Les représentations naturelles de $\mathcal{P}X$ dans $\mathcal{P}\mathcal{P}X$

Journées *Catégories, Algèbres, Esquisses et Néo-esquisses,*
Caen (France), 27-30 Septembres 1994

Pierre Damphousse
Faculté des Sciences de Tours
Parc de Grandmont
37200 Tours
France
damphous@univ-tours.fr

René Guitart
Université Denis Diderot Paris 7
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France

1. Origine et but du travail

Ce travail est né de préoccupations de la théorie des langages dans lesquelles on considère un langage formel sur un alphabet Σ comme une suite (le plus souvent finie) de points $\{x_i \in \mathcal{P}^i X\}_{i\in I}$, où $X = \Sigma^*$. Dans ce contexte, il est nécessaire de comprendre les liens naturels entre $\mathcal{P}X$ et $\mathcal{P}^2X$.

La construction de Cantor de l'ensemble $\mathcal{P}X$ de tous les sous-ensembles d'un ensemble X peut être considérée comme un foncteur P_1 de trois façons, une contravariante et deux covariantes, notées

$$\underline{\mathbf{C}}, \underline{\exists}, \underline{\forall} \tag{a}$$

et définies en posant pour toute application $f : X \to Y$

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathbf{C}}f = f^* : \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X & : & B \mapsto f^*B = \{x \in X;\ fx \in B\}; \\ \underline{\exists}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y & : & A \mapsto \underline{\exists}fA = \{y \in Y;\ \exists x((y = fx) \wedge (x \in A))\}; \\ \underline{\forall}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y & : & A \mapsto \underline{\forall}fA = \{y \in Y;\ \forall x((y = fx) \Rightarrow (x \in A))\}; \end{array}$$

Par suite, la construction $\mathcal{P}^2X = \mathcal{P}\mathcal{P}X$ peut être considérée comme un foncteur P_2 de neuf façons, quatre contravariantes et cinq covariantes, à savoir

$$\underline{\mathbf{C}}\,\underline{\exists}, \underline{\mathbf{C}}\,\underline{\forall}, \underline{\exists}\,\underline{\mathbf{C}}, \underline{\forall}\,\underline{\mathbf{C}} \text{ et } \underline{\mathbf{C}}^2, \underline{\exists}^2, \underline{\exists}\,\underline{\forall}, \underline{\forall}\,\underline{\exists}, \underline{\forall}^2. \tag{b}$$

Nous décrivons complètement le système de toutes les transformations naturelles d'un foncteur quelconque P_1 de (a) vers un foncteur quelconque de (a) ou (b) de même variance que P_1, et parmi elles celles qui "représentent naturellement" $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}\mathcal{P}$. Ce qui nous permet de situer catégoriquement dans une même perspective le calcul booléen et l'arithmétique des cardinaux.

2. Du niveau 1 au niveau 1

PROPOSITION 1. *Toutes les transformations naturelles d'un foncteur de* (a) *vers un autre foncteur de* (a) *de même variance sont déterminées par les fonctions de* $\mathcal{P}X$ *vers* $\mathcal{P}X$ *suivantes:* $A \mapsto \emptyset$, $A \mapsto X$, $A \mapsto A$, $A \mapsto \complement_X A$.

Nous notons par la suite $\nu_X : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}X$ l'application définie par $A \mapsto \complement_X A$.

3. Du niveau 1 au niveau 2 : les cas contravariants

PROPOSITION 2. *Les transformations naturelles du foncteur* $\underline{\mathbf{C}}$ *vers le foncteur* $\underline{\exists}\,\underline{\mathbf{C}}$ *sont au nombre de 16, et sont déterminées par les 16 fonctions qui* *envoient respectivement $A \subset X$ sur:*

$$\begin{array}{llll}
\alpha_X^{0000} A = \emptyset & \alpha_X^{0001} A = \{X\} & \alpha_X^{0010} A = \{\complement_X A\} & \alpha_X^{0011} A = \{\complement_X A, X\} \\
\alpha_X^{0100} A = \{A\} & \alpha_X^{0101} A = \{A, X\} & \alpha_X^{0110} A = \{A, \complement_X A\} & \alpha_X^{0111} A = \{A, \complement_X A, X\} \\
\alpha_X^{1000} A = \{\emptyset\} & \alpha_X^{1001} A = \{\emptyset, X\} & \alpha_X^{1010} A = \{\emptyset, \complement_X A\} & \alpha_X^{1011} A = \{\emptyset, \complement_X A, X\} \\
\alpha_X^{1100} A = \{\emptyset, A\} & \alpha_X^{1101} A = \{\emptyset, A, X\} & \alpha_X^{1110} A = \{\emptyset, A, \complement_X A\} & \alpha_X^{1111} A = \{\emptyset, A, \complement_X A, X\}
\end{array}$$

De manière similaire, il y a 16 transformations naturelles de $\underline{\mathbf{C}}$ vers le foncteur $\underline{\forall}\,\underline{\mathbf{C}}$. Elles sont déterminées par les 16 fonctions $\beta_X^c A = \mathcal{P}X - \alpha_X^{\overline{c}} A$, où $\overline{c}$ désigne la négation composante par composante de c.

