Version préliminaire d'un article à paraître dans :
Revue de synthèse, 136, 6ème série, n°1-2, 2015.

Note sur deux problèmes pour une épistémologie transitive des mathématiques

René Guitart

1. BUT.

1.1. Cette note porte sur deux livres fort intéressants, *La possibilité des nombres*, de Frédéric Patras[1], et *Philosophie synthétique des mathématiques contemporaines*, de Fernando Zalamea[2].

L'examen complet de ces deux livres, que je n'entreprendrai pas, loin de là, devrait se saisir aussi au moins de *La pensée mathématique contemporaine* (Patras)[3], et de *América una trama integral. transversalidad, bordes y abismos en la cultura americana, siglos XIX y XX* (Zalamea)[4], et *Razon de la frontera y frontera de la razon* (Zalamea)[5], où chacun des auteurs complémente sa pensée.

Pour Patras, le livre *La pensée etc.* explicite sa vue sur le travail mathématique actuel, et notamment sur Grothendieck, dont rien n'apparaît dans *La possibilité etc.*

Pour Zalamea, les livres *América etc.* et *Razon etc.* vont avec la proposition finale de *Philosophie etc.* d'examen transdisciplinaire du rapport de la mathématique à la totalité de la culture. Envisageant une structure faisceautique de la culture, développant l'image de *los bordes y el pendulo*, pour représenter l'activité créatrice.

Mais les deux auteurs ont, chacun, une œuvre riche en livres et articles, qu'il faudrait aussi consulter.

1.2. Nos auteurs se rapprochent, par leurs formations en mathématique et leur souci de philosophie. Patras et Zalamea sont tous deux mathématiciens d'abord, et ont travaillé avec la théorie des catégories. Frédéric Patras, français, né en 1967, a soutenu une thèse[6] avec Pierre Cartier en 1992 ; Fernando Zalamea, colombien, né en 1959, a soutenu une thèse[7] avec Ernest. G. Manes en 1991. Tous deux on un parcours délibérément mixte mathématique-philosophie, élargie pour l'un à la physique théorique et la chimie, et pour l'autre à la physique, la littérature et les arts.

---

[1] F. Patras, *La possibilité des nombres*, PUF, Paris, octobre 2014.

[2] F. Zalamea, *Philosophie synthétique des mathématiques contemporaines*, trad. C. Alunni, à paraître. (édition originale espagnole : Filisofia sintética de las matematicas contemporaneas, Bogota, Universidad Nacional de Colombia, Faculdad de Ciencias, 2009. édition anglaise : Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics, trad. Z. L. Frazer, Urbanomic, Falmouth, UK, Sequence Press, New York, USA, 2012).

[3] F. Patras, *La pensée mathématique contemporaine*, PUF, Paris, 2001.

[4] F. Zalamea, *América una trama integral. transversalidad, bordes y abismos en la cultura americana, siglos XIX y XX*, Bogota, Universidad Nacional de Colombia, Faculdad de Ciencias Humanas, Biblioteca abierta. Estudios interdisciplinarios, 2009. Voir notamment la Fig. 13, p. 281.

[5] F. Zalamea, *Razon de la frontera y fronteras de la razon,* Bogota, Universidad Nacional de Colombia, 2010.

[6] F. Patras, *Homothéties simpliciales,* Thèse, U. Paris VII, 1992.

[7] F. Zalamea, *Enumeration and Parametrization: A category-Theoretic Approach*, PhD, U. of Massachusetts Amherst, 1991.

Leur intérêt philosophique va avant tout à la théorie de la connaissance, ou épistémologie. Mais là, au plan des ressources et orientations mobilisées, tout en ayant tous deux une visée phénoménologiste, ils s'opposent.

Patras mobilise implicitement la philosophie analytique et le souci afférent des fondements, avec notamment Frege et Husserl ; concevant, dit-il, "la théorie de la connaissance sous sa forme la plus classique, issue de la métaphysique, Kant, Husserl et la pensée phénoménologique".

Zalamea se départit explicitement des problèmes de fondement et de philosophie analytique, et se met à une philosophie à la Lautman et à la Peirce, sur la dialectique des gestes du mathématicien et le travail créatif.

Comme si chacun assumait comme coupure la dichotomie risquée "philosophie de la connaissance" versus "philosophie de l'action", en se plaçant en tendance l'un plutôt d'un côté, l'autre plutôt de l'autre.

1.3. Je me propose l'exercice très-limité de lire, dans les deux premiers livres cités seulement, et relativement aux mathématiques proprement dites — éventuellement de travers, et éventuellement aux corps défendants des auteurs — un matériau nécessaire, en positif ou en négatif, à la formation de ce que je nommerai une *épistémologie transitive* (du latin *transire*, aller au-delà — d'où le sens de transitif en grammaire, pour qualifier un verbe qui en appelle à un complément d'objet). Matériau chez l'un signifié sur un mode mineur par le mot *possibilité*, chez l'autre, d'un mode majeur, par le mot *synthétique* ; retenue ou réglage classique positif, et avancée ou déraison romantique ouverte. Matériau qui concernera finalement seulement une question — qui repointe vers leurs formations scientifiques et les catégories — à savoir le traitement par eux du problème des objets et du problème des transits.

2. ÉPISTÉMOLOGIE TRANSITIVE

Je donne ici, en une douzaine d'observations sommaires, une première vue rapide de ce que je voudrais cerner sous le terme d'*épistémologie transitive*, pour ensuite lire à ce titre Patras et Zalamea. L'épistémologie transitive sera un système articulant la dialectique de l'objet et du transit. De l'objet connu ou hypostasié, du transit activé ou geste. A ce système la théorie des catégorie sera indispensable, on y reviendra en conclusion.

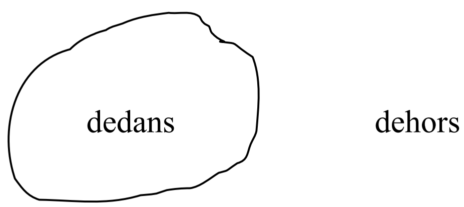
2.1. TRANSITIVITÉ. J'aurais pu proposer le terme de "transitoire", mais cela signifierait un peu que ladite épistémologie serait éphémère et provisoire, alors que ce que je veux est une épistémologie qui, d'abord, traite de la mathématique au travail, de la construction créative de ses gestes, et donc du transit en cours qui fait que la mathématique s'invente et découvre *en allant par soi hors de soi*, en traitant mathématiquement de ce propre mouvement.

2.1.1. En psychanalyse le transférentiel est ce qui est relatif au transfert, opération par laquelle le sujet projette son sentiment vis-à-vis d'un objet sur un autre objet qui se substitue au premier. Le terme de "transférentielle" eut donc aussi pu me convenir, pour signifier perspectivisme, sauf que le transfert signifie quelque peu une certaine conservation de quelque chose (le sentiment lui-même, dans le transfert en psychanalyse), et une certaine homogénéité des territoires en jeu destinés à recevoir ce quelque chose (les objets), et un codage sans possibilité de métamorphose radicale, ou pire sans possibilité d'erreur rédhibitoire, avec donc la possibilité de traduction ou report d'un objet sur l'autre, possibilité qui en revanche est positivement en risque d'être perdue quand il s'agit d'aller au-delà, dans l'inconnu.

Aussi je préfère le transit (ouverture risquée) au transfert (conclusion surmontée). Par exemple je dirais : la pulsation mathématique est au moment d'un transit, au point de bifurcation dans l'installation de transferts.

2.1.2. En psychanalyse encore, nous avons les *phénomènes transitionnels* et/ou *l'objet transitionnel* de Donald Winnicott, objet dont l'existence marque "une distinction nette entre le fantasme et le fait réel, entre les objets internes et les objets externes (tel le sein de la mère, le doudou, le nounours, ou la bobine du for-da), entre la créativité primaire et la perception [...] conduit l'enfant à accepter la différence et la similarité [...] le mène de la subjectivité pure à l'objectivité" [8]; "ce que nous percevons du voyage qui marque la progression de l'enfant vers l'expérience vécue". Comme le souligne Pontalis dans sa préface, importe moins l'objet transitionnel que le phénomène transitionnel, soit l'existence d'une "aire qui assure une transition entre moi et non-moi, la perte et la présence [...] dont l'objet n'est que le signe tangible".

J'accepterais de prendre en charge, dans mon expression "épistémologie transitive", cette dimension à la manière de Winnicott de la transition, du moi (ME) vers le non-moi (no-ME), suivant le "dessin d'enfant" (c'est son expression, que l'on retrouve, on le sait, chez Alexandre Grothendieck, à propos des derniers enjeux mathématiques qu'il considéra) qu'en propose Winnicott[9]:



Ce dont une image mathématique serait l'espace à la Sierpinski : $S = \{d\} \cup U$, où $d \notin U$, avec U un ensemble quelconque non-vide, avec d un "élément" qui n'est pas dans U, et avec pour seuls ouverts : $\varnothing$, U, S.

Ce dont l'abréviation est une flèche ainsi faite :

$$\text{dans} \rightarrow \text{hors},$$

en observant cependant qu'à ce moment "créatif", "dans" et "hors" sont hétérogènes, ne sont pas tous deux des objets d'une même catégorie, ils sont à des niveaux de constitution différents, l'un est limité, l'autre dans l'ouvert ; l'Un est tenu de sa membrane, l'Autre est la dispersion. Le phénomène transitionnel va de "dedans" à "dehors", créant l'"être en relation" entre le moi, dans sa membrane limitante, et les objets dehors. L'objet transitionnel sera l'un de ces objets du dehors, ré-incorporable à un dedans élargi de cette manière, quoique détachable.

2.1.3. Ce rendu du terme "transitif" convient d'autant plus que cette transition signifie un souci nécessaire de la créativité mathématique, qu'elle marque l'orientation de la pulsation mathématique initiale, ou qu'elle se lit dans l'articulation psycho-logique entre une ontologie et une épistémologie, l'articulation scientifique entre la vérité assumée et la saisie rationnelle des conditions de savoir cette vérité. Pour accéder à ces conditions il faut lâcher prise sur lesdites vérités. Une épistémologie transitive en ce sens serait celle qui mettrait en scène moins l'ontologie, et plus la transition de l'ontologique à l'épistémique, moins les acquis mathématiques que le mouvement créatif de sortie de ces acquis. C'est par ce mouvement

[8] D. W. Winnicott, *Jeu et réalité*, folio essais 398, 2002 (Playing and reality, 1971), p. 36.

[9] D. W. Winnicott, *La nature humaine*, coll. tel n° 408 Gallimard, 1990, p. 92.

comme savoir-faire que l'objectivité se constitue, du moins que l'objectalité advient, que les objets mathématiques émergent, comme figure de l'appropriation du mouvement de la recherche.
2.1.4. En complément à la question psychologique du phénomène transitionnel, par lequel, dirais-je, le sujet transite au logos antéprédicatif, il faut placer cette autre question, déjà de transition, qui est : la perception d'une chose, au départ de la construction d'un objet, envisagée pour le sujet comme transmission auprès de son corps d'un système relationnel reconnu comme spécifique de la disposition relative du corps et de la chose, "par lequel le sujet s'installe dans son monde"[10]. À transposer au plan de la perception intellectuelle dans l'imaginaire du mathématicien, aux points de transit entre les régions arithmétique, géométrique, algébrique, etc., et dans les sous-ramifications historiquement constituées des théories suboordonnées.
2.1.5. Et puis, de façon heureuse vis-à-vis de ce que j'indique par "épistémologie transitive", le terme "transitif" évoque l'axiome mathématique de "relation binaire transitive", qu'une relation R satisfait si de zRy et yRx, résulte zRx ; ce qui se phrase aussi : via y, la relation R transite de x à z. Cette transitivité s'écrit encore $RR \subseteq R$, en utilisant RR, la composition de R avec soi-même. On dira : le transit de R à R reste dans R. Ce qui pointe vers la propriété algébrique fondamentale qui peut relier trois relations binaires R, S, T, à savoir celle que l'on écrit :

$$SR \subseteq T,$$

à entendre ainsi : la composition SR, signifiant tous les transits possibles de R à S, est sous contrôle de T.
Si R est une variable x, S une fonction f, T une valeur y, cela prend la forme

$$fx = y.$$

Ainsi le transitif est la pensée au sous-basement de la composition effective des relations et fonctions, comme de l'évaluation des fonctions, de la mise en oeuvre du jeu fonctionnel, et partant de là, en considérant à son tour cette fonctionalité au point de la pure détermination abstraite de son jeu, de la notion mathématique de catégorie.

Au demeurant il y a en mathématique un autre usage du terme "transitif", c'est quand on dit qu'une action d'un groupe G sur un ensemble E est transitive, pour signifier que pour tout x, y de E il existe un g de g tel que gx=y (on dit alors que par g on transite de x à y). Par là on retrouve encore les catégories, quand on y trace des flèches $g : x \rightarrow y$.
2.1.5. Pour une telle épistémologie, je pose que nous avons à comprendre la dialectique *objet/relation*, jusqu'à mettre en jeu sur la scène mathématique l'impossible du geste de pensée que déjà cette première dialectique nomme. Pire, cette dialectique se double d'une autre, qui est la dialectique relation/fonction, en ceci que la relation reste implicite et passive, multivoque, est grosse de toute un jeu de fonctions univoques possibles qui s'y choisissent, qui la représente en actions déterminées. Et nous avons alors une tension, dialectique encore dira-t-on, entre ces deux dialectiques, à savoir l'alternative entre, au titre de la représentation des relations, construire des objets (qui fixent ou repèrent) et/ou construire des fonctions (qui orientent ou meuvent) : penser ce dernier transit, qui se joue dans le geste mathématique entre localiser et déplacer.
2.1.6. Pour le dire naïvement j'affirme que l'activité mathématique est, de part en part, l'exercice effectif d'une pensée dialecticienne de la question de l'organisation et de la méthode de ladite pensée. La pensée mathématique *s'*organise elle-même, et donc elle est vivante, auto-transitive, et, dans l'acte mathématique, elle donne priorité à son propre geste, qui la constitue de son accès à son dehors. Auto-transitive, elle s'invente et se découvre. Merleau-Ponty à écrit que "le philosophe se reconnaît à ce qu'il a inséparablement le goût de

[10] J. Merleau-Ponty, *Phénoménologie de la perception*, coll. tel n°4, Gallimard, 1945, p. 350.

l'évidence et le sens de l'ambiguïté"[11] : alors le mathématicien est en ce sens un philosophe, un philosophe qui "s'emprunte à autrui"[12] : dialecticien malgré lui.

Du reste, le mathématique est la pratique des mathématiciens, qui inventent et découvrent des solutions à des problèmes, des objets connus ou nouveaux tenant un rôle assigné. Ce qui, une fois épuisée la pure virtuosité de singe combinateur, la vitesse de calcul et raisonnement logique, demande d'aller au-delà de l'énoncé, d'en transgresser les limites, demande une vitesse proprement transcendante, un jet de pensée, pour obtenir du retour dans le champ assigné, ce qui enfin résulte du jeu de l'écriture et la lecture. Ce dont les méthodes mathématiques dites "transcendantes" font bel et bien état. En précisant qu'en mathématique "transcendant" signifie au-delà des méthodes déjà spécifiées, par exemple au-delà de l'algèbre, au-delà des nombres réels, au-delà de la logique classique, etc. Sous couvert du transitif on retiendra les méthodes transcendantes.

2.1.7. Pour préciser encore ce que signifie l'auto-transitivité des mathématique, on soulignera la *grande transitivité* nécessaire à l'activité mathématique, dont la condition de mise en acte est la *pulsation mathématique*.

Au plan de la recherche, lorsque dans un champ mathématique A j'observe une particularité B0, alors la donnée B qui consiste en ce qui en général sera de même espèce que B0, devient un champ mathématique légitime. Je m'autorise à transiter du "monde" de A (de sa catégorie) au "monde" de B (de sa catégorie), puis à enchaîner de tels passages.

L'usage de méthode transcendante est un exemple, quand on introduit un monde d'entités imaginaires et que l'on s'y plonge, en y calculant.

Aussi quand je fais une preuve de Z à partir de A, je transite par des étapes intermédiaires qu'en quelque sorte j'invente, obtenant à partir de A un B, puis de B un C, etc. Une preuve est en effet un chemin qui s'ouvre sous mes pas quand je l'invente ; au moment d'avancer le pied pour le poser sur une nouvelle pierre, la pierre n'existe pas encore dans le monde de ladite preuve. La condition de mise en acte de ces transits, des plus particuliers aux plus généraux, est un état pulsatif du mathématicien au travail, un retrait du sens dans A (dont s'isole ou se détache B0). Il faut suspendre la présence à l'esprit de la totalité du sens de A, puis réorienté le fragment de sens conservé.

