René Guitart
Université de Paris VII
rene.guitart@wanadoo.fr ou guitart@math.jussieu.fr

Sur les places du sujet et de l'objet dans la pulsation mathématique[∞]

> Le maître nous dit un jour : « L'acte de l'inspiration lie et réunit, tout ce qui est convenable s'accomplit tandis qu'on retient le souffle ; l'expiration, elle, délivre et parfait, en triomphant de toute limitation. » Mais nous n'étions pas encore capable de comprendre ce langage.
> E. Herrigel (Bungaku Hakushi), *Le Zen dans l'art chevaleresque du tir à l'arc*, rééd. Dervy, pp. 40-41.

1. PULSATION ET RESPIRATION. La pulsation mathématique[1], c'est ce que chacun accomplit quand il fait des mathématiques, même les plus élémentaires. C'est un « geste de pensée » très spécial, que le mathématicien, comme artisan, sait faire. Cette pulsation consiste paradoxalement en un va-et-vient permanent entre sens et non-sens, entre maîtrise et abandon. C'est une respiration intellectuelle. On sait, dès que l'on s'est mis une fois à faire des mathématiques, qu'il ne s'agit surtout pas seulement de mise en application systématique de règles

---

[∞] *Revue du Centre de recherche en Éducation*, Université Jean Monnet, Saint-Étienne, N°22-23 – Décembre 2002. *Didactique des mathématiques*, numéro coordonné par M. Alain Denis, Publication de l'Université de Saint-Étienne, 2003, p. 49-81.

[1] R. Guitart, *La pulsation mathématique* (rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire), édition L'Harmattan, octobre 1999, 336 p.

logiques, et que la vraie rigueur consiste aussi à ne pas tout dire ou montrer, chose qui du reste serait radicalement impossible. Comme l'acte mathématique est un rapport vivant[2] au logique, il s'agit bien à un moment de s'engager, et donc, de se dégager. La pulsation tient à ce paradoxe-là[3].

Si l'on doit aborder un problème mathématique, il faut s'y mettre dans cet état d'esprit, *détendu* vers la compréhension la plus profonde. Comme pour le photographe qui organise la révélation dans le développement, comme dans la peinture aussi, une part de l'art consiste à savoir s'arrêter dans le raffinement, pour ne pas finir par cacher ce que l'on voyait. Il ne faut pas mettre le doigt trop près de ce que l'on veut montrer, cela le masquerait ; ni trop loin, car nous sommes tous un peu chat et regarderions le doigt au lieu de la lune. Il s'agit de saisir un équilibre, une harmonie, et ce n'est pas une épreuve de force. La force de l'esprit en jeu alors consiste à savoir éviter l'affrontement abrupt, et à savoir aussi promouvoir l'affrontement quand l'heure en semble venue. On ne respire pas pareil en dos, en crawl, ou en apnée. Le nageur est celui qui sait respirer dans l'eau, comme il convient aux circonstances, et comme il convient à sa volonté secondaire de se mouvoir vers un but. Le cours de mathématique devrait instruire au moins de cela, pour commencer.

2. UN BOUGE PERMANENT DU SUJET QUI S'Y MET. Comme le souligne justement Marc Legrand[4] commentant *La Pulsation Mathématique* considérée comme poursuite du projet cartésien : « faire des mathématiques, c'est prendre le risque de faire de son non-doute le

---

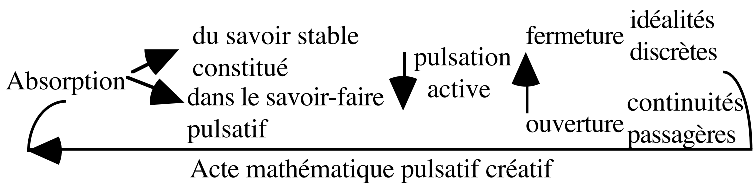
[2] Et « vivant » ne veux pas dire « approximatif » ou encore « empirique ». Le point ici est qu'il n'y a pas de mathématique sans un sujet-mathématicien. L'instruction mathématique vise mieux quand elle veut rendre capable de devenir un tel sujet, plutôt que quand elle « vend » les produits tout faits.

