1 Objets borroméens

Dans une catégorie $\mathcal{C}$ où existent des flèches nulles, des conoyaux (coker f) et des sommes $(X+Y)$, où $i_X^{X+Y} : X \to X+Y$ est l'inclusion de$X$ dans $X+Y$, un *objet borroméen* est un objet B où sont assemblés trois objets R, S, T et 3 monomorphismes

$$r : R \rightarrowtail B,\ \ s : S \rightarrowtail B,\ \ t : T \rightarrowtail B$$

[8]R. Guitart, L'idée d'objet borroméen, à l'articulation entre les nœuds et la logique lacanienne, Colloque *Lacan et les mathématiques*, 9 et 10 février 2011, Université de Rouen, *Essaim*, No 28, *" Pourquoi les mathématiques comptent pour la psychanalyse ?"*, Érès, mai 2012, p. 85-97.

déterminant collectivement un épimorphisme régulier $[r,s,t] : R+S+T \twoheadrightarrow B$, et donnant lieu à un diagramme hexagonale:

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[rr, "i_R^{R+S}"] \arrow[dl, "i_R^{T+R}"'] \arrow[dr, tail, "r"] & & R+S & \\
T+R & & B \arrow[ll, two heads, "\mathrm{coker}\, s"] \arrow[ur, two heads, "\mathrm{coker}\, t"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{coker}\, r"'] & & S \arrow[ll, tail, "s"] \arrow[ul, "i_S^{R+S}"'] \arrow[dl, "i_S^{S+T}"] \\
& T \arrow[rr, "i_T^{S+T}"'] \arrow[ul, "i_T^{T+R}"] \arrow[ur, tail, "t"] & & S+T &
\end{tikzcd}$$

5.2 Au-delà de la logique binaire

Les logique à plus de 2 valeurs apparaissent naturellement par le procédé de recollement de plusieurs logiques biaires, par exemple par recollement de trois logique binaire on peut dégager une logique à 4 valeurs[9].

6 Dualités et trialités, adjonctions et trijonctions

Une adjonction[10] (contravariante) entre deux catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, est la donnée de deux foncteurs contravariants $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}},\ \alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ et une équivalence naturelle

$$(-)^{\beta,\alpha} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \alpha(B)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \beta(A)) : (-)^{\alpha,\beta} = ((-)^{\beta,\alpha})^{-1}.$$

Ainsi se représente une situation de *dualité* entre les objets A de $\mathcal{A}$ tels que naturellement $A \simeq \alpha(\beta(A))$ et ceux B de $\mathcal{B}$ tels que naturellement $B \simeq \beta(\alpha(B))$.

Pour représenter les situations de *trialité*, nous pourrons utiliser la notion de trijonction. Une *trijonction*[11] entre trois catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, est la donnée (γ, β, α) de 3 foncteurs contravariants :

$$\gamma : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}},\ \beta : \mathcal{C} \times \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}},\ \alpha : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$$

et 3 équivalences naturelles, avec une condition de circularité

$$(-)^{\alpha,\gamma}(-)^{\gamma,\beta} = (-)^{\alpha,\beta} :$$

$$(-)^{\alpha,\gamma} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \gamma(A,B)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \alpha(B,C)) : (-)^{\gamma,\alpha} = ((-)^{\alpha,\gamma})^{-1},$$

[9] R. Guitart, An hexagonal Framework of the Field $\mathbb{F}_4$ and the Associated Borromean Logic, *Log. Univers.*, june 2012, vol. 6, Issue 1-2, pp. 119-147 (published online 13 october 2011, DOI: 10.1007/s1187-011-0033-6).

[10] D.M. Kan, Adjoint functors, *Trans. Am. Math. Soc.* 89 (1958), 294-329.

[11] R. Guitart, Trijunctions and Triadic Galois Connections, *C.T.G.D.C.* LIV-1 (2013), pp.

$$(-)^{\gamma,\beta} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \beta(C, A)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \gamma(A, B)) : (-)^{\beta,\gamma} = ((-)^{\gamma,\alpha})^{-1},$$
$$(-)^{\beta,\alpha} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \alpha(B, C)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \beta(C, A)) : (-)^{\alpha,\beta} = ((-)^{\beta,\alpha})^{-1}.$$

Pour chaque trio d'objets (A, B, C) de $\mathcal{A}\times\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ on obtient 12 foncteurs d'une variable disposés en un bi-hexagone $< A, B, C >$, où chaque ligne extérieur pointillée désigne un adjoint à droite de la ligne intérieure continue adjacente :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \arrow[dl, bend right, "\beta(C,-)"] \arrow[dr, bend left, "\gamma(-,B)"'] & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dashed, bend left=50, "\alpha^{\mathrm{op}}(-,C)"] \arrow[ur, phantom, bend left=25, "\vdash"] \arrow[d, dashed, bend right=50, "\gamma^{\mathrm{op}}(A,-)"'] \arrow[d, phantom, bend right=25, "\vdash"] & < A, B, C > & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[ul, dashed, bend right=50, "\alpha^{\mathrm{op}}(B,-)"'] \arrow[ul, phantom, bend right=25, "\dashv"] \arrow[d, dashed, bend left=50, "\beta^{\mathrm{op}}(-,A)"] \arrow[d, phantom, bend left=25, "\dashv"] \\
\mathcal{C} \arrow[u, bend right, "\beta(-,A)"'] \arrow[dr, bend left, "\alpha(B,-)"] & & \mathcal{B} \arrow[u, bend left, "\gamma(A,-)"] \arrow[dl, bend right, "\alpha(-,C)"'] \\
 & \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \arrow[ul, dashed, bend left=50, "\gamma^{\mathrm{op}}(-,B)"] \arrow[ul, phantom, bend left=25, "\vdash"] \arrow[ur, dashed, bend right=50, "\beta^{\mathrm{op}}(C,-)"'] \arrow[ur, phantom, bend right=25, "\dashv"] &
\end{tikzcd}$$