En voici un exemple, volontairement très-élémentaire. En algèbre réelle, on sait faire la manipulation d'expressions a+b, a-b, et obtenir l'identité remarquable

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2.$$

Si ensuite je considère que s est un signe, soit + ou -, alors –s est – ou +, et $s^2 = 1$ donne :

$$(a+sb)(a-sb) = a^2-s^2b^2= a^2-b^2.$$

Si maintenant (pulsation) je suspends la propriété $s^2 = 1$, et si je la remplace par $s^2 = -1$, et si, je change le nom de s en i, avec donc $i^2 = -1$, alors j'obtiens (transit) l'identité

$$(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2.$$

Je suis alors déjà en train de calculer dans un autre monde (transfert), celui de l'algèbre des nombres complexes. Bien sûr i n'est plus un signe ordinaire, ni même un nombre réel. On pourra le "penser" comme un super-signe (par exemple comme l'indication d'un 'quart de tour'), comme une racine carrée du signe – (le demi-tour).

Nous cherchons alors à nous familiariser avec le nouveau monde ainsi introduit, à en éprouver la possibilité et les impossibilités, la consistence et la forme, à apprendre s'il peut servir, si le passage par ce monde permet d'obtenir des solutions à des problèmes du monde "réel" précédent. L'histoire nous montre les gestes de mathématiciens qui répondent à ces questions. L'épistémologie transitive sera celle qui empruntera à l'histoire de telles formules

[11] M. Merleau-Ponty, *Éloge de la philosophie*, coll. idées n°75, Gallimard, 1953, 1960, p. 10.
[12] M. Merleau-Ponty, *Éloge de la philosophie*, p. 241.

montrant les pulsations et transits décisifs, aux points où des mondes nouveaux s'inventent, se proposant du coup comme manuel de savoir-créer des mathématiques.

2.2. TRANSITIVITÉ DU JEU : ENTRE PLAYING ET GAME ? Trouvera-t-on les objets et gestes mathématiques comme constituant d'un jeu — comme le jeu d'osselets par exemple — jeu qu'on pourrait nommer *le Calcul*, et un tel soi-disant "jeu mathématique" peut-il changer ?
En fait cette question est mal posée, parce que nous n'avons en français qu'un mot, le mot jeu, pour traduire les termes anglais game, play, et playing. Les anglais eux, tiennent pour essentielle la distinction entre le jeu strictement règlementé (game), et le jeu ouvert libre (play), et l'activité de jouer librement (playing)[13]. Winnicott affirme que "c'est en jouant, et peut-être seulement quand il joue, que l'enfant ou l'adulte est libre de se montrer créatif"[14]. Une épistémologie transitive, prenant en compte cette tension entre playing et game, activité ouverte de mise en scène ou invention de calculs, et exercice interne d'un calcul aux règles closes, sera donc attentive à cette dimension de jeu, de pratique vivante créatrice, comme le jeu des perles de verre (Das Glasperlenspiel).

Sans pour autant nous mettre à l'école de la philosophie du langage, on entendra aussi "jeu" avec Wittgenstein et sa notion de "jeu de langage" (Sprächespiele) par laquelle il signifie que parler est une activité et une forme de vie (Lebensform) : "les jeux de langage sont les formes de langages par lesquels un enfant commence à utiliser les mots"[15]. Pour lui, du côté des mathématiques, le sens est l'usage, la place dans un calcul ; le point pour nous ici sera de savoir si dans ce jeu, le joueur peut créer de nouvelles instructions, si sortir du game fait partie du play.

En français, le terme "jeu" signifie aussi le jeu dans un méchanisme, le défaut d'ajustement, la latitude qui laisse une certaine liberté aux mouvements, dans l'interstice entre les pièces, l'intervalle qui permet le frottement *et* le glissement, l'ébat (en horlogerie). Pour que l'horloge puisse faire de l'heure, il faut que ses pièces puisse s'ébattre, sortir de leurs trajectoires a priori strictement assignées.

C'est comme jeu de pensées ouvert, comme mouvement d'ébats partiellement libres (en débats), création et manipulation d'analogies, et ce néanmoins en soucis de rigueur, que l'on peut considérer la mathématique comme un jeu. On ne confondra pas ni avec l'apprentissage formel des règles, ni avec l'idée du jeu gratuit pour le seul plaisir, moyen déplorable de certains didacticiens : plaisir au demeurant douteux de fonctionner automathiquement, comme dirait Stella Baruk. C'est très précisément le caractère transitif du jeu qui importe, voire son auto-transgression possible. Faisant suite à la mathématique comme déploiement des possibles de l'Être, la nouvelle étape est bien d'y voir la possibilité de l'autotransgression de ce déploiement, quand la mathématique s'observe et se saisit d'elle-même.

2.3. STABILITÉ OU TRANSIT. A ce point de départ, nous pouvons commencer par deux questions complémentaires : qu'est-ce qu'un objet stable pour la mathématique ? qu'est-ce qu'un transit ou un geste de transfert en mathématique ? Et quid de la dialectique stable/transit ?

Donc les deux problèmes qu'annonce mon titre : En quoi la possibilité d'objets, de nombres par exemple, est-elle figure nécessaire et/ou suffisante d'une donnée mathématique stable ? Comment le transit en acte, ou le transfert, la construction de foncteurs par exemple,

---

[13] J.-B. Pontalis, "Trouver, accueillir, reconnaître l'absent", préface dans D. W. Winnicott, *Jeu et réalité*, p. 7-17.
[14] D. W. Winnicott, *Jeu et réalité*, folio essais 398, 2002, p. 109.
[15] L. Wittgenstein, *Cahier bleu*, p. 56.

dans le jeu des calculs et pensées mathématiques est-il de fait lui-même une donnée mathématique, que la mathématique travaille ? *In fine*, objets et transits en viennent-ils à être confondables, juste deux qualités duales appartenant à toute entité mathématique ? Et l'acte mathématique, que l'épistémologie devrait nous donner à entreprendre, participe-t-il du savoir-faire avec cette contradiction ?

Il s'agirait au titre de l'analyse des actes mathématiques, de l'invention et la découverte en mathématique, de soutenir ou du moins d'interroger ceci : un objet est un objet d'une catégorie, un transit est ce qui sera réalisé comme transfert entre deux objets (flèche). Une catégorie est un objet, un transfert est un objet, un transit même est un objet. Les objets repérent les transits. Les transits existent sans objets.

2.4. LE SOIN DES NOMBRES DEPUIS TOUJOURS. Le livre de Patras examine la première question, celle de l'objet, avec l'exemple le plus incontestable, à savoir *le nombre*, qui persisterait à exister au regard de nombreuses postures et des questionnements philosophico-épistémologiques traditionnels, qui supposent d'abord une épistémologie existentielle, c'est-à-dire in fine une ontologie absolue peu ou prou réalistique, qui croit à l'objet, à sa possible existence, à l'Un donc ; qui distingue mal entre l'Être et l'existence. Il est affirmé qu'il y a l'idée de nombre qui perdure, se transforme au gré de l'avancement mathématique, des perspectives philosophiques sur cet avancement ; qui donc forme un point très-stable de la pensée du mathématicien : c'est simultanément un objet et un concept, et on s'interroge tant sur sa nature que sur sa fonction. Le récit de Patras montre que la mathématique prend soin des nombres, qu'elle s'en sert, qu'elle s'en constitue ou même s'en fonde. Dans le mathématique *il y a* le nombre, dirait-on. Patras est mathématicien, utilisateur professionnel de la théorie des catégories, il sait donc que le mathématicien au travail procède à des transferts entre possibilités d'objets ; et implicitement son livre démontre que ce que l'on prendrait pour un objet, ou un quasi-objet, un point de stabilité, est aussi toujours résistant à l'existence-une. De fait il exhibe la dispersion constitutive du nombre, lequel, par là, insiste dans le travail mathématique. Il invite à s'en étonner. On pourrait dire que le mathématicien créatif est celui qui prend cet étonnement au sérieux, pense *et* calcule cet étonnement même, qui cerne la forme du *il y a le nombre*. Ce dont Patras parle, dans la langue de la tradition philosophique, dans les pas de Frege et Husserl, pour dire aux philosophes un souci majeur dont la mathématique tient son occupation, le nombre, que la mathématique rumine. Dans la croyance à l'objectalité, ou du moi avec un désir d'objet.

2.5. LE FAIRE MATHÉMATIQUE AUJOURD'HUI. Le livre de Zalamea examine la seconde question, celle du transit, avec, principalement, mais pas seulement, l'outil le plus évident aujourd'hui, les foncteurs, les catégories, les adjonctions et limites, les faisceaux, qui représenterait bien, dans le travail mathématique, les changements de domaines des travaux mathématiques. Il élabore, au regard d'une modélisation elle-même faisceautique de la question épistémologique, une épistémologie où la valeur prioritaire est la créativité effectivement réalisable en termes de transits entre localités du champ d'activité mathématiques. Pour rendre compte du style d'élaboration de grands travaux mathématiques contemporains. Zalamea emploie le langage de l'imaginaire géométrique des mathématiciens au travail, et montre la fonction de cet imaginaire dans ce travail.

L'hypothèse de Zalamea est de visée la connaissance du mathématique en tant qu'un "faire", un jeu de gestes, observable dans l'avancement du mathématique aujourd'hui, le geste de dispersion (ascendant), de concentration (descendant). Quelque chose comme une macro-pulsation, pour le formuler dans mon langage. Ce dont Zalamea parle, après Lautman et Peirce, dans la langue mathématicienne d'aujourd'hui, pour dire aux philosophes sa philosophie de la connaissance à propos des mathématiques. Sous condition de la croyance au transitionnel, semble-t-il.

Zalamea indique (voir au paragraphe 4.2.) que la théorie des catégories codifie le transformationnel, présent en mathématique depuis l'antiquité, dit-il. Mais néanmoins on peut regretter qu'il n'informe pas explicitement de ce que le souci du transit se manifeste explicitement depuis des siècles dans la mathématique, par la question des fonctions, qui sont des "objets" en mathématiques depuis au moins le XVII ème siècle, ce qui, à l'époque constitua une révolution : invention des objets qui représente le changement, et qui se donnent à voir comme courbes[16] ; du coup sa monstration semble indiquer au XXème siècle un nouveau style de mathématique, relativement étranger aux enjeux précédents, alors qu'il s'agit d'abord d'un approfondissement, et ensuite seulement d'une révolution en effet : la mathématique dans son intégralité se regarde faire et se changer, et développe la mathématique de son propre changement.

La théorie des catégories est en fait plus qu'une codification ; elle se développe en observant le savoir-faire mathématique des années 1930 environ, les résultats sur la topologie algébrique, l'homologie, la dualité notamment : c'est une mathématique de l'activité mathématique, et donc bien sûr de la construction d'objets et espaces, et de la mise en œuvre de relations et transits, qui continue la mathématique générale des fonctions, elle-même synthèse des cas de fonctions mis en jeu, pour comprendre les propriétés des systèmes de nombres et géométries. L'association d'un objet à un autre, puis l'analyse de telles associations et de leurs compositions *in abstracto*, n'aurait pas de sens sans le passage concret par la théorie des ensembles, ou pour mieux dire la théorie logico-ensembliste, qui a permi de définir les nombres et les fonctions au sein d'un univers où l'activité mathématique se donne à examiner. Bien sûr ensuite cet "univers" lui-même sera remis en question, mais c'est du fait d'examiner ce que l'on y fait, ce que l'on s'autorise à y faire, que résulte la possibilité partielle de s'en défaire, de s'en départir.

2.6. FONDEMENT OU EXPÉRIENCE MATHÉMATIQUE, AXIOMATIQUE ET TRANSCENDANCE. Philosophiquement, Patras prend en compte les enjeu de logique et fondement, et partant la "philosophie du langage" où le "linguistic turn", le cognitivisme aussi, tandis que Zalamea se déprend vivement de la philosophie analytique et de l'épistémologie que l'on pourrait dire élémentariste, celle qui se maintient au niveau des mathématiques élémentaires. Grosso modo, Patras serait plutôt du côté de Jean Cavaillès, Zalamea franchement du côté d'Albert Lautman. Encore que Cavaillès soit aussi du côté de Lautman!...Mais on lira avec intérêt la thèse de Nicasio Ledesma Perena[17].

2.6.1. En tous cas, avec Patras on est plutôt du côté du même et de l'intransitif, avec Zalamea plutôt de celui du change et du transitif pur, et de là tous deux mettent implicitement au travail la tension que je nomme du *même&change*. Sans toutefois la promouvoir de façon décisive. Pour filer la comparaison avec l'analyse de Winnicott, d'un côté il y aurait le moment de fascination nécessaire par l'objet transitionnel (élaboration de la membrane limitante), et de l'autre le moment, non moins nécessaire, de lâcher la prise sur l'objet, d'effectuation du phénomène transitionnel en propre (dynamique ouverte).

2.6.2. Dans tout travail mathématique, fait de gestes mathématiques, il y a une sorte de germe du gestuel mathématique, que je nomme la pulsation mathématique, dont on peut enseigner l'exercice. Il s'agit dans la suspension ou retrait du sens, de la capacité à engendrer et explorer

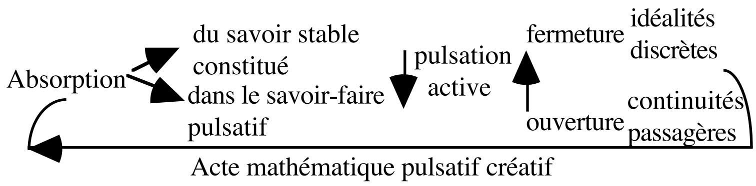
[16] E. Barbin, *La révolution mathématique du XVII ème siècle*, ellipses, 2006.

[17] N. L. Perena, *La matematica moderna : entre el "formalismo modificado" de Cavaillès y el "platonismo estructural" de Lautman*,Thesis, Sevilla, 2007.

du virtuel, à ouvrir les équivoques, à faire travailler l'ambiguité. Le mathématicien invente le chemin d'un dévoilement d'une découverte, dans l'absorption pulsative.

Ainsi, on a la bifurcation constitutive du "risque" à prendre entre savoir et savoir-faire, par quoi "savoir = savoir-faire", ce dont un schème achevé serait[18] comme suit ; un point crucial est que la pulsation n'est pas déjà son schème achevé, mais son projet, son jet initial, son intention réalisante, son déclanchement. Tout comme le phénomène transitionnel dans le dessin d'enfant de Winnicott en 2.1.2., la pulsation est ouverte, vers autre chose encore indéterminé. Non pas comme la flèche, mais comme le geste en cours de traçage d'une flèche dont le but est à venir.

Naturellement, formellement parlant, le schéme achevé et bouclé de cette pulsation se laisse aisément exprimer en terme de foncteurs adjoints, notamment au point de la pulsation active entre fermeture et ouverture, ou encore idéalité objet stable et continuité de transits.



On prendra ce schéme comme un format général pour le geste mathématique accompli.

Cette pulsation se tient, par exemple, au moment de l'alternative entre la logique et l'arithmétique : ce que l'on va faire à tel moment est-il un travail du compte ou un travail de la déduction? En compagnie de Patras on apprendra comment sur la question des fondements, cette alternative est décidée chez Cantor ou chez Frege. Cette pulsation peut s'analyser en termes d'expériences avec la mathématique et sous conditions de visées intentionnelles d'usages, on le verra avec Patras chez Husserl. J'ai donné la manière dont on peut la considérer comme implicitement omniprésente chez Bachelard[19].

2.6.3. D'où mes deux questions : pourquoi la stabilité du nombre, pourquoi la dispersion des transits ? Je pense que c'est de tenir bon sur l'articulation de ces deux pôles de pensée, et/ou de calcul, que l'épistémologie transitive est possible, et utile, en tant que science de l*a diversification du même*. Et qui plus est, possiblement, comme science immanente aux mathématiques, considérée au point de la vie de ses gestes comme la dialectique même.

La question du réel, de la réalité, de la nature, de l'expérience, au sein de la mathématique, devrait être mise en jeu ensuite seulement, au regard du travail mathématique vivant, historique et aussi bien d'aujourd'hui. Je ne développerai pas ici sur ce point ce que Patras et Zalamea font de bien intéressant, notamment au titre des phénoménologies ; si du moins on considère, comme le rappelle Claude Romano, que pour Husserl il y a, en deçà du conceptuel et du langage, l'expérience, et avec une "logique du monde", un "logos du monde esthétique", antéprédicative, en-deçà du linguistique donc.

2.6.4. Ce serait l'objet très vaste d'un troisième problème : comment et pourquoi la mathématique atteint-elle à l'expérience ? Aussi bien : comment se peut-il que la physique soit mathématique ? Un horizon de réponse serait Bachelardien et Husserlien, d'être nommée — par Husserl et par Bachelard — *sur-rationalisme*. Comme on sait, pour Bachelard, l'objet physique, l'objet d'expérience, n'advient que dans la suite de la constitution d'un objet mathématique, lui-même dérivée du travail des preuves et autres gesticulations

---

[18] R. Guitart, *La pulsation mathématique*, L'Harmattan, 1999, p. 81.