[3] Il est clair que cette pulsation va au-delà du strictement mathématique, ce qui a été exploré par un Séminaire au CIPh de janvier à mai 1998, dirigé par E. Barbin et R. Guitart, intitulé *: La pulsation spéculative du philosophe et du mathématicien*. Mais comme, pour l'entendre, il s'agit à chaque fois de la rapporter à un artisanat de pensée spécifique que l'on pratique effectivement, nous préférons ici nous limiter au champ mathématique seul.

[4] M. Legrand, *Notes de lecture : La Pulsation Mathématique*, Repères-IREM n°39, avril 2000, pp. 69-72.

synonyme de vérité ». Et c'est là une proposition de liberté de penser, pour tous, comme l'entendent en effet Marc Legrand ou Henri Bareil[5].

On a[6] la bifurcation constitutive du « risque » à prendre entre savoir et savoir-faire, par quoi "savoir = savoir-faire" :



Chaque individu peut essayer de s'y mettre, de s'engager sur le chemin de l'évidence mathématico-cartésienne, ainsi : en misant ses non-doutes[7], à fond, dans la machine des articulations logiques, géométriques et calculatoires, et aussi, en même temps, en gardant la possibilité d'un retrait de cette mise, d'un dégagement nécessaire des déterminations, révocables. Il faut pourvoir penser dans l'ouvert au-delà de la règle fermée en cours. Soyons clair et net : celui qui n'a jamais essayé ça, qui ne l'a jamais fait, ne sais rien du fait mathématique[8]. C'est donc, à nos yeux, le pivot central d'une bonne instruction mathématique. Et c'est à la fois le pivot « moral » et le pivot « technique » : sans lui rien ne vaut, sans lui rien n'est possible.

Avec ses « connaissances », le mathématicien au travail se plaît dans la mobilité entre ses cadres de pensée familiers massifs :

[5] H. Bareil, *Matériaux pour une documentation : La Pulsation Mathématique*, Bulletin de l'APMEP N°427, avril 2000, pp. 264-266.

[6] R. Guitart, *La pulsation mathématique*, op. cit., p. 79.

[7] Ce qui ne signifie nullement « remiser ou écarter ses doutes ».

[8] Que nul ne parle des mathématiques s'il n'a jamais calculé effectivement et s'il n'a jamais aussi réussi à éviter de calculer. Dans cette affaire, le fait que les calculs en question soit des supputations logiques, des manipulations algébriques, ou des constructions géométriques, n'a qu'une importance secondaire. L'important est en effet la réalisation d'un rapport complet du sujet-mathématicien aux petits cailloux, autrement dit à la littéralité primitive. Ceux qui préfèrent unilatéralement les enchaînements d'idées aux calculs sont bien intentionnés, puisqu'ils veulent plutôt être intelligent que bête, mais se trompent sur la nature du calcul, qu'ils pensent hors de la pensée conceptuelle, comme de la pensée conceptuelle, qu'ils imaginent pure de tout calcul. En fait c'est bien de clair-obscur nécessaire qu'il s'agit, entre le calcul aveugle et la conception claire. Ici encore se niche la pulsation.

arithmétique, géométrie, mécanique, optique, etc., voire entre des « massifs » plus sophistiqués[9], et il peut même faire de cette mobilité le centre de sa recherche[10] ; il demeure aussi souvent dans l'écart entre des registres notionnels comme nombre et forme, fini et infini, discret et continu, etc. Il reste ainsi disponible pour, simultanément, distinguer *et* confondre deux idées, comme, par exemple, l'idée de droite et l'idée de cercle, ou encore l'idée de nombre et l'idée de lettre[11]. Confusions nécessaires à son activité. Il est question, pour le mathématicien, non pas d'éliminer a priori l'équivoque, mais de savoir rigoureusement vivre dans une certaine ambiguïté, voire de l'entretenir.

3. OU EST L'OBJET ? Il est toujours difficile de tenir fermement un « objet mathématique » comme « un », et il est même tout à fait profitable de le cerner sous divers aspects, sans chercher immédiatement « le » bon point de vue.