Ces ensembles de 16 transformations naturelles ont canoniquement une structure d'algèbre de Boole: pour chaque valeur de c et d, et pour le $\wedge$ et le $\vee$ composante par composante,

$$\alpha_X^{c\wedge d} A = \alpha_X^c A \bigcap \alpha_X^d A, \quad \alpha_X^{c\vee d} A = \alpha_X^c A \bigcup \alpha_X^d A, \quad \beta_X^{c\wedge d} A = \beta_X^c A \bigcap \beta_X^d A, \quad etc$$

.

PROPOSITION 3. *Les transformations naturelles du foncteur $\underline{\mathbf{C}}$ vers le foncteur $\underline{\mathbf{C}}\,\underline{\forall}$ sont au nombre de 16, et sont déterminées par les 16 fonctions suivantes:*

- ▷ $\mu_X^{0000} A = \emptyset$;
- ▷ $\mu_X^{0001} A = \{X\}$;
- ▷ $\mu_X^{0010} A = \{B : \complement_X A \subset B \neq X\}$;
- ▷ $\mu_X^{0011} A = \{B : \complement_X A \subset B\}$;
- ▷ $\mu_X^{0100} A = \{B : A \subset B \neq X\}$;
- ▷ $\mu_X^{0101} A = \{B : A \subset B\}$;
- ▷ $\mu_X^{0110} A = \{B : (A \subset B \text{ ou } \complement_X A \subset B) \text{ et } (B \neq X)\}$;
- ▷ $\mu_X^{0111} A = \{B : (A \subset B \text{ ou } \complement_X A \subset B\}$;
- ▷ $\mu_X^{1000} A = \{B : \complement_X B \bigcap A \neq \emptyset \text{ et } \complement_X B \bigcap \complement_X A \neq \emptyset\}$;
- ▷ $\mu_X^{1001} A = \{B : \complement_X B \bigcap A \neq \emptyset \text{ et } \complement_X B \bigcap \complement_X A \neq \emptyset\} \bigcup \{X\}$;
- ▷ $\mu_X^{1010} A = \{B : \complement_X B \bigcap A \neq \emptyset\}$;
- ▷ $\mu_X^{1011} A = \{B : \complement_X B \bigcap A \neq \emptyset\} \bigcup \{X\}$;

▷ $\mu_X^{1100}A = \{B : \complement_X B \bigcap \complement_X A \neq \emptyset\}$;

▷ $\mu_X^{1101}A = \{B : \complement_X B \bigcap \complement_X A \neq \emptyset\} \bigcup \{X\}$;

▷ $\mu_X^{1110}A = \{B : X \neq B \subset X\}$;

▷ $\mu_X^{1111}A = \mathcal{P}X$;

De manière similaire, il y a 16 transformations naturelles de $\underline{\mathbf{C}}$ *vers le foncteur* $\underline{\mathbf{C}}\,\underline{\exists}$*; comme dans la proposition précédente, ces ensembles de 16 transformations naturelles ont chacun canoniquement une structure d'algèbre de Boole.*

Il y a donc $4 \times 16 = 64$ transformations naturelles de $\underline{\mathbf{C}}$ vers les foncteurs contravariants de niveau 2 (i.e. de (b)).