[19] R. Guitart, Bachelard et la pulsation mathématique, *Revue de synthèse*, tome 136, 6ème série, n°1-2, 2015.

mathématiciennes. Ainsi la réalité est construite, en quelque sorte, dirais-je, comme un espace quotient du monde des gestes et activités mathématiques.

La réponse Bachelardienne, que l'objet physique advient dans l'après-coup des mathématiques, réponse que Charles Alunni[20] explicite au mieux, est en rapport étroit à la question du geste et du diagramme, peut tenir lieu de phénoménologie, comme "analyse spectrale" ; elle initie une dialectique revisitée, la *sur-dialectique*[21,22].

On sait la "division" dont Bachelard affectait la saisie par lui-même de son travail, entre science et poésie ; et pourquoi pas entre sur-rationalisme et sur-réalisme ? Je pense qu'on peut, au moins à titre de problème à examiner, rapprocher surrationalisme et surréalisme, et avec la *surréalité*[23]. C'est-à-dire chercher la dimension transitive de l'épistémologie mathématique dans la dimension artistique du travail mathématique, et l'hypothèse : la mathématique au sens le plus stricte et pur est un art, plutôt qu'une science.

Ici donc la question de la diversification du même restera une question dans la pensée-au-titre-de-la-vérité, donc précisément séparée de l'impensable des opinions, impressions, sensations, et expériences diverses. Sauf l'unique exception possible, sur laquelle tout pivote : l'*expérience du travail mathématique* lui-même, c'est-à-dire de la tension entre l'objectal et le transitionnel : obtenir des objets, faire des transitions ; ce dont le sens relève d'histoires, d'intrigues conceptuelles mathématiques. Ce dont l'exercice effectif est tout d'écriture et de lecture, sous condition de souvenirs. Pourquoi il est si judicieux de considérer, à la manière de parler classique, que le mathématicien est celui qui écrit un "mémoire mathématique".

2.6.5. Il faut une phénoménologie de l'activité mathématique, à quoi diverses branches de la descendance de Husserl devrons participer, éventuellement en oppositions mutuelles. Je relève au passage les analyses anti-réalistes de Maurice Merleau-Ponty, sur l'espace (visée), la formalisation (entreprise), etc. La question serait de relever, très en-deçà du contrôle logique et de l'apparente assurance du geste de formalisation, la nature même de l'expérience de pensée et calcul liés qui préside à l'acte mathématicien. Merleau-Ponty écrit : "que la formalisation soit toujours rétrospective, cela prouve qu'elle n'est jamais complète qu'en apparence et que la pensée formelle vit de la pensée intuitive [..] le lieu où se fait la certitude et où apparaît une vérité est toujours la pensée intuitive"[24]. L'acte mathématicien d'écriture, de formalisation, de lecture, de remords, de déplacements et autres ré-interprétations, dépend pour finir du hasard de l'éveil de l'intuition, ce qui, hors tout psychologisme, signifie l'exercice du transit, l'éprouvé de l'immuable (ou retour de l'invariant), sous condition de vouloir réaliser l'exactitude.

En fait le travail mathématique n'exige pas de fondement autre que local, en raison de problèmes, une donnée axiomatique implicite, et fini toujours par en transcender les limites. On pose un cadre (dedans), des questions s'en trouvent résolues, d'autres irrésolues, on

---

[20] C. Alunni, Bachelard face aux mathématiques, *Revue de synthèse*, tome 136, 6ème série, n°1-2, 2015.

[21] C. Alunni, *Spectres de Bachelard. Gaston Bachelard et l'École surrationaliste*, 504 p., à paraître.

[22] C. Alunni, "Maximilien Winter et Federigo Enriques : des harmonies exhumées",, in C. Alunni et Y. André (éd.), *Federigo Enriques ou les harmonies cachées de la culture eurppéenne. Entre science et philosophie*, Actes du Colloque organisé à l'Academie des Lettres, des Sciences et des Arts de Venise, du 14 au 17 mai 2012, Pisa, Le Edieioni della Normale, Scuola normale superiore di Pisa, 2014.

[23] René R. Held, *L'œil du psychanalyste. Surréalisme et surréalité*, Petite Bibliothèque Payot n°218, 1973.

[24] M. Merleau-Ponty, *Phénoménologie de la perception*, coll. Tel, n° 4, Gallimard (1945), p.442.

change le cadre (dehors), etc. C'est à ce niveau de l'acte mathématique que la pensée dialectique se trouve agir.

2.7. HISTOIRES ET INTRIGUES MATHÉMATIQUES. Pour moi, l'épistémologie n'ira pas sans l'histoire ; encore faut-il s'entendre sur ce qu'est l'histoire.

On trouve, en exergue à la revue *Archive for History of Exact Sciences* trois phrases de Kepler, Leibniz et Euler, donnant trois perspectives pour définir la visée de la revue. Kepler souligne que du mal peut advenir du bien, Leibniz que connaître l'origine des découvertes (et par suite leurs méthodes) sert à développer l'art de la découverte, et la phrase d'Euler est celle-ci, écrite par Euler en français :

> *Car on sait par l'expérience, que lorsqu'une recherche est fort épineuse, les premiers efforts nous en éclaircissent ordinairement fort peu; & ce n'est que par des efforts réitérés, & en envisageant la même chose sous plusieurs points de vue, qu'on parvient à une connoissance accomplie.*

Ainsi la connaissance en science serait sous condition de la diversification du même sous plusieurs points de vue, et serait donc pleine, et partant créatrice, d'être d'abord la connaissance de cette diversification même, de sa forme, de son diagramme. La connaissance de la connaissance en histoire des sciences seraient déterminée par, au moins, les trois phrases en exergue à la revue. On comprendra mieux la portée de cette orientation dans mon analyse ici, sachant que cette revue a été fondée par Clifford Truesdell, en 1960, que William Lawvere fût à cette époque élève de Truesdell avant de se tourner vers la théorie des catégories, et que de là peut-être il tient son attachement à la compréhension par l'histoire, l'histoire des maîtres "précurseurs", ces précurseurs étant considérés comme tels, par tel historien ou mathématicien d'aujourd'hui, seulement du fait d'être des figures décisives dans le mouvement de la diversification mathématique. Comme le souligne Lawvere, l'histoire est indispensable, non pas pour perpétuer les mythes standards [et notamment les aventures des légendaires précurseurs], mais "pour découvrir et clarifier les analyses conceptuelles". On lira les maîtres parce que le tout de ce qu'ils ont dit reste indéfiniment à découvrir et re-développer, et non pas comme précurseurs, comme si eux-mêmes prenaient cette pose. La connaissance mathématique est sous condition de relire les anciens, de les lire chez eux — de lire aussi nos contemporains, chez nous — de les mettre mathématiquement en question, et non pas de "commenter philosophiquement" deux où trois moments décisifs de tels ou tels mythes admis.

Cela dit, il importe, dans la mise en scène de toute épistémologie des mathématiques, d'expliciter quelle conception de l'histoire la soustend. Dans les deux livres que j'examine, les situations sont différentes : chez Zalamea l'histoire est d'abord la "prise en marche" du train d'une mathématique en cours ; tandis que chez Patras, l'histoire des mathématiques est sous condition d'une histoire de la tradition philosophique. Le lecteur peut deviner l'orientation première en constatant la nature des textes envisagés : philosophiques chez Patras, mathématiques chez Zalamea.

Comme dirait Paul Veyne, l'important est pour chacun d'avancer comme tel son scénario et sa conception de l'histoire, ce qu'il appellera son *intrigue* ; ici telle ou telle intrigue mathématique. L'histoire est alors pour le mathématicien, comme le souhaite Merleau-Ponty pour le philosophe, "le centre de ses réflexions, non comme une nature simple, absolument claire par elle-même, et qui expliquerait tout le reste, mais au contraire comme le lieu même de nos interrogations et de nos étonnements"[25]. L'intrigue-maîtresse du mathématicien est l'éclaircissement de l'histoire des mathématiques, et, pour notre compte ici,

[25] M. Merleau-Ponty, *La prose du monde*, coll. tel Gallimard, 1969, p. 117.

de l'histoire de son auto-transition. Cette histoire est à faire parce qu'elle constitue le champ où l'imaginaire mathématicien se répète, se re-dit à son oreille.

Tel geste mathématique se poursuivra sous condition de comprendre l'histoire de certains gestes précédents, avec certains cailloux ou objets déjà posés, l'histoire du développement foncièrement indirect de la mathématique. C'est du point de vue du "penser à côté", du ratage, du renversement de perspective, que la résolution des problèmes aura une histoire instructive pour faire à nouveau des mathématiques. Ce mouvement de Grand Détour peut bien être qualifier de processus abstractif, si l'on entend par là que des significations sont suspendues, dévoyées, recomposées, que des idéalités sont posées ; mais cela n'a rien d'ésotérique ou hermétique. Et si c'est difficile, c'est parce que l'on est au plus près du caractère concret d'un système de geste. La difficulté véritable, au sein de la complexité croissante du paysage, est de comprendre la portée rétrograde de ce qui s'avance aveuglément, comment de façon non-triviale tel développement concret va nous éclairer, comment s'en tire une intuition pour le futur travail, de futures analogies à étayer, etc.

2.8. THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉPISTÉMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES. Particulièrement, la connaissance en mathématique, c'est-à-dire l'établissement propre des démonstrations et constructions d'objets ou prétendus objets et autres solutions de problèmes, serait sous condition du savoir-faire pulsatif du mouvement de transition entre les zones de savoirs et substitutions réglées, aux points de dérèglages ou réinterprétations. Il faudrait apprendre les données, les preuves, les résultats comme des diagrammes en cours dans le vivant du monde des transits mathématiques. Apprendre à les faire ; comme disait Lacan : faut l'faire !

L'épistémologie mathématique serait sous condition d'en connaître l'histoire, par où l'on prend connaissance des constitutions progressives des zones de savoir mathématiques, des stabilisations d'objets autour des problèmes internes, des moments de dispersion ou condensation ; plus profondément son enjeu premier serait d'atteindre à la connaissance des transitions pratiquées, notamment aux passage des points d'abréviations que sont les résultats, c'est-à-dire les théorèmes *et* les définitions.

Une telle connaissance serait parfaite d'être d'une nature qui soit elle-même une répétition de ce qui est observé, à savoir d'être elle-même faite d'activation de transitions : transitive, transitionnelle, transactionnelle, ou pour mieux dire *transférentielle*, à l'image des mathématiques accomplies.

Alors le faire mathématique trouverait un homologue dans le faire discursif, en termes de notions mathématiques, exposant les constructions et transits du mathématicien-artiste ; ou bien du mathématicien-artisan, car plutôt qu'une question d'art — et ce que ce terme charrie d'esthétisme — le point clé est une question d'artisanat, du mode d'emploi des gestes d'un métier. En termes mathématiques donc et non plus en termes des seules notions logiques ou philosophiques.

Et précisons encore ceci : il s'agirait d'une épistémologie homologue à un apprentissage. Où ce qu'il s'agit de connaître, d'inventer et découvrir, ce sont les moyens d'apprentissages, en considérant donc l'activité mathématique comme un exercice d'apprentissage des mathématiques, avec précisément ce que comporte d'ouvert toute procédure d'apprentissage ; c'est l' *ouverture dans l'apprendre* de la mathématique qui serait visée. Au détriment nécessaire de l'assurance fondatrice et de la surveillance logique.

2.9. CROIRE-SAVOIR OU SAVOIR-FAIRE. Le souci du fondement logico-ensembliste relève de cette dimension de la connaissance qui nous rassure, qui nous donne l'assurance d'être assuré, qui donc nous donne le croire-savoir, de valeur assertive. Au contraire le souci du geste et du faire nous donne le savoir-faire, de valeur performative, dont la preuve est juste de le faire. L'épistémologie doit en elle-même distribuer ces deux registres et leur dialectique.

Dans le primat du logico-philosophique traditionnel ne s'enracine qu'une question très spéciale et limitée pour les mathématiques, à savoir la question des fondements, et de l'existence des objets dans "la vraie réalité connue" : question qui, elle-même n'est qu'un point de départ pour l'épistémologie, comme l'ontologie pour la philosophie. Il s'agit maintenant, après un tel départ "fondamentaliste", ou même prenant en marche le train des pensées, pour le lecteur d'une telle épistémologie, de co-naître avec le jeu des transits mathématiques en actions ou des gestes mathématiques. Ce qui sera réalisable en reprenant d'autres points de départs, en se plaçant sous condition d'autres philosophies, et en se plaçant hors posture philosophique, en l'examen et l'exposition des transitions mathématiques qui obligent, pour créer des mathématiques (résoudre les véritables problèmes), à changer de posture. Loin des problèmes de fondements, au plus prêt des gestes initiaux de familarisation avec le matériel de pensée mathématique. Compte alors les gestes pour résoudre une relation en un objet ou une fonction, suivant l'idée évoquée plus haut, au paragraphe 2.3.

De la sorte s'obtiendrait la connaissance de l'expérience de l'art mathématique, dont la notion première est le geste, contradictoire bien sûr, de *la diversification du même*, *la pulsation* au travail, par des gestes de transition vive imposées entre entités stables supposées.

Dans l'art mathématique, la pensée et le calcul se mêlent nécessairement, le mathématicien-aux-calculs ayant toujours un coup d'avance sur le mathématicien-aux-pensées de ce qu'il fait ; c'est parce que d'abord il fait, puis qu'il sait qu'il sait faire, qu'il peut croire savoir ce qu'il fait. Sur fond de ce qu'il s'imagine voir. Le calcul fait et la pensée du geste figurent ce qui est produit dans la mathématique, stabilisation ou transfert.

2.10. MÉTHODE D'INVENTION. Si l'épistémologie est la science de la connaissance, voire la science de la science, et puisque la science gît dans le nouage paradoxal en acte de la méthode contrôlée et de la création innovante, dans le désir paradoxal d'une *méthode d'invention*, alors c'est l'impossible même de réaliser cette méthode qui doit être reconnue et donnée à pratiquer par l'épistémologie. On voudra donc une épistémologie des gestes de transferts, dispersifs et/ou unifiants, amplificateurs et/ou réducteurs, transition entre l'objectal et le transitionnel. Quand on pose les règles et axiomes, on fabrique un univers, un objet dans lequel on va calculer, configurer les données ; plus tard, il s'agira d'inventer un détour, ou une sortie, c'est-à-dire d'autres axiomes, un autre univers, résolutoire des problèmes posés dans le premier. Devant un tel chemin de preuve, un tel geste, le mathématicien considère qu'il est devant une "idée mathématique". Les univers ou objets sont seulement les supports sur lesquels les idées s'écrivent ; ils sont les occasions nécessaires. L'épistémologie transitive mettrait à jour cette méthode en action, ses histoires. Notre morale :Il n'est pas besoin de savoir pour croire-savoir, ni de croire-savoir pour savoir-faire, et rien ne sert de savoir-faire si ce n'est du *savoir-créer*.

2.11. L'OBJET ET LA FONCTION, LES REPRÉSENTATIONS ET LES TRANSITS. Soutenir qu'il y a l'objet "nombre" au fil de l'histoire de la pensée philosophique, supposerait a fortiori de maintenir dans cette histoire la notion d'objet ! Or on sait que pour la scolastique médiévale, le subjectum est ce qui existe pour son compte, l'objectum ce qui se présente à la conscience, tandis qu'aujourd'hui, comme on sait et le rappelle Alain de Libera[26] c'est, pour le sens commun, l'inverse : le sujet se rapporte au moi et à l'intériorité, à l'intime, tandis que l'objet est dans l'extériorité du sujet, c'est l'objectif de tous, indépendant des consciences observaztrices, des visées intentionnelles. Cette variation rend pour le moins délicate la saisie

[26] A. de Libera, Archéologie du sujet, III. L'acte de penser 1. La double révolution, Vrin, Paris, 2014.

du sens de l'expression "objet mathématique", et, partant, le sens du transfert d'un objet d'un univers vers un autre d'un autre univers.

Nous avons là une pierre d'achoppement, que Husserl dégage en posant qu'il n'y a d'objet que pensé, comme corrélat d'une visée intentionnelle, sachant, avec Bolzano, que ne sont pensables que les représentations de choses et les propositions qui portent sur elles. Ce que Sébastien Richard commente[27] : "certes, il n'y a d'objet qu'en tant qu'il est le corrélat d'une visée intentionnelle, mais celle-ci ne se rapporte à l'objet qu'à travers son contenu de signification, à travers le concept ou la proposition, dans leur teneur objective". A quoi j'ajouterai, suivant Claude Romano[28] que pour Husserl il existe une "logique du monde" (Weltlogik), un logos du monde esthétique, un logos de l'expérience, en-deçà de la mathématique et des sciences de la nature, et de la logique langagière.