À vrai dire qu'il y ait de l' « objet mathématique », comme on peut parler d'objet dans une science, ou a fortiori comme on peut parler d'objets du monde, cela reste assez problématique. Parce que, si l'on ne doute pas qu'il y ait des événements mathématiques, en particuliers des points d'abréviation, il ne va pas de soi que dernières ces événements bien réels se tapissent des choses réelles aussi, stables et fixables, qui seraient donc ces fameux objets rendant compte des événements. On

---

[9] Notons par exemple la manière dont André Weil explique, dans sa lettre à sa sœur Simone du 26 mars 1940, comment son travail consiste un peu à *déchiffrer un texte trilingue*, dont il n'a que des fragments décousus, où il ne possède qu'une maîtrise partielle des langues en jeu, et où certainement gisent des différences, mais dont rien ne l'averti d'avance. Il œuvre ainsi à un « dictionnaire » entre la théorie des fonctions algébriques d'une variable, la théorie des corps de nombres, et la théorie des corps de fonctions algébriques sur les corps de constantes finis.

[10] Comme dans le cas de Weil que nous venons de citer, ou bien comme aujourd'hui le catégoricien qui construit des *équivalences de catégories*, expressions mathématiques précises de changements organisés de mondes mathématiques. On peut voir de tels résultats comme des manières de saisir mathématiquement quelque chose de la pulsation, ou bien, ce qui revient au même, comme des analyses mathématiques du vrai travail mathématique. Ce qui n'empêche évidemment pas le catégoricien d'être, au niveau de son propre travail, « en proie » à la pulsation.

[11] Ces deux exemples sont développés très en détails dans *La Pulsation Mathématique*, op. cit.

pensera plutôt qu'il n'est d'objet que pulsatif, bougé, infixable de façon absolue, quoique répondant d'une fonction de semblant essentielle, puisque c'est à travers ces soi-disant objets, ces fantômes pour nommer, que l'on tient, un peu, partiellement toujours, les événements mathématiques, que l'on en écrit quelque chose. À ce point, la « demande d'objet » est comme une faute de frappe, une distraction, qui vaut simplement pour demande de passage à l'acte mathématique. Parce que ces objets, contrairement aux objets du monde en principe, sont inséparables de notre capacité à les manier, restent plastiques à la saisie par notre entendement.

Et on est beaucoup plus sûr du fait qu'il y ait du sujet, du « sujet-mathématicien » exactement, parce que nous savons que nous faisons du mathématique, et nous croyons être l'acteur de nos actes. Ce qui est largement aussi une illusion, utile. Ce n'est pas du sujet social « le mathématicien » dont nous parlons ici, mais tout juste de celui-ci qui est en train de faire des mathématiques, saisi vif au point de son acte, de son invention du vrai, indistinguable précisément de l'événement mathématique qui le noue au semblant d'objet, qui tient ensemble le bougé de l'objet et celui du sujet. Ce sujet-là intéresse bel et bien le mathématicien, celui qui ne veut entendre parler que de mathématiques, puisque, in fine, c'est la même chose.

Du point de vue pulsatif, il est donc par principe difficile de « croire » à l'objet, et au sujet aussi, tant, dans la pulsation, leurs considérations se tiennent, et l'importance de leur distinction s'oublie. Mais précisément, contre cette manière de voir, qui est la nôtre et que nous partageons, nous allons ici tenter cependant de réintroduire « du sujet » et « de l'objet ». Ce qui ne sera pas sans effet pour conclure.

Le mathématicien sait clairement[12] qu' « on ne saurait avoir trop de moyens différents de décrire une même courbe, parce que chacun exprime une propriété caractéristique de la courbe, d'où dérivent naturellement plusieurs autres propriétés, qui n'apparaissent pas aussi aisément dans les autres modes de description ». Un exemple frappant est le cas de l'ovale de Descartes, dont on peut examiner l'histoire

[12] M. Chasles, *Aperçu historique*, p. 351.

suivant le point de vue de la pulsation[13]. Il est clair déjà que Descartes avait une double conception des courbes, comme équation ou comme mouvement bien réglé. Il introduit les ovales comme solution d'un problème de réfraction, il en fournit les équations, et il les construit par un mouvement. Au 19ème siècle l'objet ovale va « visiter » divers champs : optique « à la Huygens » des caustiques secondaires, géométrie « grecque » des corps simples et intersections de cônes, construction des systèmes articulés. C'est bien du fait de cette circulation que la pensée de l'ovale se constitue, tient sa « substance significative ». Celui qui connaît les détails de cette histoire de l'ovale ne peut plus jamais penser aux coniques comme il le faisait avant, tant le jeu des coniques s'est naturellement pour lui réouvert et inséré dans la problématique plus vaste des ovales et des cycliques ; il sait alors une manière mathématiquement significative de faire bouger l'idée de conique, de la faire sortir d'elle-même, et ce bougé nous « donne » mieux encore ce qu'est une conique.