Par la suite, nous notons $\pi_X, \psi_X, \upsilon_X, \delta_X$ respectivement les applications

$$\begin{array}{rccl}
\pi_X : & \mathcal{P}X & \longrightarrow & \mathcal{P}^2X \\
& A & \longmapsto & \{B \in \mathcal{P}X;\ \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)\} \\
\psi_X : & \mathcal{P}X & \longrightarrow & \mathcal{P}^2X \\
& A & \longmapsto & \{B \in \mathcal{P}X;\ \exists x(x \in B\ \wedge\ x \in A)\} \\
\upsilon_X : & \mathcal{P}^2X & \longrightarrow & \mathcal{P}X \\
& \mathcal{A} & \longmapsto & \{x \in X;\ \exists A(x \in A\ \wedge\ A \in \mathcal{A})\} \\
\delta_X : & \mathcal{P}^2X & \longrightarrow & \mathcal{P}X \\
& \mathcal{A} & \longmapsto & \{x \in X;\ \forall A(x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{A})\}
\end{array}$$

Clairement: $\nu_{\mathcal{P}X}\pi_X\nu_X = \psi_X$ et $\delta_X = \nu_X\upsilon_X\nu_{\mathcal{P}X}$, ainsi que $\nu_Y\underline{\exists}f\nu_X = \underline{\forall}f$ et $\nu_X\underline{\mathbf{C}}f\nu_Y = \underline{\mathbf{C}}f$. Nous appelons ce type de relations *des relations de conjugaison par* ν. Dans les propositions précédentes, les "de manière similaire" correspondent à des "résultats obtenus par conjugaison".

Un ensemble de parties est ordonné par l'inclusion (ou par son opposée). Parmi les 64 transformations mentionnées plus haut, certaines ont des composantes qui sont des foncteurs (entre ensembles ordonnés). Parmi elles, certaines ont des composantes qui ont des adjoints, à droite ou à gauche selon le choix de l'ordre, et parmi celles-ci, certaines ont des composantes qui sont des foncteurs monadiques (de fait, ces dernières ont des composantes injectives admettant une section monotone naturelle). Dans ce cas, on dit que l'on a *une représentation naturelle de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}\mathcal{P}$.

PROPOSITION 4. *Parmi les 64 transformations de source* $\underline{\mathbf{C}}$ *et de but un foncteur de niveau 2 contravariant, il n'y a que 8 représentations naturelles de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}\mathcal{P}$*, qui sont obtenues par conjugaison ou par composition simple avec* ν*, à partir de* π *ou de* ψ *(qui sont elles-mêmes conjuguées). D'autre part, il y* *en a 32 qui ont des composantes monotones, parmi lesquelles il y en a 14 dont les composantes ont des adjoints qui de surcroît sont naturels.*

4. Du niveau 1 au niveau 2 : les cas covariants

Il y a cinq formes covariantes de $\mathcal{P}^2$: $\underline{\exists}^2$, $\underline{\exists\forall}$, $\underline{\forall\exists}$, $\underline{\forall}^2$ et $\underline{\mathbf{C}}^2$; il y a donc en tout $2 \times 5 = 10$ cas à considérer dans l'étude des transformations $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^2$. Nous considérons ici les cas $\underline{\exists} \to \underline{\exists}^2$ et $\underline{\exists} \to \underline{\mathbf{C}}^2$, les autres cas se déduisant par conjugaison ou par composition avec ν.

4.1. Les transformations $\underline{\exists} \to \underline{\exists}^2$

4.1.1. *Nature des transformations*
Soit $\lambda : \underline{\exists} \to \underline{\exists}^2$ une transformation naturelle. Pour chaque $f : X \to Y$ on a

$$\begin{tikzcd} \underline{\exists}X \arrow[r, "\underline{\exists}f"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & \underline{\exists}Y \arrow[d, "\lambda_Y"] \\ \underline{\exists}^2X \arrow[r, "\underline{\exists}^2f"'] & \underline{\exists}^2Y \end{tikzcd} \qquad \underline{\exists}^2 f \lambda_X A = \lambda_Y \underline{\exists} f A \qquad (*)$$

c'est-à-dire $\{f(B) : B \in \lambda_X A\} = \lambda_Y f(A)$. En particulier, si f est une inclusion $X \subset Y$, on a $\lambda_X A = \lambda_Y A$ pour tous les $A \subset X \subset Y$. On en déduit que les valeurs de deux composantes λ_X et λ_Y de λ en un point commun $A \subset X \bigcap Y$ sont les mêmes, i.e. ne dépendent que de A et non pas de l'ensemble contenant A. En particulier, si $A \subset X$, $\lambda_X A = \lambda_A A$. Une transformation naturelle $\lambda : \underline{\exists} \to \underline{\exists}^2$ détermine donc pour chaque ensemble A un sous ensemble BA de $\underline{\exists}A$, à savoir $BA = \lambda_A A$; de plus, si $f : X \to Y$, la commutativité de $(*)$ signifie que $\underline{\exists}f$ induit par restriction une application (surjective) de $BX \to Bf(X) \subset BY$, qui envoie chaque $A \in BX$ sur $f(A) \in Bf(X)$. Une transformation naturelle $\lambda : \underline{\exists} \to \underline{\exists}^2$ définit donc un *sous-foncteur de* $\underline{\exists}$.