Dans cette vue, j'inscrirais la question de l'existence du nombre, voire du simple jeu de sa possibilité, non plus au titre d'objet d'une espèce de monde de la réalité, non plus qu'à celui de point de résistance du réel, mais à celui de point de visée du monde de l'expérience de pensée mathématique, c'est-à-dire que l'objet nombre, et sa persistence, cela se tient dans les mains du mathématicien au travail, comme possibilité de geste, d'opération. Il n'est pas sûr que cette façon de voir soit le parti pris par Patras. Parce qu'au fil de l'histoire, la constitution comme "objets mathématiques" des entités en jeu va de soi et n'est pas interrogée.

Et puis nous avons, en complément indispensable à la question du nombre, la question de la fonction, notion dont la longue histoire de sa constitution en mathématique constitue le sens (et le non-sens)[29].

Sur l'accouplement historique et conceptuel des nombres et des fonctions, comme des figures et transformations, on lira Saunders Mac Lane[30]*: Mathematics, forms and functions*, titre qui signifie que l'on va y exposer les formes et les fonctions de l'entité nommée "mathématique", mais aussi, que la question des formes et fonctions est l'intrigue principale pour les entités en interactions en mathématique. Mac Lane propose explicitement l'examen de ce dispositif avant que de développer une philosophie des mathématiques.

Exemple par où l'histoire des intrigues mathématiques paraît bien indispensable aux exercices mathématiques créatifs, et *a fortiori* à leurs récits.

2.12. FORMES DES MULTIPLICITÉS : CATÉGORIES ET STRUCTURES. Objets et transits participent de la formation des multiplicités et de leurs théories, soit aujourd'hui des catégories, dirais-je.

Car que sont les multiplicités ? D'après Richard[31], le terme (Mannigfaltigkeitslehre) signifie pour Husserl "un domaine d'objets en tant qu'il est soumi à une forme de théorie nomologique. Dès lors ces objets sont totalement indéterminés quant à leur matières ; seules nous sont données les relations formelles qui les lient entre eux [...] un objet n'est plus alors qu'un nœud de relations". Husserl distingue cela de la notion d'ensemble (Menge) de Cantor ; pour Riemann, d'après Husserl, la multiplicité est un agrégat d'éléments ordonnés et liés entre eux de manière continue.

---

[27] S. Richard, *De la forme à l'être. Sur la genèse philosophique du projet husserlien d'ontologie formelle*, Les éditions Ithaque, Montreuil-sous-bois, 2014. p.262.

[28] C. Romano, *Au cœur de la raison, la phénoménologie*, folio essais 539, 2010, p. 14.

[29] A. P. Youschkevitch, The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 16, N°1 (1976), 37-85.

[30] S. Mac Lane, *Mathematics, Forms and Functions*, Springer, 1986.

[31] S. Richard, *De la forme à l'être. Sur la genèse philosophique du projet husserlien d'ontologie formelle*, 2014. p.301-302.

Si donc la multiplicité est prise sous cette double condition d'être équipée de sa propre cohérence ou tenue, voire continuité, d'une part, et, d'autre part, que chacun de ses éléments ne s'y tienne que de son rapport en contiguïté avec les autres, exprimable par les adjacences et les jeux de compositions, eh bien nous sommes conduit à la notion de catégorie. Pour autant que la composition ait à être unitaire et associative, ce dont il faudrai faire le commentaire philosophique.

L'associativité notamment, qui s'écrit

$$(hg)f = h(gf),$$

trouve sa raison d'être dans l'associativité de la composition des fonctions, cas d'école pour les catégories, laquelle se déduit de la définition :

$$(gf)(x) = g(f(x)),$$

puisqu'alors $((hg)f)(x)$ et $(h(gf))(x)$ valent tous eux $h(g(f(x)))$. On relève donc que la définition de la composition des fonctions n'est autre que le cas particulier générique de l'associativité ! Voilà la vraie justification de l'axiome : en réalité il exprime abstraitement comment les transits fonctionnels se composent.

De plus, il faut souligner que la force de cette notion d'associativité est de permettre de se dispenser de mettre des parenthèses : chaque fois qu'on ne met pas de parenthèses, on utilise en acte l'associativité. Au demeurant l'associativité se prouve le plus souvent comme ci-dessus avec l'écriture $h(g(f(x)))$, en établissant une écriture "ternaire" intermédiaire potentiellement sans parenthèses.

Dans une catégorie les flèches ou morphismes représentent la continuité (alias les transits possibles), et les objets n'existent que par leurs rapports morphiques aux autres : comme je l'ai exprimé ailleurs, ils sont évidés de la substance contingente qui accompagnait leur apparition : l'*évidement*, tel est le premier sens du lemme de Yoneda.

Et qu'est-ce qu'une théorie ? C'est une syntaxe qui se représentent dans un jeu d'objets modèles, ce qui s'exprime par la donnée d'une *structure* sur un objet, sur un système d'objets, ou sur une catégorie, structure qui exhibe formellement les transits constitutifs de la théorie en question.

Dans la vue de Charles Ehresmann, géomètre, héritier de Bernhard Riemann et Élie Cartan, faire des mathématiques, en 1965, c'est structurer sans cesse de nouvelles catégories[32], sachant que la structuration n'est pas la fabrication indéterminée, générale et abstraite, mais l'invention qui s'autorisera après coup du réel de la possibilité de découvertes et éclaircissements.

Mais j'ai ici avancé suffisamment d'éléments du dispositif au nom duquel je veux lire mes auteurs et les exploiter, et je compléterai un peu le tableau en conclusion.

3. La possibilité des nombres.

Maintenant j'en viens au livre de Frédéric Patras, *La possibilité des nombres*, et j'enchaîne sur les propos relatifs à ce livre déjà tenue aux paragraphes 1 et 2.

Ce qui m'intéresse de ce livre, c'est la manière dont il réussit à montrer que l'objet nommé "nombre" résiste et persiste, au titre d'une multiplicité de perspectives dont il se constitue. J'entends donc y trouver un soutien pour l'épistémologie transitive, du côté de la question de l'objet.

En fait ce livre m'a accroché en octobre 2014 par la forme même de son titre, qui résonnait pour moi comme un écho au titre de ma conférence de juin au Colloque Relation/objet : *La possibilité d'une théorie des relations sans objets : autographes et auto-*

[32] C. Ehresmann, *Catégories et structures*, Dunod, 1965.

catégories[33]. J'ai donc voulu d'emblé lire le livre de Patras comme s'il s'agissait d'une mise en scène de la disparition des nombres comme objets.

L'auteur me pardonnera cette provocation, d'autant plus que du coup je prive le lecteur d'une analyse de l'exposé profond qu'il donne à propos des nombres et des objets mathématiques, des analyses approfondies sur les vues de Frege et de Husserl.

De ces vues je ne retiendrai que deux points importants que la lecture de Patras m'a remis en tête. il ne va pas de soi que logique et arithmétique ne soient pas de même teneur, il ne va pas de soi que l'expérience du monde soit distincte de l'expérience de pensée. Ce qui affine la compréhension de ce que peut signifier nombre et objet, en venant réinterroger ce que très précisément je localisais comme spécifique de la pensée de Nietzsche sur les mathématiques[34], en analyse de ceci de Nietzsche :

> *La mathématique est possible à des conditions auxquelles la métaphysique n'est jamais possible. Toute connaissance humaine est soit expérience soit mathématique*[35].

3.1. BUT ET MOYEN : L'ÉMERGENCE INDÉFINIE DES NOMBRES. Tel nombre, ou bien tel système de nombres et de calcul, et tout d'abord les nombres entiers naturels, et leurs extensions immédiates : Frédéric Patras s'intéresse à ce que "la tradition philosophique" voit dans ces entités et pratiques ; et à ce titre, face à la simplicité de leur emploi quotidien, il se propose de faire valoir la multiplicité des points de vue sur les nombres, et la richesse de leurs renouvellements. Multiplicité dont je n'évoquerai ici qu'une petite partie.

Il précise aussi, au début du chapître IX, que l'objet de son livre est : "les lois pures de la pensée et l'émergence du concept de nombre", précisant ailleurs que "la logique est la science des formes de la pensée". Donc, d'après lui, c'est sous condition d'un privilège envers la logique que la multiplicité des vues sur le nombre sera interrogée. Notamment par une exposition éclairante de la conception de Frege. Avec cependant en contrepoint la visée husserlienne, sur l'antéprédicatif de l'expérience ; là où le formel et l'intuition se nouent, pour, dirais-je, constituer les structures. Et puis, drainant tout le texte, une reprise des réflexions sur l'existence des objets mathématiques, enjeu dont on sent l'affaiblissement quand arrivent l'algèbre moderne et la théorie des catégories.

Pour lui c'est le XIXème siècle qui produit le plus décisif pour comprendre les nombres, et en particulier l'œuvre de Frege. Mais il n'omets pas d'instruire la question de la nature algébrique des nombres, du rapport des nombres à la mesure, etc. Ni bien sûr les grands classiques : qu'est-ce que l'Un, le zéro, les nombres négatifs, les irrationnels, les complexes, hypercomplexes et matrices, etc. Et puis la question de la numération, du compte, de l'équicomptage, de l'ordinalité, de la mesure, de l'invariance, la valeur mystique ou symbolique, la question du nominalisme, etc. La distinction entre un nombre et un système de nombre, et ce qui se dit de l'un ou de l'autre.

Qu'il traite de tout cela va de soi. Mais son objectif n'est pas exactement là, et l'abord des nombres un par un, ou bien dans leurs singularités, comme il en est traité Par François Le

---

[33] R. Guitart, "La possibilité d'une théorie des relations sans objets : autographes et auto-catégories", conférence au Colloque *Relation/Objet*, organisé par Charles Alunni et Alain Badiou, ENS, Paris, 18 et 18 juin 2014.

[34] R. Guitart, "Nietzsche face à l'expérience mathématique", in *Les mathématiques et l'expérience : ce qu'en ont dit les philosophes et les mathématiciens*, Colloque à Paris 7, 31 mai-1er juin 2013, à paraître chez Hermann en 2015.

[35] F. Nietzsche, *Œuvres philosophiques complètes,XII, Fragments posthumes. Automne 1885-automne 1887,* Gallimard, Paris, 1978, 7 [4], p. 263.

Lyonnais et Jean Brette[36], au titre de curiosités, ou aussi récemment à des fins pédagogiques par Stella Baruk[37], n'est pas au centre. Ce qu'il s'agit de construit est un réseau articulant problématiques philosophiques, mathématiques, historiques et épistémologiques, mais en maintenant séparés ces registres, et en les enlaçant. Seul l'enlacement vaudra, en dépit des ingrédients, de cohérences ou incohérences ou difficultés que je vais signaler dans un moment. De fait je comprends son entreprise comme la construction d'une multiplicité textuelle, une narration pour tout dire, donnant à voir en elle, en vertu de sa constitution, *le souci du nombre*. Aussi bien des nombres un par un, les nombres remarquables, les nombres quelconques, que le système des nombres comme un tout, les relations entre nombres, les usages et fonctions des nombres.

S'il est un livre auquel celui de Patras me fait penser, par son projet, c'est celui d'Imre Toth, *Palimpseste. Propos avant un triangle*[38], où la cohorte des philosophes et mathématiciens confondus devaient se prononcer sur la géométrie, euclidienne ou non, et sa figure emblématique *le triangle*. Ici, il s'agit de l'arithmétique et du *nombre*. Ces deux livres ont la vertu que l'on ne puisse plus s'empêcher indéfiniment de les relire.

3.2. DONNER À LIRE AUX PHILOSOPHES LA MULTIPLICITÉ DES VUES SUR LE NOMBRE. L'ouvrage sera utile aux philosophes actuels en ceci qu'il montre comment sur la question des nombres, à proximité de ce que les mathématiciens en font, les philosophes du passé exposent leurs thèses, comment leur thèses *opèrent* sur les conceptions des nombres. Et plus précisément comment les questions métaphysiques se réincarnent à diverses époques au sein du travail mathématique sur la nature des nombres et leur usage.

La multiplicité des points de vues sur les nombres reflète la multiplicité des thèses ou postures générales de la philosophie sur l'être et l'ontologie, la pensée, la logique, la connaissance, l'expérience, le monde, la réalité. C'est donc, mise en jeu, une tradition ou les notions de concept, objet, logique, sont supposées et vont d'elles-mêmes, servent d'outils d'expression non analysés, les différents moments de ladite tradition correspondant à différentes dispositions mutuelles de ces notions, et aux thématisations qui s'ensuivent.

Ainsi sous condition de l'observation des nombres, à l'abri des nombres en quelque sorte, sous l'hypothèse assurée qu'*il y a les nombres* (la possibilité des nombres), les thèmes de la philosophie peuvent alors apparaître, ce qui établit de fait ladite possibilité des nombres : c'est ce que montre clairement l'ouvrage.

3.3. THÈMES PHILOSOPHIQUES ET ENJEUX MATHÉMATIQUES, DÉLIMITATIONS. Les thèmes en jeux sont : le thème de l'être, l'Un et le multiple, ou encore du zéro, l'un et l'infini, en déploiement de l'hypothèse "ontologique", au regard du "vrai" ; le thème de la distinction entre nombres et grandeurs, qualités et quantités, numération et mesure, en appui sur l'hypothèse qu'il y a le monde, la réalité ; le thème encore du symbolisme, du nominalisme, du formalisme, du logicisme, en raison de l'hypothèse qu'il y a le langage ; le thème enfin de la représentation des conditions de la connaissance ou de l'expérience, de la cognition et des phénomènes. Ces thèmes défilent et ne sont pas vraiment cousus entre eux ; l'auteur n'évolue pas de façon linéaire et déductive suivie, mais en tours et circulations.

L'ouvrage donc interroge ces thèmes dans l'histoire de la philosophie, au titre de leur poids dans la question des nombres. Spécialement, l'opération d'abstraction avec les concepts est parallèle à l'opération de nombrer avec les nombres.

[36] J. Brette et F. Le Lyonnais, *Les nombres remarquables*, Hermann, 1983.
[37] S. Baruk, *Nombres à compter et à raconter*, Seuil, 2014.
[38] I. Toth, *Palimpseste. Propos avant un triangle*, PUF, 2000.

Sont exposés en détails à ce propos certaines réponses de Parménide, Platon, Aristote, Plotin, Frege, Kant, Husserl, Wittgenstein. Je n'en dirai pas grand chose ici, le lecteur se reportera au livre, pour de bonnes lectures, de claires vulgarisations de ces questions (au bon sens du terme "vulgarisation"). Je souligne surtout, mais ce n'est pas exactement la ligne de mon usage ici du livre, qu'on trouvera, notamment sur Frege et sur Husserl, des analyses profondes et très-claires de leur rapport aux nombres (correspondant semble-t-il à des études que Patras a publié par ailleurs) ; qui m'ont donné envie de relire ces auteurs sur ce point, pour donc ré-envisager la dialectique entre logique et arithmétique, sous condition des phénoménologies.

Ces thèmes sont aussi lus, transversalement, à l'aune des enjeux mathématiques, où ils se cristallisent en les questions de fondement et de calcul symbolique, résumerais-je. On apprend donc avec détails et profondeur ce que sont les nombres pour le pythagorisme, pour Kant, Frege, Husserl. À ce moment, je m'interroge : pourquoi ce chemin particulier ? Ce n'est pas la question du livre (pas plus que ce n'est la question du livre de Toth qur le triangle).

À ce stade, je relève que ni les descriptions les plus modernes (par exemple du point de vue de la mesure et de l'intégration motivique), ni les plus anciennes (telles les nombres à Sumer ou en Égypte, telles les nombres chez les Mayas ou en Chine, etc.) ne sont pris en compte. Il s'agit bien d'une découpe par le champ philosophique occidental traditionnel dans une histoire culturellement plus vaste, sinon mathématiquement plus vaste. La fonction de la comptabilité et de ses algorithmes, dont se fonde l'écriture à Sumer, dont l'histoire se poursuit jusqu'au moyen-âge, n'est pas le sujet.

Et puis, il y a un glissement d'une première question, celle de l'existence de tel nombre (un, zéro, l'infini, deux, etc.), vers une deuxième, celle de l'existence du système des nombres ; glissement qui est effectué, mais non-thématisé dans le livre. Pourtant cela serait important, car c'est bien lorsque l'on se soucie de l'existence du système des entiers que l'on perd de vue la question de la nature de chaque entier, et partant que changent les possibilités de son existence ; et chaque nombre change de nature, suivant qu'il est inclu comme élément de tel système ou bien de tel autre. Pire, lorsque le système de nombres envisagé ne l'est plus qu'au plan de sa fonction, alors les objets nombres ont de fait disparus, ne demeurant que comme noms de fonctions au sein d'un système fonctionnel. Puisqu'il s'agit en effet de croire à la persistence des entités dites "nombres", cette ligne de pensée n'est pas vraiment jouée, quoique ses éléments soient mis à disposition.