Cela dit, cette grande pulsation de l'ovale peut bien être « abrégée », c'est-à-dire enfermée dans une formule re-développable, comme par exemple, finalement, celle-ci : une ovale est une courbe dont l'équation est affine en coordonnées bi-polaires, c'est à dire de la forme $ar + bt = c$, où r et t sont les distances du point mobile à deux points fixes. En théorie, tout est contenu dans cette détermination. Mais précisément, comprendre le « sens » de l'objet dénoté par « $ar + bt = c$ », et nommé « ovale de Descartes », c'est trouver, éventuellement sous une forme renouvelée, les effets de cet objet que l'histoire a construits.

La pulsation mathématique se repère historiquement tout spécialement depuis de tels points d'abréviation, dans leur passé et leur futur. Laissons par exemple le lecteur réfléchir dans cette perspective au Théorème Fondamental de l'Algèbre (TFA) : qu'est-ce qui s'y abrège, qu'est-ce qui en resurgit ? Ici toute une généalogie « pulsative » est à construire. Le TFA est un « objet mathématique », mis en cause par son passé, enclenché dans son futur, à cheval sur l'instant de son invention.

---

[13] E. Barbin et R. Guitart, La pulsation entre les conceptions optiques, algébriques, articulées et projectives, des ovales cartésiennes in *L'océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes, Saint-Denis de La Réunion, 3-7 novembre 1997*, IUFM de La Réunion, décembre 1998, pp.359-394.

Si l'on y perçoit le passé d'essais avec les nombres sourds, imaginaires, et autres impossibles, vis-à-vis desquels il est « résolutif », et si l'on voit comment il permet une relance systématique quoiqu'ouverte vers des algèbres plus vastes de Hamilton et Clifford notamment, alors il fait bien « pont ». Si on le voit ainsi comme pont, on peut le répéter autrement, non pas à la lettre, mais en son esprit, et il reste une ressource inventive. Sinon on ne peut que l' « appliquer mécaniquement » ; à la pauvreté d'esprit, qu'il n'est pas nécessaire d'encourager, cet usage mécanique suffit, à la force de l'esprit il reste indispensable.

4. LA SAISIE IMPOSSIBLE. Dans ces cas, de l'ovale ou du TFA, on croit pouvoir dire qu'en effet, historiquement il y a eu un « bougé créateur », mais que, après tout, l'abréviation[14], soit l'équation de l'ovale ou l'énoncé du TFA, suffit cependant maintenant pour conclure, comme « contenu objectif ». Nous ne le pensons pas, mais nous ne voulons pas plus en discuter maintenant. Par contre il existe d'autres situations où, au quotidien, le « bougé bien assumé » est évidemment indispensable, où le savoir-faire avec l'indétermination est vital pour pouvoir travailler. Et ce savoir-faire, ce savoir tenir et savoir lâcher, doit être irréfléchi[15].

On a vu dans *La Pulsation Mathématique* plusieurs cas élémentaires de « bougé nécessaire », et notamment le cas de l'interprétation de l'égalité, laquelle, pour fonctionner, voit varier son sens. C'est le cas aussi de toutes les situations où l'on doit manier des

---

[14] En lieu et place du terme « objet mathématique » il est souvent préférable de parler d' « abréviation » pointée comme écriture univoque, et en reconnaissant à l'abréviation sa spécificité pour l'acte, à savoir que *l'abréviation métamorphose l'équivoque*, cf. *Évidence et étrangeté*, op. cit., pp. 161-169.

[15] E. Herrigel, dans *Le Zen dans l'art chevaleresque du tir à l'arc*, op. cit, écrit : « Le Maître répliqua : « Il faut que vous teniez la corde tendue comme un enfant tient le doigt qu'on lui offre. Il le tient si fermement serré qu'on ne cesse de s'émerveiller de la force d'un point si menu. Et quand il lache le doigt, il le fait sans la plus légère secousse. Savez-vous pourquoi ? … Parce que l'enfant ne pense pas, par exemple : maintenant je vais lâcher ce doigt pour saisir cette autre chose … C'est bien plutôt sans réflexion et à son insu qu'il passe de l'un à l'autre, et il faudrait dire qu'il joue avec les choses, s'il n'était aussi exact de penser que les choses jouent avec lui. ». » Notons aussi que quelque chose du jeu de for-da intervient dans cette alternative du « tenir et lâcher » ; quelque chose que l'on peut rapporter à l'évidence et l'étrangeté, à la sexuation.

classes d'équivalences par l'intermédiaire de représentants : on sait alors que chaque représentant n'est pas exactement ce que l'on veut, ne l'est qu'à condition d'un protocole bien réglé d'oubli de ce qui en lui est non-pertinent dans la situation.