Inversement, supposons donné un sous-foncteur B de $\underline{\exists}$, i.e. un choix, pour chaque ensemble X, d'un sous-ensemble BX de $\underline{\exists}X$ tel que pour tout ensemble $A \in BX$ on ait $\underline{\exists}fA \in BY$; on pose alors $BfA = \underline{\exists}fA$:

$$\begin{tikzcd} \underline{\exists}X \arrow[r, "\underline{\exists}f"] & \underline{\exists}Y \\ BX \arrow[u, hook] \arrow[r, "Bf"'] & BY \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad (**)$$

Pour chaque ensemble X, soit $\lambda_X A = BA$. Un calcul immédiat montre que $\lambda = \{\lambda_X\}$ est une transformation naturelle $\underline{\exists} \to \underline{\exists}^2$.

Les sous-foncteurs de $\underline{\exists}$ classifient naturellement les transformations naturelles $\underline{\exists} \to \underline{\exists}^2$.

4.1.2. *Les sous-foncteurs de $\underline{\exists}$*
Un sous-foncteur B de $\underline{\exists}$ est un endofoncteur de **Ens** qui associe à chaque ensemble X un sous-ensemble de BX de $\underline{\exists}X$ de telle manière que les inclusions $BX \subset \underline{\exists}X$ rendent le diagramme (**) commutatif. On a entre autres les sous-foncteurs suivants de $\underline{\exists}$:

$$\begin{array}{lll} \widehat{\emptyset} & : & \text{envoie } X \text{ sur } \emptyset; \\ \underline{\exists}^{--} & : & \text{envoie } X \text{ sur } \{A \in \underline{\exists}X : A \neq \emptyset\}; \\ \underline{\exists}^{-} & : & \text{envoie } X \text{ sur } \emptyset \text{ si } X = \emptyset, \text{ et sur } \underline{\exists}X \text{ si } X \neq \emptyset. \end{array}$$

On observera que pour chaque X on a $\underline{\exists}^{--}X \subset \underline{\exists}^{-}X \subset \underline{\exists}X$, ce que l'on convient de noter $\underline{\exists}^{--} \subset \underline{\exists}^{-} \subset \underline{\exists}$.

La description et la classification de tous les sous-foncteurs de $\underline{\exists}$ reposent sur trois lemmes techniques.

Lemme 1 : *Si $B \neq \widehat{\emptyset}$, alors pour chaque $X \neq \emptyset$, $BX \neq \emptyset$.*

Lemme 2 : *Si $B \neq \widehat{\emptyset}$, et si $\emptyset \neq A \in BX$, alors pour tous les $A' \in BX$ tels que $0 < |A'| \leq |A|$, on a $A' \in BX$.*

Lemme 3 : *Chaque sous-foncteur $B \neq \widehat{\emptyset}$ de $\underline{\exists}$ permet d'associer canoniquement à chaque $X \neq \emptyset$ un cardinal β_X donné par* $\beta_X = \mathrm{Sup}\{|A| : A \in BX\}$ (la borne de X induite par B). *On a (a) si $\beta_Y \leq |X|$, alors $\beta_Y \leq \beta_X$; (b) si $|Y| < \beta_X$, alors $\beta_Y = |Y|$.*

Un sous-foncteur de $\underline{\exists}$ est dit *cardinalement borné* s'il existe un cardinal β tel que pour chaque ensemble X et pour chaque $A \in BX, |A| \leq \beta$. Si B est borné, les bornes induites par β sont aussi bornées, et inversement, si les β_X forment une classe bornée, B est borné car $B\emptyset$ est soit $\emptyset$, soit $\{\emptyset\}$. La *borne cardinale de B* est alors définie par

$$\mathrm{Inf}\{\beta : \forall X, \forall A \in BX, |A| \leq \beta\}.$$

PROPOSITION 5. *Les sous-foncteurs non cardinalement bornés de $\underline{\exists}$ sont $\underline{\exists}^{--}$, $\underline{\exists}^{-}$ et $\underline{\exists}$.*

Pour décrire les sous-foncteurs *bornés* de $\underline{\exists}$, nous utiliserons la notation suivante:

$$\begin{array}{lll} \underline{\exists}_{<\alpha}X & = & \{A \in \underline{\exists}X : |A| < \alpha\} \\ \underline{\exists}^{-}_{<\alpha}X & = & \begin{cases} \emptyset & \text{si } X = \emptyset \\ \underline{\exists}_{<\alpha}X & \text{si } X \neq \emptyset \end{cases} \\ \underline{\exists}^{--}_{<\alpha}X & = & \{A \in \underline{\exists}X : A \neq \emptyset \text{ et } |A| < \alpha\} \end{array}$$