3.4. Objets, concepts, invariants : toujours les mêmes ? Du côté des inventions mathématiciennes proprement dites, avec notamment Euclide, Descartes, Cauchy, Frege encore, Peano, Cantor, Dedekind, Hilbert, Gödel, Weyl, on apprend que les nombres sont donc tantôt des objets, tantôt des concepts, des cardinaux, des ordinaux, qu'ils existent quasi substantiellement, ou bien qu'ils sont des formes ou des invariants, ou bien qu'ils participent de fonctionnements algébriques, formellement où symboliquement, au sein de champs de calculs, déterminant des schémas organisationnels, comme la récurrence, comme éléments d'une "chaîne infinie", et que l'on peut ou pas en prolonger le champ (nombres transfinis, nombres complexes). Les nombres permettent le calcul, l'invention de l'argument diagonal, le traitement des infinis, la récurrence, la récurrence transfinie.

Il y a là toute une richesse d'enjeux mathématiques répondant pas à pas de la richesse des thèmes de la philosophie.

Je regrette cependant —ceci dit toujours bien sûr en vue de l'épistémologie transitive — que la question de *la répétition des nombres* comme eux-mêmes autrement, dans d'autres cadres, c'est-à-dire l'examen des naturels au sein des rationnels, des rationnels au sein des réels, etc., c'est-à-dire des fonctions d'inclusion canonique qui donnent ces représentations

$$N \subseteq Q \subseteq R$$

ne soit pas fortement thématisées ; et, auparavant, que ne soit pas thématisée la question de la notion de *fonction* en général. En effet on aurait eu là une ressource supplémentaire pour faire valoir la multiplicité des avatars du nombre. Et puis, dans la perspective dialectique d'une épistémologie transitive, on aurait avec nombres *et* fonctions les deux tenants à articuler.

3.5. LES NOMBRES, AU TITRE DE LA DUALITÉ ENTRE L'ALGÈBRE ET LA GÉOMÉTRIE. Frédéric Patras ouvre avec décision le jeu de tous ces rapports entre les époques du nombre, prenant d'ailleurs ainsi le risque d'offrir au lecteur des possibilités de penser, de produire des interprétations contraires ou parallèles aux siennes ; risque dont je "profite" à l'instant.

Par exemple, il nous dit que "Descartes s'attache aussi à construire géométriquement les opérations arithmétiques [...] Ses successeurs vont aller plus loin et déduire [...] un primat de l'arithmétique sur la géométrie". Cependant Descartes n'écrit pas cela, il ne considère jamais de nombres, il introduit bien l'unité, qui est une grandeur choisie, pour introduire dans la géométrie les opérations de l'arithmétique, mais entre grandeurs. Notamment les équations et coordonnées cartésiennes sont entre des grandeurs, et ne nécessitent absolument pas de disposer des constructions de l'ensemble des nombres qui seront élaborées au XIXème siècle. Quand Descartes écrit "Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de Géométrie", il n'est pas évident que cela signifie une subordination de la géométrie à l'arithmétique, à la donation du monde des nombres, au contraire peut-être. Bref, on pourrait d'ici développer que Descartes introduit le calcul formel avec les grandeurs, et non pas une numérisation de fait ; alors ses successeurs qui construisent la géométrie sur le continuum ne vont pas "plus loin", mais ils vont dans une autre direction. Et d'autres successeurs, ceux de la géométrie algébrique proprement dite, vont plus loin dans *sa* direction.

Cette observation importe relativement au dispositif narratif de l'ouvrage, notamment relativement à Frege, où, après l'établissement d'un primat de l'arithmétique sur la géométrie, sera posé l'enjeu d'un primat du logique sur l'arithmétique. À ce point l'ambition cartésienne de substituer à la logique des anciens le calcul algébrique est contredite. Mais il est vrai que la logique de Frege n'est plus tout à fait la logique des anciens, même si, sous le terme de logique il est encore question des lois de la pensée ; et il est vrai aussi que l'algèbre ou le calcul peuvent, avec Condillac, paraître comme une langue. Je souligne ici que Patras traite aussi, au passage, de Condillac, même si, en un sens, c'est sans sympathie.

J'indiquerai ici le livre d'histoire *Si le nombre m'était compté ...*, paru en 2000, qui vient de reparaître en format de poche. On y trouve notamment une préface d'Évelyne Barbin[39], où est résumé le volume, réparti entre le nombré et le mesuré ; et puis un article de Rudolf Bkouche*, Sur la place du numérique dans la construction de la géométrie*[40].

De plus, cette question de la dualité entre arithmétique et géométrie, ou bien entre algèbre et géométrie, importe en elle-même pour déterminer le réseau des sens du "nombre" ; Patras ne l'ignore pas et l'indique en quelques endroits. Aussi, sa lecture de Descartes fait certainement obstacle à l'introduction qu'il rate du point de vue de Lebesgue, voire aujourd'hui de celui de la théorie des motifs (intégration motivique), où précisément les nombres procèdent expressément de la géométrie et des opérations géométriques de découpes et recollements, ou encore à celle des nombres comme dimensions, avec la K-théorie. Pour en arriver là, il est vrai, il faudrait qu'il accepte d'entrer dans une suite possible de son livre, qui traiterait de la *disparition des nombres ...*

---

[39] E. Barbin, Préface, in Commission Inter-IREM et IREM de Basse-Normandie, *Si le nombre m'était conté...,* ellipses poche, 2015.
[40] R. Bkouche, *Sur la place du numérique dans la construction de la géométrie, in* Commission Inter-IREM et IREM de Basse-Normandie, *Si le nombre m'était conté...,* ellipses poche, 2015.

3.6. CORPS ET RAISON. Il faut souligner l'indication précieuse que Patras donne, dans un passage que j'ai beaucoup apprécié, du travail de Charles de Bovelles sur la combinatoire pythagoricienne et l'usage de la numérologie dans la construction d'une harmonie nécessaire entre la corporéité et la rationalité de l'Homme. Le corps et la raison, à la condition du nombre. Ce qu'il faudrait confronter à la posture de Nietzsche relativement à la mathématique. Patras donne accès à cet auteur via la réédition de son ouvrage *Le sage* dans un livre de Cassirer. Ce qui ne peut que faire penser, d'un autre côté, à l'ouvrage *Substance et fonction*, du même Cassirer, qui, à mon avis devrait par ailleurs être cité et utilisé de façon importante lorsque, ici, est évoquée l'alternative "ordinal ou cardinal", que Cassirer construit irrésistiblement, en lisant les mathématiques de son époque, et notamment Kronecker, avec qui il privilégie les ordinaux.

3.7. LE RÉSEAU DES SENS DU NOMBRE, SOUS TROIS PRÉJUGÉS. En fait Patras ne vise absolument pas à l'exhaustivité, et c'est raisonnable, d'autant qu'il existe une énorme quantité d'ouvrages d'histoire des nombres, à tous les niveaux mathématiques, plus ou moins culturel, plus ou moins techniques, dont, pour n'en citer que trois, le Ifrah[41] que cite Patras, mais aussi beaucoup d'autres, et notamment le Guitel[42], et bien sûr les 4 volumes du Dickson[43]. C'est que ni l'histoire des sytèmes de numérations, ni l'histoire de l'aritthmétique ne sont ses préoccupations. Patras propose une mise en réseau, avec des trous, avec possiblement des contradictions, entre perspectives mathématiciennes, philosophiques, historiques, mais au titre philosophique. ce n'est pas pour autant un livre de philosophie, dans la mesure ou, lui-même reste à distance, ne propose pas explicitement de thèse. c'est plutôt une mise à disposition, sous couleur phénoménologiste, d'un réseau de sens. C'est du fait de disposer ainsi de ce réseau, bien construit et vivant, que le lecteur peut penser et critiquer.

Dans le cours de son développement, qu'il faut donc lire plusieurs fois, il laisse expressément en plan des termes à définir, des informations à compléter. Il avance aussi implicitement grâce à trois préjugés que voici.

Le premier est de croire, ou de vouloir nous faire croire, que "le monde existe" et est "vrai", que l'ontologie est indispensable, il croit à "la robustesse ontologique". On se trouve implicitement dans ce que Merleau-Ponty nomme le "petit rationalisme", celui de l'explication de l'Être par la science, par opposition au grand rationalisme du XVII ème siècle, riche d'une ontologie vivante et risquée de la tension entre le monde extérieur des faits et le monde intérieur des idées.

Et à ce titre, d'un caractère assuré de la nécessité du questionnement ontologique, opposé au formalisme, il dénature le sens du logicisme, et il déprécie la position de Lichnerowicz, dans la discussion de *Triangle de pensées*. A ce point Patras n'argumente pas, sauf à avancer *in fine* un argument d'autorité, à savoir que l'autre position est défendue par Alain Connes, qui est un "grand mathématicien". Comme si Lichnerowicz était un petit. Mais surtout comme si l'expression "grand mathématicien" faisant sens au plan de la pensée. Ici, nonobstant mon extrême admiration pour le travail mathématique d'Alain Connes, je ne crois pas pertinent d'en appeler à cette réputation pour assurer un point de pensée dans le discours de Patras. C'est dans le fond mon seul différent profond avec Patras, le reste pouvant se résoudre pourvu que la rhétorique appropriée soit mise en place. Bref, sur ce point, je pense que la pensée de Patras est faible, et inutile.

[41] G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, Paris, R. Laffont, 1994.
[42] G. Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion, 1975.
[43] L. E. Dickson, *Number Theory of Numbers*, vol. 1 (1918), vol. 2, 3 (1919), reprint Chelsea.

Le deuxième relève d'une certaine épistémologie à la manière de Bourbaki et André Weil[44], qui déterminerait la nature des objets, des pensées et des travaux mathématiques en raison non seulement des travaux des maîtres, mais aussi bien de ce que les maîtres en pensent. Alors il y aurait, allant de soi, une "pensée mathématique", l'idée que le véritable mathématicien se fait des choses, qui serait comme en surplomb, voire ironique, éprouvant comme "un malaise" vis-à-vis des philosophes, et notamment des logiciens. Pour Patras cette ironie s'explique peut-être, par ceci qu'il écrit : "au-delà de l'habitude du calcul, les mathématiciens sont naturellement exercés à analyser les structures formelles sous-jacentes à la pensées". Il semble croire qu'il y a "un dépassement de modes de pensées logiques en direction de modes de pensée mathématiques". Dans le livre on ne trouve pas plus de précision sur ce qu'est le mode de "pensée mathématique" ; mais on pourra se reporter au premier livre de Patras[45]. Toutefois, ce préjugé me gène beaucoup moins que le premier, car il est productif d'idée, par exemple, comme l'a effectué André Weil lui-même, on peut, de là, soutenir la valeur de la recherche de mathématisation des analogies.

Le troisième est un jugement massif contre le structuralisme, tel qu'il a été pratiqué excessivement parfois il est vrai, jugement par lequel toute formalisation en sciences humaines serait maintemant une erreur. Par où même l'imposition de forme aux objets de la pensée serait un acte suspect, d'une "époque fascinée par les structures abstraites". Sur ce préjugé il ne s'agit, en vérité que de la portée externe du travail mathématique, que je veux bien croire bien limitée *a priori*. Il n'y a pas de raison pour que la raison porte ses fruits plus loin qu'elle-même, pour que le nombre ou la configuration fasse sens hors le calcul. Mais je n'admets pas ce préjugé simplement au titre du "pourquoi pas ? ": pourquoi, par principe, la structure mathématique serait-elle inapte à produire une compréhension dans le domaine des sciences humaines ? Surtout si l'on appelait mathématique la pensée dont l'acmée est la clarification du jeu des concepts mathématiques, et, à travers le modelage mathématique, la clarification du jeu des concepts de toutes les sciences. Refuser que la clarification et le modelage mathématicien fassent accès aux sciences humaines, et notamment à la spécification des limites du connaissable en ces domaines, c'est y mettre a priori un "je ne sais quoi" d'ineffable, et placer ces "sciences" précisément hors-science.

3.8. COGNITION, PROBLÈMES ET GESTES MATHÉMATIQUES. En fait Patras ne vise absolument pas à l'exhaustivité, et c'est raisonnable. En sus de la tradition philosophique proprement dite, donc, quoique lié à la question de la phénoménologie, le point de vue du cognitiviste moderne et de la complexité est bien mis en valeur dans ce livre, avec notamment les travaux ou idées de Dehaene et de Longo. Patras s'intéresse à la théorie de la démonstration, au fait qu'"il est structurellement impossible de capturer formellement toutes les propriétés des nombres", en relation bien sûr avec les théorèmes de Gödel.

Mais le point de vue du "mathématicien au travail", qui fait des démonstrations, qui calcule, organise en tables et figures, structure les problèmes, etc., n'est pas thématisé, sinon pour préciser ce que certains mathématiciens pensent du questionnement philosophique ou de la pensée. La dimension proprement d'acte et de gestes à faire n'est pas liée directement à la question de la connaissance, et, de ce biais, au nombre.

Sont évoqués brièvement, au fil de l'histoire, l'idée d'invariant avec Kronecker, l'idée de nombres idéaux de Kummer, et, enfin, les problèmes universels de la théorie mathématique des catégories. Ainsi la perspective proprement actuelle, que l'on peut caractériser par la disparition des objets mathématiques, et donc des nombres en tant qu'objets, par la mise en

[44] R. Guitart, "History in mathematics according to André Weil", in *ESU 7*, Copenhague, july 14-18, 2014.

[45] F. Patras, *La pensée mathématique contemporaine*, PUF, 2001.

relief de la pratique théorique en geste mathématique, et dans la pulsation et le bougé parmi ces gestes, est seulement évoquée, dans une perspective husserlienne au titre d'un principe de variabilité de l'horizon ou du mode de saisie.

Ce moment mérite d'être précisé. On lira donc sous le titre "structure d'horizon" (et sans trop savoir si, pour le coup c'est Patras ou Husserl qui parle) ceci (et on pourrait alors relire le livre en entier en vue d'en comprendre cette cheville discrète) :

> "Chaque objet porte ainsi avec lui un horizon de structures et d'intuitions, de possibiliités théoriques. En d'autres termes, le mathématicien doit pouvoir s'orienter dans la pensée, ce qui suppose que les concepts ne soient pas figés dans un système exclusivement symbolique. la possibilité de réactivations de significations originaires fait partie ce cette structure d'horizon : même lorsque nous opérons de façon purement signitive sur les nombres, il est essentiel que nous puissions, lorsque nous le souhaitons ou lorsque l'argumentation l'exige, interpréter nos calculs en termes intuitifs. mais il est également essentiel que nous puissions nous abstraire de cette interprétation pour donner librement d'autres significations aux nombres".

On tient là un point par où le livre de Patras rapporte à l'épistémologie transitive. Il y a l'objet et notamment le nombre comme horizon, comme point de stabilité dont s'autorise nos gestes d'opérations, argumentations et calculs, nos gestes donc, ce dont Gilles Châtelet et aussi Charles Alunni ont proposé l'enjeu, y compris dans la ressaisie diagrammaticienne de la question kantienne de s'orienter dans la pensée, ou de transiter entre les objets ; il y a la question de relance de l'intuition, au point de libération d'autres significations, ce que René Guitart pointe comme la pulsation. À dire à l'envers : Patras place geste et pulsation dans une perspective phénoménologique, à propos de l'objet ou du nombre, participation à l'épistémologie transitive ; à quoi manque encore, en tant que tel, l'exercice dialectique de la pensée mathématique, entre l'objet et le transit. À quoi manque d'avance la ressource didactique, qui est qu'enseigner les mathématiques consiste à en pratiquer une certaine histoire de ses conceptions, en relevant les pulsations et analogies assumées.

3.9. Question de l'objet, de l'extension. Cependant il arrive à Patras, au moment de conclure, de déterminer la question ontologique autrement que comme indiquée ci-dessus, à savoir maintenant comme celle-ci : "pourquoi les objets de notre connaissance se constituent-ils ?". C'est alors une autre histoire, intéressante, où il indique que "l'objet mathématique se constitue souvent par cristallisation à partir de problèmes bien posés". Cela fournit aux objets, et aux nombres en particuliers, un mode d'existence au sein même du travail, des gestes en cours, de leurs histoires, que nous pouvons rapprocher de la manière dont Bachelard propose que l'objet physique provienne de l'objet mathématique, point que Charles Alunni a bien mis en relief. L'objet mathématique lui-même donc provenant du travail mathématique, peut-on ajouter. Ainsi, ce livre, sur la possibilité des nombres, me conduira à la question de leur disparition, de leur installation comme nom d'acte résolutoire. Dans ce livre cette question est fortement présente au moment du nouage Dedekind/Frege/Wittgenstein, où se cristallise l'enjeu de l'introduction ou pas de nouveaux nombres, question qui, tout compte fait est à l'envers la même que celle de leur disparition.