Il est, du côté des classes d'équivalences, des cas pervers, où l'existence de représentants canoniques naturels laisse oublier la mobilité entre les représentants par du travail substitutif qui est alors littéralement ce par quoi une certaine pulsation se manifeste. Ainsi, par exemple, nous avons le cas des polynômes. Le calcul des transformations d'un polynôme en l'infinité des expressions équivalentes est une part de pulsation en acte. La perversité de la situation est alors qu'on ne réalise plus vraiment que chaque expression est encore vraiment, en elle-même, une présentation légitime d'un polynôme ; ce point est, à juste titre, avancé et soutenu par Joachim Lambek. Avec lui nous définissons donc un polynôme comme la classe de ré-écriture d'une expression formée avec les indéterminées, des constantes déterminées, et les signes + et ×. L'existence d'un représentant canonique n'est pas la définition, mais un théorème. Dans cet exemple, l'assimilation du polynôme à la forme canonique permet de « saisir » pour nommer, et, partiellement, cet avantage même empêche l'auto-modification de l'objet « polynôme » pour en connaître tous les avatars. Bien sûr on fait quand même lesdites modifications, mais elles ne sont plus attribuées à l'objet. Tout bien considéré, il est difficile de cerner univoquement ce que l'on entend par l' « objet mathématique » nommé « polynôme » : on dispose d'un complexe de plusieurs procédures définitoires précises équivalentes mais non identiques. Il convient, au plan de l'habileté mathématique opératoire comme au plan de la claire conception de ce que l'on pense, d'en rester là, d'en rester à ce complexe.

Notons aussi les cas où, par certaines identifications arbitraires on peut ne plus savoir des différences réelles et calculer juste quand même, comme dans le cas où, une structure euclidienne étant fixée dans l'espace, on n'a plus besoin de distinguer entre les vecteurs et les co-vecteurs ; l'intérêt réel pulsatif de la situation est de pouvoir réellement oublier cette distinction, quitte à devoir plus loin la reconstruire. De tels cas valent presqu'uniquement du côté nécessaire à l'habileté.

Dans cet ordre d'idées de « la saisie impossible nécessaire », un bel exemple, plus avancé, est ce que propose Laurent Mazliak[16] à propos des probabilités. C'est de considérer « la notion active de loi d'une variable aléatoire » comme point d'où l'on conçoit la pulsation probabiliste. Cette fois l'enjeu est l'appropriation par l'apprenti de la « dynamique de transport du hasard », ce hasard réel largement inaccessible, sur l'ensemble restreint des phénomènes en observations. Disons qu'il s'agit, pour un réel aléatoire X défini sur Ω, de travailler entre le « vrai » Ω complet, inaccessible, et la trace la plus réduite du caractère aléatoire de X, à savoir sa loi. Le point essentiel est qu'il y a là un véritable travail de variation et d'oubli de Ω, et pourtant il faut aussi y revenir. Nous partageons la conception de Mazliak suivant laquelle l'enseignement des probabilités ne devrait pas faire l'économie de cette pulsation.

5. LA VARIATION RIGOUREUSE DE L'INTUITION ET L'INVENTION DU VRAI. Le mathématicien au travail change incessamment de points de vue et de formulations, voire suspend la question des points de vue et formulations. La mathématique est un art indirect du vrai, comme le soulignait A. Comte ; nous dirons un art où l'on tourne autour de la cible éventuelle, où l'on fait flèche de toute intuition. Autrement dit, les savoirs acquis peuvent bien être le plus parfaitement « fermés » dans leur expression formelle prétendument « achevée » — et à un certain titre c'est effectivement indispensable — et pourtant, en même temps, ils doivent aussi être ouverts à leur propre changement au cours de tout acte mathématique à venir. Et cela, qui vaut en grand comme en petit, va jusqu'au paradoxal de devoir soutenir «implicitement à chaque instant » l'équivoque entre sens et non-sens. Dans le travail mathématique, du « vrai » sens est repéré, et cependant ce sens est aussi du « semblant ». C'est enfantin, il s'agit de *jouer vraiment pour de faux*[17], car ce jeu-là

[16] L. Mazliak, *Sur la pulsation probabiliste*, à paraître au bulletin de l'*APMEP*.