De la même manière, on définit $\underline{\exists}_{\leq\alpha}$, $\underline{\exists}^{-}_{\leq\alpha}$ et $\underline{\exists}^{--}_{\leq\alpha}$ en remplaçant "$<$" par "$\leq$"; on a clairement $\underline{\exists}^{--}_{<\alpha} \subset \underline{\exists}^{-}_{<\alpha} \subset \underline{\exists}_{<\alpha}$, et $\underline{\exists}^{--}_{\leq\alpha} \subset \underline{\exists}^{-}_{\leq\alpha} \subset \underline{\exists}_{\leq\alpha}$.

PROPOSITION 6.
a) Les sous-foncteurs de $\underline{\exists}$ *cardinalement bornés par 0 sont* $\underline{\exists}^{--}_{\leq 0}$, $\underline{\exists}^{-}_{\leq 0}$, $\underline{\exists}_{\leq 0}$*;*
b) Si α *est un cardinal successeur, les sous-foncteurs de* $\underline{\exists}$ *dont la borne cardinale est* α *sont* $\underline{\exists}^{--}_{\leq\alpha}$, $\underline{\exists}^{-}_{\leq\alpha}$ *et* $\underline{\exists}_{\leq\alpha}$*;*
c) Si α *est un cardinal limite, les sous-foncteurs de* $\underline{\exists}$ *dont la borne cardinale est* α *sont* $\underline{\exists}^{--}_{<\alpha}$, $\underline{\exists}^{-}_{<\alpha}$ *et* $\underline{\exists}_{<\alpha}$ *d'une part, et* $\underline{\exists}^{--}_{\leq\alpha}$, $\underline{\exists}^{-}_{\leq\alpha}$ *et* $\underline{\exists}_{\leq\alpha}$ *d'autre part.*

On notera que:

$$
\begin{aligned}
\underline{\exists}^{--}_{<0} X &= \emptyset \quad (\text{i.e. } \underline{\exists}^{--}_{<0} = \widehat{\emptyset}) \\
\underline{\exists}^{-}_{<0} X &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } X = \emptyset \\ \{\emptyset\} & \text{si } X \neq \emptyset \end{cases} \\
\underline{\exists}_{<0} X &= \{\emptyset\}
\end{aligned}
$$

4.2. Les transformations $\underline{\exists} \to \underline{\mathbf{C}}^2$

PROPOSITION 7. *Comme* $\underline{\mathbf{C}}^{\mathrm{op}} \dashv \underline{\mathbf{C}}$*, on a une bijection naturelle* $\mathrm{Nat}(\underline{\exists}, \underline{\mathbf{C}}^2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Nat}(\underline{\mathbf{C}}, \exists\underline{\mathbf{C}})$. *Il y a donc* (*cf.* Proposition 3) *16 transformations naturelles de* $\underline{\exists}$ *vers* $\underline{\mathbf{C}}^2$.

5. Conclusion

1) Dans la théorie des *univers algébriques* résumée en (??), les opérateurs $\underline{\mathbf{C}}, \pi, \psi, \nu$ ci-dessus sont générateurs, au sens où il est démontré qu'à partir d'eux tous les types de structures du premier ordre sont équationnellement définissables. Ici, nous avons montré qu'ils sont générateurs dans le cas contravariant de toutes les représentations naturelles de $\mathcal{P}X$ dans $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ (proposition 4).

2) L'"algèbre" de toutes les transformations naturelles de $\mathcal{P}X$ dans $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ dans le cas contravariant consiste canoniquement en quatre copies de l'algèbre de Boole atomique libre sur 2 éléments (proposition 3).

3) L'"algèbre" de toutes les transformations naturelles de $\mathcal{P}X$ dans $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ dans le cas covariant consiste essentiellement en, d'une part une copie de l'algèbre de Boole atomique libre sur 2 éléments (proposition 7), et, d'autre part (proposition 5) l'algèbre des cardinaux dans leur usage de délimitateur, explicité ici par la notion de borne (i.e. de sous-foncteur de $\underline{\exists}$) (voir (??)).

References

R. Guitart, *Qu'est-ce que la logique dans une catégorie?*, CTGD, vol XXIII (1982)
R. Guitart, *Théorie des bornes*, Diagrammes, vol I, Paris juillet (1979)