3.10. Les nombres, puis les formes, et les catégories. Le livre de Frédéric Patras n'est pas spécifiquement un livre de mathématique, ou de philosophie, ou d'histoire. C'est une narration qui tisse un réseau de relations entre trois registres : d'une part une collection de données historiques, en mathématiques ou en philosophie ; d'autre part une vue convenue de la tradition des questionnements philosophiques ; et enfin des déterminations techniques mathématiques précises d'objets. Ce réseau présente comme point stable à penser, par l'écart maintenu entre les registres et thèmes (ensembles, ordres, congruences, signes) autant que par leur point d'emmêlement, le nombre. Patras propose que tout cela soit analysable par la méthode de variation eidétique, pour décrire la façon dont l'intentionnalité varie autour d'un objet, selon divers modes d'existences.

Il faut souligner qu'une vue "complémentaire" de l'épistémologie des nombres et objets mathématiques, du côté du travail des mathématiciens, ou du moins des pratiques et contenus des mathématiques actuelles, avec notamment la conception de Grothendieck, son amour des formes et structures cachées, se trouve en fait déjà prise en compte dans *La pensée mathématique contemporaine* [46]. Cet autre livre, lui, sur la question de Grothendieck et des catégories, précisément. devrait être mis en balance avec l'approche de Zalamea, que je vais examiner dans la prochaine partie. Pour ce livre ci, le rôle des catégories est évoqué dans le dernier chapitre, avec la présentation des nombres comme solution d'un problème universel, avec encore les objets idéaux et les questions d'invariants. Alors, comme le souligne Patras, "la distinction entre objets, formes, transformations et concepts s'estompe".

Ce livre est utile parce qu'il fournit *ipso facto* un riche matériau ouvert à méditer, dans le jeu de divers registres et thèmes, sous condition d'y penser l'intentionalité d'un sujet et son expérience du monde, et là la question du croisement entre la logique et l'arithmétique. ce qui touche à la transitivité, et aux gestes.

C'est ce jeu qui "prouve" au lecteur la possibilité des nombres : la possibilité qu'ils "existent", la possibilité de les "penser", la possibilité qu'"ils agissent" ; mais aussi la possibilité qu'ils disparaissent, au profit général des formes peut-être, dans le vaste mouvement de la mathématique qui, si l'on peut dire, par son caractère indirect de plus en plus accentué, s'éloigne au plus près d'elle-même (sic).

4. PHILOSOPHIE SYNTHÉTIQUE DES MATHÉMATIQUES CONTEMPORAINES

J'examine maintenant très partiellement le livre de Zalamea, *Philosophie synthétique des mathématiques contemporaines*, qui est divisé en trois parties qui sont :

I- L'environnement général de la mathématique contemporaine,
II- Les études de cas,
III- L'essai de synthèse.

Je poursuis ce que j'ai déjà avancé de ce livre aux paragraphes 1 et 2.

Ce qui m'intéresse de ce livre, d'abord, c'est son apport très-significatif à la dimension transitive de l'épistémologie, avec l'insistance, au point de la créativité mathématique aujourd'hui, sur le "trans". Je ne résiste pas à travailler au rapprochement avec la notion de pulsation mathématique, sinon avec mes propositions mathématiques de catégoricien, que je devrais reprendre ailleurs.

Ce livre m'a intéressé pour une autre raison : il parle de mathématiques, et même il parle mathématique, et ce n'est pas seulement un discours sur les mathématiques. C'est un discours sur l'activité mathématique, mais qui se prononce en faisant de la réflexion mathématique. Il rapporte des mathématiques d'aujourd'hui, qu'un mathématicien a plaisir à apprendre ainsi. Zalamea nous introduit profondément aux pratiques de mathématiques actuelles très variées, au point que chaque mathématicien, à côté de ses propres domaines, va y trouver à comprendre pas mal de contenus mathématiques qu'il ne connaît pas ou à peine.

Le lecteur m'excusera de ne rien dire ou presque de ces contenus ; mais j'ai un réel plaisir à lui laisser découvrir la chose par lui-même, dans la justesse du style de Zalamea, qui

[46] F. Patras, *La pensée mathématique contemporaine*, PUF, 2001.

change de niveau d'expression (informel vague et général, littéraire, philosophique, pensée mathématique, technique) avec une impressionnante précision.

4.1. MATHÉMATIQUES CONTEMPORAINES, PHILOSOPHIE SYNTHÉTIQUE. Un bon moyen de se fixer sur le terme "mathématiques contemporaines" serait de lire la liste des centaines de livres paru dans la série "Contemporary Mathematics" publiée par l'American Mathematical Society. On comprendrait aussitôt que ce dont nous entretient Fernando Zalamea est qu'une zone réduite de ladite mathématique contemporaine (celle de ses intérêts propres, avec au centre les catégories et la logique, et certains aspects de la physique et la géométrie). Sans compter que tout ce qui se fait en EDP, en probabilité et statistique, en analyse numérique, en combinatoire, en modélisation, etc., est omis.
Il affirme vouloir se situer dans le courant principal aujourd'hui de la créativité en mathématiques pures, et le fait qu'il réserve définitivement le sens de "mathématiques contemporaines" à celles de son échantillon est génant vis-à-vis des lecteurs innocents qui s'imagineraient tenir là quelque chose d'assez complet sur ce qui se fait aujourd'hui. Alors que c'est seulement un noyau essentiel. Celui justement sur lequel il va tenir un discours épistémologique ciblé.

L'échantillon examiné est réduit aux 13 mathématiciens suivants : Grothendieck ; Serre, Langlands, Lawvere, Shelah (mathématiques éidale); Attiyah, Lax, Connes, Kontsevitch, (mathématiques quidditale) ; Freyd, Simpson, Zilber, Gromov (mathématiques archéale). Zalamea entendant l'éidale comme le relatif aux idées mathématiques, le quidditaI le relatif à ce qui est ou aux faits et à la physique, et l'archéal ce qui relève des principes.

Maintenant, ceci dit, j'affirme que ce que Zalamea dégage, sur la fonction première du transit surtout, vaut bien partout aujourd'hui, dès lors qu'il s'agit de l'épistémologie de la mathématique créative. Ceci étant affirmé évidemment sous condition de la limite de ma propre connaissance de l'activité mathématique, et donc de façon probablement trop audacieuse.

Un premier point chez Zalamea consiste à se départir radicalement de la philosophie analytique, et de la problématique logico-ensembliste des fondements, au regard de laquelle, dit-il, seule la mathématique élémentaire peut être prise en compte. Il veut au contraire élaborer une épistémologie sur la base des mathématiques supérieures et non seulement modernes, mais contemporaines (après 1950 en gros, et concernant les 13 auteurs ci-avant indiqués). Par "synthétique", il entend donc explicitement disqualifier l'analytique relatif à l'élémentaire logico-ensembliste, au profit du niveau très-supérieure de ce qui s'invente aujourd'hui et qu'il demande aux philosophes d'examiner. Il a la formule : "le cœur des mathématiques a ses raisons que la raison linguistique ignore".

On peut dire que son livre offre aux philosophes une lecture, mathématiquement très-excellente, du sens mathématique de ces mathématiques contemporaines auxquelles peu sont habitués, accompagnée donc d'une perspective philosophique nette et forte à propos de la créativité mise en jeu par ces travaux. Notamment Zalamea reprend, à propos des mathématiques supérieures récentes, la question de la dynamique gestuelle, dans la lignée des Valéry et Merleau-Ponty, voire de Châtelet et Alunni, ou encore de Mazzola. Son but est l'élaboration d'une phénoménologie de la créativité mathématique. Ainsi se marque la place essentielle dans cette créativité du "trans", du transit, et je dirais donc du transitif. Au net détriment de la réalité des objets, laquelle n'est plus l'enjeu fondamental.

4.2. A LA MANIÈRE DE LAUTMAN, ET PEIRCE. D'une part, Zalamea reprend à Lautman l'ambition de ne philosopher qu'après avoir pris connaissance des mathématiques de son époque, et après en avoir donné connaissance, l'avoir transmise aux philosophes auquelles il s'adresse. Et d'autre part, en "sémiolinguiste", il reprend les enjeux de la sémiotique de

Peirce, du calcul des relatives dans la langue (ou bien de leurs corrélats les relations dans le cadre extensif ensembliste),et surtout de la tiercéité, et la disposition du champs des signes. On lira aussi Zalamea sur le continuum de Peirce[47].

Albert Lautman donc, sur qui, dans la notice du nLab à son nom, nous trouvons cité l'article : *Refaire le "timée": introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman*, de Jean Petitot[48]; à le lire, nous pensons que pour lire Zalamea, on peut supposer deux choses : un, que le niveau des idées dialectiques problématiques, au-dessus des théories mathématiques, qui dépasse le dogmatisme de l'empirisme logique (comme l'écrit Petitot), est ce point d'où précisément la créativité mathématique s'observe ; et deux, que Zalamea reprend à son compte très exactement l'attitude de Lautman, de ne philosopher qu'après avoir comprises les mathématiques contemporaines, au départ de cette compréhension.

La difficulté bien entendue est de définir les "mathématiques contemporaines", et, dans le cas de Zalamea, je propose qu'elles soient entendues comme celles où la dimension créative est à un comble de liberté *visible*.

L'article du nLab insiste justement à voir Lautman comme un philosophe "intéressé dans la structure de la mathématique avancée et de sa créativité, et critique des philosophes analytique comme Russell et Frege, intéressée par les fondations, et non par la nature du fait de faire des mathématiques". Où s'inscrivent donc déjà les influences : Deleuze, Badiou, Petitot, Corfield.

Lautman identifiait à son époque 5 traits des mathématiques modernes :
1- La hiérarchisation complexe de théories variées, irréductible à des systèmes de déduction élémentaires ;
2- La richesse des modèles, irréductible aux manipulations linguistiques ;
3- L'unité des méthodes structurales et des polarités conceptuelles, sous la multiplicité effective des modèles ;
4- La dynamique de l'activité créative, dans un perpétuel va-et-vient entre liberté et saturation, ouvrant à la division et à la dialectique platonicienne ;
5- Les relations mathématiquement démontrable entre ce qui est multiple à un niveau donné, et ce qui est singulier à un autre, au travers d'un treillis sophistiqué de montée et descente.

Pour Zalamea, la mathématique contemporaine ajoute 5 autres traits :
6- L'impureté structurale de l'arithmétique (conjectures de Weil, programme de Langlands, les théorèmes de Deligne, Faltings et Wiles etc.) ;
7- La géométrisation systématique de tout l'environnement des mathématiques (faisceaux, homologies, cobordismes, logique géométriques, etc.) ;
8- La schématisation et la libération des restrictions ensemblistes, algébriques et topologiques (groupoïdes, catégories, schémas, topos, motifs, etc.) ;
9- La fluxion et la déformation des limites usuelles des structures mathématiques (non-linéarité, non-commutativité, non-élémentarité, quantification, etc.)
10- La réflexivité des théories et modèles sur eux-mêmes (théorie de classification, théorèmes de points fixes, modèles "monstres", classes élémentaires/non-élémentaires, etc.)
Zalamea est tout à fait spécialiste de Lautman, et notamment il a écrit *Albert Lautman et la dialective créative des mathématiques modernes*[49], et publiée une édition beaucoup plus

[47] F. Zalamea, *Peirce's continuum, A methodological and mathematical approach*, 2011.
[48] J. Petitot, *Refaire le "timée": introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman,* in *Revue d'histoire des sciences*, 1987, vol. 40 -1, pp. 79-115.
[49] F. Zalamea, *Albert Lautman et la dialective créative des mathématiques modernes*, préface de : A. Lautman, *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Paris, Vrin, 2006.

complète des œuvres de Lautman, traduites en espagnol par ses soins, avec une étude introductive[50] ; une première version de ces œuvres est daté de 2004[51].

Nous avons ainsi un Zalamea observateur de la créativité dialectique dans les mathématiques contemporaines — déterminée en prolongement de la caractérisation de Lautman des mathématiques modernes — et y relançant ses fusées ou transits éphémères ; à l'envers donc d'un Patras, ruminant — on sait combien Nietzsche apprécie la faculté de ruminer — la tradition philosophique à propos des nombres, à la lumière du phénoménologisme, rongeant donc l'objet qui dure. Ces deux dispositions constitueraient assemblées le point d'où le transitif pourrait s'établir dans son paradoxe. Feux d'artifices de l'invention ; ou digestion.

C'est justement du biais de l'analyse phénoménologique, et au titre de la théorie des catégories, que Peirce intervient chez Zalamea, quand, au début du chapitre 5, il précise :

> En réalité, derrière la question centrale de la phénoménologie — comment transitons-nous entre l'Un et le multiple ? — avec ses sous-questions polaires : Comment unifions-nous les phénomènes au moyen des catégories, et comment multiplions-nous l'universel dans le divers ? — se cachent des modes de transformation cruciaux de la connaissance et du monde naturel. Médiations, hiérarchisations, concaténations, polarisations, inversions, corrélations et triadifications, par exemple, sont des séries de transformations conduisant à une explication partielle de catégories universelles [...] ce transformisme universel [...] désormais codifié dans la théorie mathématique des catégories ...

ajoutant que cette opération transformationnelle peut être vue largement en détail, par exemple dans l'émergence des trois catégories Peircéennes, comme on peut le voir dans la thèse d'André de Tienne[52].

Je soulignerai ici que cette question de la transition entre l'Un et le multiple, que Zalamea met à la racine de la phénoménologie, est bien la même que celle du transitif , que je pointe de la pulsation, ou bien de son image Winnicottienne du phénomène transitionnel (paragraphe 2.1.2.).

Je relève aussi que, comme déjà dit (paragraphe 2.5.), les catégories sont plus que des codifications, qu'elles sont une observation mathématique naturelle de l'activité mathématique naturelle, une véritable logique de cette activité.

4.3. LES BORDS ET LE PENDULE. Il s'agit donc d'une proposition d'examen phénoménologique du “faire” mathématique créatif de 13 mathématiciens contemporains choisis. Zalamea indique que peu d'auteurs, parmis lesquels Petitot, Rota, Badiou, Maddy, et aussi Châtelet, Alunni, se sont intéressés à examiner le “faire” mathématique contemporain, quoique de façon plus restreinte que le vaste corpus qu'il propose. Par ailleurs il considère les travaux de Polya, Lakatos, Kline, Wilder, Kitcher, relatifs aux mathématiques classiques voire élémentaires.

---

[50] A. Lautman, *Ensayos sobre la dialectica, estructura y unidad de las matematicas modernas*, trad. F. Zalamea, Biblioteca francesa de filosofia, Universidad Nacional de Colombia, 2011, 594 p.

[51] A. Lautman, *Ensayos sobre la estructura y la unidad de las matematicas modernas*, trad. F. Zalamea, Universidad Nacional de Colombia, 2004, 397 p.

[52] A. de Tienne, *Analytique de la représentation chez Peirce. La genèse de la théorie des catégories*, Bruxelles, Publications des Facultés universitaires Saint Louis, 1996.

Qui plus est, son projet est de construire, d'après cet examen, un système philosophique qui oscille entre philosophie, mathématique, et à nouveau philosophie. Cette oscillation incessante est parfaitement maîtrisée.

Il y a en fait chez Zalamea une double oscillation : celle implicite qu'il imprime à son style, entre mathématique et philosophie, et celle pendulaire, entre créativité et réflexion critique, qu'il thématise, au quatrième point ci-dessous.

Pour cet examen, quatre thèses sont mises en œuvre par Zalamea :

1- L'antiréductionisme de la mathématique contemporaine à un domaine unique (ensemble, logique, etc.) ;

2- Apparition de nouveaux problèmes philosophiques à partir de la mathématique contemporaine ;

3- La synthèse, et non pas l'analyse, comme outil pour capturer la dynamique des tensions dialectiques dans l'activité mathématique ;

4- Le rétablissement d'un mouvement pendulaire entre la créativité mathématique et la réflexion critique.

Je comprends ce mouvement pendulaire annoncé comme une sorte de pulsation globale sous condition de laquelle s'effectuent de grandes pulsations qui sont des changements de cadres ou de mondes, dont chacune à son tour est un conditionnement où des pulsations plus petites, des pulsations à l'intérieur d'un calcul assigné, s'effectuent.

4.4. INVENTER ET DÉCOUVRIR, MONTER ET DESCENDRE : TRANSITS. Une distinction majeure de Zalamea, à propos de l'acte mathématique, est qu'il y a un temps d'invention (libre), et un temps de découverte (saturation), dialectiquement nouer. C'est-à-dire que le travail mathématique se constitue de phases ascendantes d'inventions de concepts et objets, de phases descendantes de découvertes d'invariants conceptuels.