[17] Ce à quoi on sait que les autistes ont quelque difficulté. Ce que les autres font assez aisément dans leur usage de la langue : pourquoi ne leur indiquerait-on pas qu'il en va de même dans l'élaboration mathématique ? Que, dans la recherche mathématique comme quand on parle, on ne sait pas forcément ce qu'on pense et ce qu'on va dire avant de l'avoir dit ?

constitue la vérité réelle de la pensée hypothético-spéculative, ce à quoi l'esprit du mathématicien se confronte. Il est question alors de prendre cette paradoxalité pour la matière essentielle du savoir-faire mathématique. Comme le menuisier possède un coup de rabot, comme le cycliste tient sur son engin, le mathématicien sait surfer sur la rigueur formelle : c'est là la vraie rigueur.

Pour faire des mathématiques, il faut, d'une part, savoir très exactement faire ce que l'on fait et ne rien avoir à savoir de son sens, quand on est tourné vers l'exécution de l'acte ; et, simultanément, il faut, d'autre part, exactement la disposition inverse, c'est-à-dire savoir voir le sens et cependant n'exiger aucune intervention subséquente, quand on veut connaître la portée de l'acte. Cette pulsation entre exécution et portée, entre agir et connaître, proposition et connaissance, est une évidence très générale ; elle est cruciale dans le cas de la mathématique inventive, même la plus simple.

Généralement cette pulsation est omise, ou bien portée au crédit du savoir-faire du seul vrai théoricien professionnel : la mathématique étant considérée comme l'élément de rigueur formelle dans le travail humain d'organisation univoque, on suppose à tort que l'invention mathématique est automatique, ou même n'existe pas réellement ; on considère alors qu'il s'agit de développer et d'appliquer des protocoles. On en déduit parfois que l'apprentissage des mathématiques doit d'abord être l'entraînement à l'exécution d'ordre, et l'enregistrement d'un état convenu de ce qui compte dans la mathématique vue comme outil d'exploitation du monde.

Que des éléments d'automatismes soient à acquérir, cela va de soit ; mais cette acquisition ne vaut rien si elle n'est pas dans l'esprit de la pensée mathématique elle-même, si elle ne participe pas de l'instruction à l'art du « touché » et du « bougé » dans le champ même de ces automatismes. On peut comparer à l'instruction pianistique. Il s'agit bien d'apprendre des règles, et, aussi, d'apprendre qu'il est possible de les transgresser, de les faire bouger ; ce « bougé » n'est pas n'importe quoi, bien qu'on ne puisse exactement en énoncer les règles : c'est un acte, il faut s'y mettre.

En fait, on ne peut faire des mathématiques sans vouloir vraiment savoir « le vrai », sans *s'y mettre* effectivement, personnellement, sans agir donc, et risquer quelque chose au point de la pensée. Il est question encore d'entrer dans la paradoxalité élémentaire de l'agir qui est là, pour tous, depuis toujours, en jeu dès le début.

Quand il faut sortir des savoirs connus répertoriés et des sentiers battus balisés, quand il faut inventer au-delà des conceptions et gestes acquis, la ressource nécessaire est encore cette pulsation, par laquelle on fixe pour toujours du nouveau « sens », et, en même temps cependant, ce « pour toujours » reste révocable. La fixation et le retrait du sens restent en tension, cela pulse. Savoir faire cette pulsation, qui est un geste de pensée, savoir bouger dans le jeu infime qui reste toujours dans la cohérence, et aussi bien savoir s'arrêter devant un grand espace trop évidemment ouvert, c'est là le vrai enjeu de la rigueur, qui vit sur cette ambiguïté constitutive. La vraie rigueur, vivante et productive, est celle qui vise le *tombé-pile d'une écriture sur une intuition*, et non pas celle qui vise la formulation formelle impeccable uniquement pour elle-même.

Le savoir-faire mathématique tient à la « maîtrise » de cette rigueur vivante, ce qui reste éminemment paradoxal, puisque cette « maîtrise » de la rigueur consiste à savoir maintenir une certaine non-maîtrise, la tension pulsative entre sens et non-sens. Ce qui demande, au plan intellectuel, la même qualité que pour le tir à l'arc : savoir inspirer, fermer une prise assurée qui tienne, et expirer, ouvrir le tir de la flèche au risque d'un parcours.