C'est précisément dans la montée, sous l'effet de pulsation, que l'on peut entrer en transit, quitter un monde au sein duquel s'active un mode de substitutions déterminé ; si, dans l'après coup on "atterrit" quelque part que l'on reconnaît comme un autre monde, alors on sait qu'il y a eu transfert. Toutefois à ce point la question est : ce qui librement s'est révélé, par exemple un nouvel aspect d'un objet ou d'un morphisme, une nouvelle manière d'être ou avatar d'objet, est-il de nature mathématique ? Pour ma part je l'affirmerais dès lors que de là pourrait résulter des effets en retour.

Par exemple, quand le théorème de Wiles est accompli en 1993, et la preuve de la conjecture de Fermat de 1641 ainsi découverte, en retour d'un "voyage" au sein de structures et mondes successifs, et long calculs en iceux, les différentes structures par lesquelles on a transité deviennent légitimement mathématiques. Ainsi les "fonctions elliptiques" (introduites par Abel et par Jacobi en 1827, au fil d'une autre histoire) , sont-elles, à ce titre, des objets mathématiques légitimes. Bien sûr il y a beaucoup d'autres raisons, plus anciennes, pour admettre les fonctions elliptiques dans l'univers mathématique ! Dans cet exemple, on peut considérer que tout se passe comme si une montée inventive avait conduit à la notion de fonction elliptiques, et puis une longue descente avait conduit à la découverte de Wiles, soit à Fermat.

Un autre exemple, déjà évoqué au paragraphe, est l'invention des nombres complexes, et la retombée est le théorème fondamental de l'algèbre.

D'une autre manière on peut comprendre aussi la descente comme le moment de production d'un invariant. Ainsi une fois introduite l'homologie, des méthodes de calculs explicites donneront la valeur de la dimension.

L'examen des cas est fait en y surveillant ces phases, et en rapportant les mathématiques éidales, quidditale, archéales,soit donc des idées, des faits, des principes, à respectivement l'ontologie, l'épistémologie, la phénoménologie.

L'ontologie est remaniée en *ontologie transitoire*, suivant la théorie d'Alain Badiou[53], à laquelle Zalamea emprunte judicieusement une figure de Platon dynamique et dialectique, à l'envers du platonisme ordinaire plat. Dans le livre de Badiou on trouve aussi, utile à Zalamea, une approche philosophique du questionnement ontologico-mathématique au travers de la théorie des catégories. Sur la question ontologique pure, il s'agit d'admettre, au titre de l'examen de l'Etre, les qualités de localité et déplacements, que la logique soit locale. L'ontologie n'est plus seulement ontologie du multiple, le plein philosophique du jeu des nombres. Il y a plus que le compte. Et encore, Badiou dit de Lautman que, dès les années trente, ses travaux ont montrés que "tout fragment significatif et novateur de la mathématique réelle peut et doit susciter, en tant que condition vivante, son identification ontologique"[54] : voilà une observation comptatible avec la vue de Lautman de Zalamea.

L'épistémologie est consolidée comme questionnement des faits observables dans l'activité mathématique, à savoir les transits, transitions, transferts, changements de mondes.

La phénoménologie est alors une phénoménologie de la créativité mathématique.

Et donc l'examen des 13 cas est ainsi conduit, en mettant en valeur la position des passages aux intersections entre mondes.

4.5. MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES CONTRE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES. Zalamea insiste beaucoup à affirmer que ce qu'il met en avant ne se peut observer qu'au niveau des mathématiques supérieures contemporaines, à peine au niveau des mathématiques modernes, et pas du tout au niveau élémentaire. Je crois que sur ce point, avec cette exclusive il se trompe, pour la raison suivante.

Il veut par là disqualifier l'approche en termes logico-ensembliste des fondements, qui en effet, vue son âge, ne porte que sur les mathématiques modernes ou plus anciennes, et les mathématiques élémentaires. Ce faisant, comme on dit, il jette le bébé avec l'eau du bain.
Il a raison de promouvoir la pratique des mathématique contemporaines, mais il a tort de soutenir cette promotion d'un rejet de la question des fondements. Même si cette question n'est évidemment plus du tout centrale en mathématiques, les mathématiciens, dont les catégoriciens, et peut-être aussi les logiciens, se tournant vers les problèmes de visions géométriques etc., vers une pensée directe de la mise en évidence des structures géométriques, cette question demeure parce qu'elle permet de poser la question de la légitimité des objets, et de leur existence ou de leur persistence.

Aujourd'hui, même en théorie des catégories, les objets construits, les limites, les complétions, etc., sont "assurés" en vertu de l'existence assumé de modèles d'univers ensemblistes plus ou moins complets. Grothendieck prenait bien la précaution de la mise en scène d'univers. Les mondes (topos ou autres) que la théorie des catégories présente existent sous de telles conditions, même si l'on peut aussi en poser axiomatiquement la donnée, l'existence ensembliste sert ici justement de mouvement de descente, de retour au connu, de certificat de mathématicité. C'est-à-dire aussi que la dialectique objet/relation se donne en fait à lire sous la forme de la dialectique Ensembles/catégories. La phénoménologie de la créativité mathématique doit avoir pour objet non seulement le transit, comme le met très bien en relief Zalamea, mais, plus loin, la dialectique entre la fixation et le transit.

Mais même à supposer que, provisoirement, aux fins de promouvoir l'examen des transits, on oubli les questions logico-ensemblistes, ce n'est pas une raison pour oublier, que dans les mathématiques passées, la question du transit est bel et bien présente, implicitement et explicitement. C'est ce que j'appelle la pulsation, dont je donnais plus haut un exemple.

[53] A. Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris, 1998.
[54] A. Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris, 1998, p. 56.

Le transit “supérieure” qu’envisage Zalamea, entre domaines mathématiques en quelque sorte, est simplement une sorte de macro-pulsation, un changement de cadre, un changement de monde, voire de règle, de logique, voire d’imaginaire. Mais son essence est la même que celle de la pulsation. D’ailleurs à ce titre, le débutant en mathématique est déjà possiblement créatif, et pour progresser en mathématique, il faut les recréer pour soi. Pour cette raison je pense que l’histoire des mathématiques, leur enseignement, leur apprentissage, et leur invention et découverte ou création, sont un seul et même processus. C’est à ce titre que j’ai proposé la pulsation comme notion contre les idées pernicieuses du didacticien Chevallard, et contre sa trop fameuse transposition didactique. Toutefois, s’il ne nourrit pas son imaginaire de théories et problèmes, la capacité créative du débutant s’étiolera vite, et il est vrai que la mise en évidence fonctorielle des grandes pulsations ou grands transits des mathématiques récentes est tout à fait excellente. Là le livre de Zalamea est complètement remarquable.

L’exclusive que déclare Zalamea lui sert à reléguer les philosophes et épistémologues qu’il revisite dans son examen bibliographique, en manière de dire qu’ils étaient sur la bonne voie, mais qu’il faut aller plus loin. En effet Zalamea va plus loin pour le matériau examiné, mais à mon sens l’idée maîtresse sur la créativité par jeu virtuel, transit, et condensation invariantive, par, dirais-je sortie du jeu convenu *et* retour, est déjà en cours, et observable dans les mathématiques modernes, dans les mathématique du XIXème siècle. Ainsi qu’est-ce que la théorie de Galois, sinon un transit depuis l’intérieur de *la pratique du calcul*, vers une position de surplomb d’où l’on examiner l’acte même de calculer, de déplacer et indexer, et d’observer l’observation elle-même, en découvrant, dans ce nouveau monde de *l’observation du calcul*, l’ambiguité nécessaire pour relever les actes de calculs ? Ainsi qu’est-ce que le développement de la géométrie algébrique depuis Gabriel Lamé jusqu’à Max Noether puis Emmy Noether, sinon la mise en acte d’une posture indirecte et de retrait, où des calculs (les polynômes) sont pris, après plusieures étapes, comme éléments d’un autre calcul, la théorie des anneaux noetheriens ? Et la structuration, la pensée des analogies, que promeut André Weil, tout cela est bien du transitif en acte. La théorie des catégories, de l’époque moderne, suivant Zalamea, relève encore à son tour d’un mouvement de distantiation et du travail second de mise en dehors d’un premier travail qui devient l’objet examiné.

4.6. LE NŒUD DES ETUDES DE CAS. Donc les cas étudiés sont treize, dont, mis en avant, celui de Grothendieck avec pour titre du chapitre 4 : *Grothendieck ou les formes de grande créativité mathématique*.

La présentation faite par Zalamea est excellente, et d’une richesse qui devrait motiver les philosophes et les mathématiciens, mettant bien en valeur les mouvements de pensées et les outils catégorico-cohomologiques, et notamment la notion de faisceau. Zalamea complète ce côté catégoricien par l’introduction des idées de Lawvere et de Freyd, à propos des adjonctions, des topos élémentaires, des allégories. Ensuite le programme de Langlands est situé.

Dans son analyse de la première édition colombienne du livre de Zalamea, Villaceves[55] affirme que la présentation de Shelah, et de Zilber (à la jonction entre théorie des modèles et géométrie non-commutative) est remarquable. Pour la mise en valeur d’un travail de relation entre théorie des modèles, géométrie algébrique, la combinatoire géométrique de Tao, les travaux de Gromov, et la théorie des nombres, Zalamea fait intervenir les travaux de

[55] A. Villaceves, *Zalamea, Fernando. Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, Colección Obra Selecta, 2009. 231 p. *Ideas y Valores* [online]. 2010, vol.59, n.142, pp. 174-182.

Hrushovski. Il y a aussi, dans le quidditai, du côté de la liason avec la physique, les mathématiques de Atiyah, Lax, Connes, Konsevitch.

Zalamea explique aussi très clairement les enjeu des "reverse mathematics" de Stephen Simpson.

4.7. ÉPISTÉMOLOGIE ET PHÉNOMÉNOLOGIE FAISCEAUTIQUES. Zalamea construit une épistémologie et une phénoménologie (philosophique) à l'image des connaissances mathématiques qui l'attirent le plus, notamment les catégories, à travers Grothendieck, Lawvere, Freyd. Il est sensible aussi à la vue "géométrique" des choses, par quoi il n'insiste pas sur le diagrammatique catégoricien. Puisque les mathématiques qu'il affectionne ont en leur centre la notion de faisceau, cette notion lui sert à modéliser l'épistémologie elle-même, c'est-à-dire un discours de re-connaissance philosophique de ses connaissances techniques. Il propose donc une épistémologie faisceautique.

Il est vrai que la théorie des catégories a été définie en son départ pour analyser un certain type de créations mathématiques, qu'elle est une mathématique dont l'objet est une certaine activité mathématique. Le miracle est alors le suivant : en examinant catégoriquement l'activité des topologues des années quarante, on s'est donné les moyens de résoudre des problèmes dans leur champ. Tout comme en introduisant les complexes, on a pu contrôler par dessus la production de résultats en analyse réelle. Ce qui a été magnifiquement amplifié ensuite par les travaux de Grothendieck pour le cas de la géométrie algébrique.

La nouveauté est que la théorie des catégories est le premier outil mathématique systématique que la mathématique s'invente pour observer sa propre démarche créative. Ce qui est certes tout à fait différent de l'analyse logico-ensembliste à la recherche d'un fondement, et de la logique et de la théorie de la démonstration : la logique surveille la production de vérités, la théorie de la démonstration surveille l'usage des moyen de la logique.

Avec elle, l'activité mathématique devient elle-même un objet mathématique, bien différent de l'objet qui serait constitué des résultats et vérités mathématiques.

Comme Zalamea, catégoricien lui-même doit certainement bien avoir cette notion, on comprend qu'il aime à placer cette théorie des catégories au cœur de son dispositif, pour analyser justement les moments décisifs de transferts, comme étant des foncteurs, les mondes et leurs intersections étant, dirais-je, comme les point d'un site inachevé en construction, le "site mathématique". Zalamea poursuit l'aventure en proposant l'extension de cette vue faisceautique à l'ensemble de la culture.

5. CONCLUSION PROVISOIRE : NÉCESSITÉ DE LA THÉORIE DES CATÉGORIES

L'unité des mathématiques réside la qualité "exacte" de son exercice, cette "exactitude" qui produit des vérités ne pouvant s'accomplir que dans la liberté analytique créative de décomposition, composition, transferts (résiduation et traduction) ; la logique n'est qu'une hygiéne, un moyen de vérifier cette qualité ; ce n'est pas la logique mais c'est la valeur dialectique de cette unité qui devrait être l'objet de l'épistémologie des mathématiques. À ce titre la maintenance des objets et du "quoi" ontologique ne prime plus, et le "comment" épistémique prend le pas. En introduction j'ai pointé quelques traits d'une telle épistémologie, laquelle j'ai nommée *épistémologie transitive*. Après lecture de Patras et Zalamea je voudrais en reserrer la notion.

5.1. LA DIALECTIQUE DES OBJETS ET DES TRANSITS. Umberto Eco a écrit avec pertinence que "la langue de l'europe, c'est la traduction" ; par analogie, je formulerai que *la langue des* *mathématique, c'est la transition*. Entendant par là que la mathématique est comme une langue naturelle, où parler c'est proposer des transitions, faire des métaphores mathématiques, le travail mathématique consistant à parler cette langue. Dans le fil de ce discours, se condensent, comme des mots ou atomes provisoires, des objets. Mais ces objets mathématiques ne sont qu'un moyen pour parler, leur sens et leur forme évoluent avec la langue. Ce qui compte c'est l'invention de la langue, c'est-à-dire ce que ceux dont c'est la langue maternelle, dont c'est la culture, en font, la langue qu'ils se passent..

Dans cette analogie, qu'on entendra bien à l'opposé de la "philosophie du langage", l'épistémologie transitive aura le rôle d'une grammaire dynamique voire d'une théorie littéraire, ou d'une histoire aussi.

Il nous faut alors poser simultanément deux affirmations contradictoires ou un paradoxe : il y a les mots fixes, et il y a la parole qui toujours les change ; soit ici : il y a les objets ou prétendu-objets, ou intentions d'objets, ou constructions partielles de données, etc., et il y a les déplacements, les transformations, les transferts, les transits, etc., qui les changent. Le cœur même de notre épistémologie sera l'explicitation de ce paradoxe. Bien entendu il ne s'agit pas de résoudre ledit paradoxe, mais au contraire de le connaître, d'advenir en lui à la pratique mathématicienne. Comment peut-on prétendre à des objets et déjà en changer ? Comment peut-on prétendre à l'exploration d'un monde de calculs, et déjà en changer ?
En lisant Patras nous avons appris comment l'on peut prétendre à l'objet, et aussi comment celui-ci ne cesse de s'esquiver, au fil de l'histoire — d'où l'importance de l'histoire — restant néanmoins le même autrement. En lisant Zalamea nous avons compris l'urgence du transit dans tous ses états les plus hétérogènes possibles, entre les noeuds du réseau des mondes mathématiques imaginés.

La question pour nous est double : celle de l'objet *et* du transit, les deux problèmes visés par mon titre. Même si les objets deviennent, au fil de l'histoire des mathématiques, de plus en plus inconsistants, la question de l'objet reste, Patras le montre ; même si l'on effectue de plus en plus de transit ou changement de mondes, comme le souligne Zalamea, il n'en demeure pas moins que ces mouvements doivent bien conclure, reconduire à des objets stables, ou du moins à des invariants. Patras et Zalamea le savent.

C'est pourquoi je considère que l'organisation par Alain Badiou et Charles Alunni du Colloque *Relation/Objet* fut un événement très important[56].

5.2. Le développement et l'usage de la théorie des catégories.

5.2.1. *Objets.* Les notions de théorie des catégories ne sont pas vraiment utilisées par Patras, dans sa présentation de la persistence de l'objet "nombre" en tous ses avatars, le recours aux problèmes universels n'apparaissant in extremis que comme une ressource de plus. Mais pourtant cela, je veux dire les catégories, est omniprésent, dès que l'on pense à un objet comme un objet d'une catégorie : et comment faire autrement au moment où l'on désire détacher l'existence d'un objet des contingences et singularités non-pertinentes de sa construction, c'est-à-dire en établir une véritable nécessité fonctionnelle, qui est sa véritable raison d'être mathématique. La nécessité fonctionnelle d'un objet, c'est la catégorie où il vit, ou où on décide de le placer ou déplacer, et ce qui exhibe cette nécessité en la donnant à utiliser, c'est le lemme de Yoneda. D'autre part les manipulations et constructions d'objets dans la dimension de leurs nécessités, se décrivent comme des constructions internes à leur catégorie, c'est-à-dire relève de l'analyse relationnel entre eux, dans le jeu des diagrammes qui sont comme des prescriptions de transitions. Le passage de la contingence à la nécessité que réalise l'approche catégoricienne, est comme une réalisation mathématique et la

[56] Colloque *Relation/Objet*, organisé par Charles Alunni et Alain Badiou, ENS, Paris, 18 et 18 juin 2014.

visualisation de la profonde idée de Cavaillès que le travail mathématique produit de façon contingente des nécessités. Ce que donc j'appelle *l'évidement d'un objet*, c'est le moment où il passe du statut d'objet contingent voire accidentel, de rapprochements de diverses substances ou matériaux, à celui d'objet nécessaire, répondant d'un jeu précis de transitions, par sa fonction comme solution d'un problème universel (le problème de représenter sa fonction justement).

5.2*.2. Transits.* Au contraire, Zalamea utilise de façon importante les catégories et foncteurs pour expliquer ses auteurs, et son épistémologie. Notamment les questions de recollements et faisceaux, et les questions de foncteurs adjoints. C'est bien ainsi que Grothendieck développait l'analyse diagrammatique de la géométrie. C'est bien dans le fil de ces techniques que Lawvere songeait dans les années soixante déjà à la modélisation de la dialectique Hégelienne. En général, c'est en terme de réseau et d'intersections de domaines, de faisceaux, de géométrie diagrammatique, que se représente la circulation des intentions des mathématiciens au travail. Je crois que Zalamea à tout à fait raison de penser l'organisation de son épistémologie au travers de cette donnée mathématique.

5.2.3. *Dialectique*. Alors que Lawvere utilisait l'adjonction de façon à coordonner des univers à un même niveau (homogènes, on dira) tel les ouverts et les fermés d'un même espace, l'analyse épistémologique des travaux mathématiques contemporains qu'envisage Zalamea demande la coordination dialectique à des niveaux hétérogènes, par exemple entre un site et une catégorie de faisceaux sur ce site, relative à un univers déterminé, entre un groupe et la théorie des groupes, représentée par une catégorie de groupe, entre un univers de variétés Riemaniennes et une catégories de fibrés, etc. Du coup, il faut provisoirement prendre le risque de l'inconsistence, en omettant un moment de se poser la question des univers et du fondement. Voilà pourquoi la dialectique prend aussi la figure du dialogue ensembles/catégories, non pas comme deux possibilités de fondement, mais comme d'un côté la question du fondement, et de l'autre la question du fonctionnement.

5.2.4 *Dialectique, cohomologie, et retour à la métaphysique*. C'est dans l'hétérogénéité, entre des théories renouvelées, qu'il faut chercher la sortie ouverte, en se soutenant du retour nécessaire. J'ai donc proposé, il y a longtemps, que la dialectique soit, au point de sa logique, *la théorie des catégories en développement*[57]. Non pas la logique dans telle ou telle catégorie, en interne à la théorie des catégories arrêtée, par exemple repérable au niveau de telle ou telle adjonction ; mais l'avancement même du travail collectif des catégoriciens. Considérant que chaque formule mathématique est une description d'une pratique, exprimant l'erreur en laquelle consisterait l'usage de telle autre formule, je soutenais le slogan :

Logique = Algèbre homologique.

Sans développer ici les problèmes fondamentaux, ni les techniques et constructions de la cohomologie générale que j'ai proposées depuis, il convient, pour conclure l'examen maintenant, de préciser élémentairement pourquoi c'est sous l'angle du transitif que le recours aux catégories se motive naturellement ; j'y viens dans un instant.

Mais concernant la dialectique elle-même, j'ajouterai encore, aux considérations de 1982, la précision suivante relativement aux mathématiques et à leur lien à la logique.

J'ai trouvé chez Patras une posture attachée à la métaphysique, au sens où, insister sur le nombre, c'est supposer possible la croyance à l'objet en substance, à l'objet délimité par un discours logique et une distribution de séparations conceptuelles. La question du nombre est

[57] R. Guitart, Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?, 3ème Colloque sur les Catégories, dédié à Charles Ehresmann, Amiens, juillet 1980, publié dans *CTGD* XXIII-2 (1982), 115-148, p. 117.

alors comprise dans l'hypothèse que le sens des mathématiques est dans sa production d'objets, sous contrôle du principe de non-contradiction (preuves logiques, fondation logico-ensembliste ou logico-X, pensées de l'articulation nécessaire des délimitations par concepts : ce qui est très loin de ce qui se passe quand on invente) .

J'ai trouvé chez Zalamea un engagement dialecticien, celui du mathématicien qui sait que le travail en-cours demande de transgresser le principe de non-contradiction, ou plutôt de s'en départir provisoirement, comme il faut aussi se départir de toute visée ontologique, au prix d'un effort ultérieur de retour (on pourrait dire : retour dialectique de la dialectique à la métaphysique ...) ; le point décisif est alors que la mathématique n'est plus considérée sous l'angle de ce qu'elle produit (des nécessités cripto-logiques) mais sous celui de la créativité contingente qui "gouverne", si l'on peut dire, son invention (peut-être la fameuse liberté des mathématiques dont parle Cantor). Toute la différence entre avoir des maths, faire des maths. D'où une épistémologie des *résultats probants*, contre une épistémologie de la *découverte inventive*.

Nonobstant d'autres épistémologies, pires, qui nous entretiendraient de l'expérience scientifique et autres mythes réalistiques : il s'agit dans ce que j'avance, de la question des mathématiques en tant que pensée.

C'est dire que la mathématique veut prendre en charge, commes plan de pensées, par ce qu'elle produit, et par la manière dont elle le produit, les deux possibilités qui se présente vis-à-vis de la contradiction : ou bien il y en a deux, externes, et qui se contredisent (métaphysique des deux mondes), ou bien il n'y en a qu'un, comprenant en lui-même sa contradiction (dialectique). Ce que je crois savoir, c'est que la mathématique est l'effort insoutenable de tenir conjointes ces deux postures, la métaphysique et la dialectique, autour de la non-contradiction. À quoi donc la théorie des catégories sert d'observatoire. À quoi la notion de transitivité sert de médiatrice.

5.3. LES CATÉGORIES SONT NÉCESSAIRE A L'ÉPISTÉMOLOGIE TRANSITIVE.

5.3.1. *La notion de catégorie est une modélisation minimale du transit homogène.* J'ai indiqué au cours de cette note qu'il faut comprendre les catégories comme une modélisation abstraite (axiomatisation algébrique) du fonctionnement du transit qui s'effectue par le calcul des fonctions. En particulier l'associativité est une propriété du transit (voir en 2.12). Et ensuite, la preuve du lemme de Yoneda dépend en fait étroitement de l'associativité, et ce lemme, dont la première signification, relativement aux objets, est l'évidement (voir au paragraphe 2.12) signifie aussi, et c'est son deuxième sens, relatif aux morphismes, que, réciproquement, pour toute catégorie ses flèches peuvent effectivement être interprétés comme des fonctions. C'est très intéressant : d'un côté on explique que les objets sont vides ou plutôt évidés, de leur construction élémentale accidentelle, et de l'autre, paradoxalement, on explique simultanément que les flèches sont des transit fonctionnels, opérant donc sur des éléments. La solution du paradoxe est que dans le second point, en réalité chaque objet, après avoir perdu ses éléments "contingents" récupèrent de nouveaux éléments "nécessaires", qui sont les transits (les flèches) vers cet objet.

5.3.2. *Rôle des relations, médiations entre les objets et les transits.* Il faut aussi relever ce que j'indiquais plus haut, que les catégories permettent de penser la dépendance entre les fonctions et les objets, en déterminant les objets par leurs propriétés universelles, et aussi entre les fonctions et les relations (qui sont des contraintes virtuelles de transits), en construisant les multifonctions, ou fonction à valeurs dans les "objets de sous-objets" représentant les relations. C'est dire que en acte, au sein de chaque catégorie est active la dialectique objet/transit.

5.3.3. *Le rapport des catégories aux univers permet d'introduire le transit hétérogène*. Les univers, ou modèles partiels de ZF, s'ils sont donnés en amont, déterminent le matériau stable avec lequel, et dans lequel, on construit. On a donc l'impression de reservir la problématique des fondements. En réalité pas tout à fait, puisque les univers peuvent être plusieurs, et adaptés aux problèmes. On peut même dire que du coup de nouveau problèmes émergents, qui consistent, pour un résultat donné, de savoir s'il dépend de l'univers à la base de la construction. La théorie des ensembles fournit plus, par ses éventuels modèles, des socles que des fondements. Borel a même pu dire que, au moins (sous-entendu : on ne sait pas très bien si du point de vue des fondements ...) la théorie des ensembles a permis le développement de l'analyse fonctionnelle, des espaces de fonctions, c'est-à-dire de l'analyse des propriétés des fonctions. Dans cette ligne, la théorie des catégories est l'analyse de l'analyse fonctionnelle, en particulier, dès son départ, de la théorie de la dualité. Mais la théorie des catégories est ensuite aussi l'analyse de la théorie des catégories ; c'est possible, si l'on suspend le questionnement sur la taille des entités.

Les catégories de structures, ou bien les catégories de faisceaux, sont introduite à partir de la donnée d'un univers d'ensembles, comprenant les ensembles Hom(Y, X) relatif à la catégorie en question, et rapidement on doit utiliser plusieurs univers emboités. Ainsi on peut considérer des foncteurs d'une catégorie A vers la catégories B^ = $Ens^{B^{op}}$ des préfaisceaux sur B, ce que Jean Bénabou appelle les distributeurs, et aussi bien les foncteurs de A vers la catégorie Fib(B) des fibrations sur B.

Ces données jouent le rôle de relations entre catégories, et ce sont bien des transits de A vers Fib(B), qui est un niveau de taille au-dessus de B ; des transits hétérogènes donc. On peut voir une donnée

$$A \to Fib(B)$$

comme une *pulsation ou plutôt un jet au départ de* A, vers des virtualités de B, ou pour mieux dire comme un transit "ouvert" de A vers B, c'est-à-dire d'objets de A vers des possibilités d'objets de B. On pourrait aussi parler là de transit transcendant. Un objet de B^ ou Fib(B) peut s'entendre ainsi : c'est un "vrai" objet de B, s'il est représentable, ou faiblement représentable, sinon c'est un objet virtuel de B.

RÉFÉRENCES

C. Alunni, "Bachelard face aux mathématiques", *Revue de synthèse*, tome 136, 6ème série, n°1-2, 2015.

C. Alunni, *Spectres de Bachelard. Gaston Bachelard et l'École surrationaliste*, 504 p., à paraître.

C. Alunni, "Maximilien Winter et Federigo Enriques : des harmonies exhumées",, in C. Alunni et Y. André (éd.), *Federigo Enriques ou les harmonies cachées de la culture eurppéenne. Entre science et philosophie*, Actes du Colloque organisé à l'Academie des Lettres, des Sciences et des Arts de Venise, du 14 au 17 mai 2012, Pisa, Le Edieioni della Normale, Scuola normale superiore di Pisa, 2014.

C. Alunni et A. Badiou, Colloque *Relation/Objet*, organisé par Charles Alunni et Alain Badiou, ENS, Paris, 18 et 18 juin 2014.

A. Badiou, Court traité d'ontologie transitoire, Seuil, Paris, 1998.

E. Barbin, La révolution mathématique du XVII ème siècle, ellipses, 2006.

E. Barbin, Préface, in Commission Inter-IREM et IREM de Basse-Normandie, *Si le nombre m'était conté...,* ellipses poche, 2015.

S. Baruk, *Nombres à compter et à raconter*, Seuil, 2014.

R. Bkouche, *Sur la place du numérique dans la construction de la géométrie, in* Commission Inter-IREM et IREM de Basse-Normandie, *Si le nombre m'était conté...,* ellipses poche, 2015.
J. Brette et F. Le Lyonnais, *Les nombres remarquables*, Hermann, 1983.
L. E. Dickson, *Number Theory of Numbers*, vol. 1 (1918), vol. 2, 3 (1919), reprint Chelsea.
C. Ehresmann, *Catégories et structures*, Dunod, 1965.
R. Guitart, *La pulsation mathématique*, L'Harmattan, 1999.
R. Guitart, "Bachelard et la pulsation mathématique", *Revue de synthèse*, tome 136, 6ème série, n°1-2, 2015.
R. Guitart, "La possibilité d'une théorie des relations sans objets : autographes et auto-catégories", conférence au Colloque *Relation/Objet*, organisé par Charles Alunni et Alain Badiou, ENS, Paris, 18 et 18 juin 2014.
R. Guitart, "History in mathematics according to André Weil", in *ESU 7*, Copenhague, july 14-18, 2014.
R. Guitart, "Nietzsche face à l'expérience mathématique", in *Les mathématiques et l'expérience : ce qu'en ont dit les philosophes et les mathématiciens*, Colloque à Paris 7, 31 mai-1er juin 2013, à paraître chez Hermann en 2015.
G. Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion, 1975.
G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, Paris, R. Laffont, 1994.
R. R. Held, *L'œil du psychanalyste. Surréalisme et surréalité*, Petite Bibliothèque Payot n°218, 1973.
A. Lautman, *Ensayos sobre la dialectica, estructura y unidad de las matematicas modernas*, trad. F. Zalamea, Biblioteca francesa de filosofia, Universidad Nacional de Colombia, 2011, 594 p.
A. Lautman, *Ensayos sobre la estructura y la unidad de las matematicas modernas*, trad. F. Zalamea, Universidad Nacional de Colombia, 2004, 397 p.
A. de Libera, Archéologie du sujet, III. L'acte de penser 1. La double révolution, Vrin, Paris, 2014.
S. Mac Lane, *Mathematics, Forms and Functions*, Springer, 1986.
M. Merleau-Ponty, *Phénoménologie de la perception*, coll. tel n°4, Gallimard, 1945.
M. Merleau-Ponty, *Éloge de la philosophie*, coll. idées n°75, Gallimard, 1953, 1960.
M. Merleau-Ponty, *La prose du monde*, coll. tel Gallimard, 1969.
F. Nietzsche, *Œuvres philosophiques complètes,XII, Fragments posthumes. Automne 1885-automne 1887,* Gallimard, Paris, 1978, 7 [4], p. 263.
F. Patras, *Homothéties simpliciales,* Thèse, U. Paris VII, 1992.
F. Patras, *La pensée mathématique contemporaine*, PUF, Paris, 2001.
F. Patras, *La possibilité des nombres*, PUF, Paris, octobre 2014.
J. Petitot, Refaire le "timée": introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman, in Revue d'histoire des sciences, 1987, vol. 40 -1, pp. 79-115.
N. L. Perena, La matematica moderna : entre el "formalismo modificado" de Cavaillès y el "platonismo estructural" de Lautman,Thesis, Sevilla, 2007.
J.-B. Pontalis, "Trouver, accueillir, reconnaître l'absent", préface dans D. W. Winnicott, *Jeu et réalité*.
S. Richard, *De la forme à l'être. Sur la genèse philosophique du projet husserlien d'onto-logie formelle*, Les éditions Ithaque, Montreuil-sous-bois, 2014.
C. Romano, *Au cœur de la raison, la phénoménologie*, folio essais 539, 2010.
A. de Tienne, *Analytique de la représentation chez Peirce. La genèse de la théorie des catégories*, Bruxelles, Publications des Facultés universitaires Saint Louis, 1996.
I. Toth, *Palimpseste. Propos avant un triangle*, PUF, 2000.

A. Villaceves, *Zalamea, Fernando. Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, Colección Obra Selecta, 2009. 231 p. *Ideas y Valores* [online]. 2010, vol.59, n.142, pp. 174-182.
D. W. Winnicott, *Jeu et réalité*, folio essais 398, 2002 (Playing and reality, 1971).
D. W. Winnicott, *La nature humaine*, coll. tel n° 408 Gallimard, 1990.
L. Wittgenstein, *Cahier bleu*.
A. P. Youschkevitch, The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 16, N°1 (1976), 37-85.
F. Zalamea, *Enumeration and Parametrization: A category-Theoretic Approach*, PhD, U. of Massachusetts Amherst, 1991.
F. Zalamea, *Albert Lautman et la dialective créative des mathématiques modernes*, préface de : A. Lautman, *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Paris, Vrin, 2006.
F. Zalamea, *América una trama integral. transversalidad, bordes y abismos en la cultura americana, siglos XIX y XX*, Bogota, Universidad Nacional de Colombia, Faculdad de Ciencias Humanas, Biblioteca abierta. Estudios interdisciplinarios, 2009.
F. Zalamea, *Razon de la frontera y fronteras de la razon,* Bogota, Universidad Nacional de Colombia, 2010.
F. Zalamea, *Peirce's continuum, A methodological and mathematical approach*, 2011.
F. Zalamea, *Philosophie synthétique des mathématiques contemporaines*, trad. C. Alunni, à paraître. (édition originale espagnole : Filisofia sintética de las matematicas contemporaneas, Bogota, Universidad Nacional de Colombia, Faculdad de Ciencias, 2009. édition anglaise : Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics, trad. Z. L. Frazer, Urbanomic, Falmouth, UK, Sequence Press, New York, USA, 2012).