Le point crucial est d'*inventer ce que l'on pense*[18], quand bien même ce qui est ainsi pensé ne serait pas nouveau ni difficile ; on peut même aller jusqu'à faire semblant d'inventer pour inventer, car même pour ce qui est « acquis », il importe toujours de le refaire[19]. En fait, en

---

[18] Cette invention est le contraire de l' « expression libre » romantique des affects que l'on éprouve. C'est au contraire le moment d'un effacement du sujet accueillant l'objet improbable. C'est la découverte, que l'on entreprend.

[19] Comme nous l'indique Marie Jacob, l'abbé Deidier, professeur à l'école militaire de la Fère écrivait, *dans La science de géomètre ou la théorie et la pratique de la géométrie*, Paris, 1739 : « Quant à la façon d'étudier cet ouvrage, il faut d'abord s'attacher à bien concevoir chaque proposition et sa démonstration ; après quoi fermant le livre on tracera une figure semblable à celle qui convient au sujet et changeant les lettres qui en marquent les grandeurs et la position des lignes et des angles selon que le permettra l'état de la question on tâchera de le démontrer soi-même comme si on avait à le démontrer à quelqu'un d'autre ».

un sens, il faut toujours sortir des sentiers battus, ou bien être près à le faire, il faut toujours emprunter les chemins les plus connus comme si c'était la première fois. Connaître le chemin n'est pas arpenter le chemin. Inventer donc, par sa propre marche[20] ; c'est-à-dire entendre et découvrir ce qui veut bien nous parler.

6. HERITAGE ET ARTISANAT DE PENSEES. Bien sûr il n'est de pensée inventive que tournée vers un passé spécifique, et pour le travail mathématique cela suppose que, en même temps que l'on apprendra à imaginer, supputer, hésiter, biffer, etc., on le fera en appui sur des « connaissances par cœur », et sur des problématiques héritées. Ce point étant bien précisé, nous poserons qu'il n'intéresse personne de faire des mathématiques non-inventives, qu'il est néfaste de faire croire ou de promouvoir le contraire. Ici encore on note ce lieu paradoxal nécessaire, entre l'héritage et l'invention, la pointe de pensée où il faut se placer. La place du sujet-mathématicien au travail est fendue de cette tension.

Georges Monti[21] a montré que *La Pulsation mathématique*, suit cinq séries qu'il propose : 1. Le geste de s'y mettre. 2. La force et la prise de risque. 3. Liberté et fragilité. 4. L'objet de la discipline. 5. La totalité et la permanence. D'où nous tirons, par exemple, la série : Intervention = Vertu = Ouverture = But = Un.

Il a attiré l'attention sur la relation entre ce développement et la réaffirmation de trois thèses communes à trois auteurs confrontés en leur temps au même problème à savoir Hegel, Nietzsche, Saint Thomas d'Aquin : l'acte, l'habitus, l'objet de la discipline. Soit un triangle Habitus-Acte-Objet de la discipline comme lieu de posture du sujet « face à la discipline ». Comprenons que dans sa « visée ouverte » de l'objet, le sujet doit être dans la disposition : Habitus = Acte = Objet de la discipline. D'où nous tirons la série : Tradition = Acte = But.

---

[20] « Enfants qui inventés, comme vous serez giflés ! » (Philippe Jaccottet, *La semaison*, Gallimard, 1984, p. 89).

[21] G. Monti, *Ma lecture de La Pulsation Mathématique*, février 2000, lettre à René Guitart.

Et notamment Monti rappelle ceci de Nietzsche[22] : « Je ne me ferai comprendre de mes auditeurs que s'ils devinent immédiatement ce qui n'a pu n'être qu'indiqué, s'ils suppléent ce qu'il a fallu taire et si, d'une manière générale, ils ont seulement besoin qu'on leur rappelle ce qu'ils savent et non qu'on leur enseigne du nouveau […] Le lecteur dont j'attends quelque chose doit avoir trois qualités: il doit être calme et lire sans hâte, il ne doit pas toujours s'interposer, lui et sa « culture », il ne doit pas enfin attendre pour finir un tableau de résultats ». Il est question là, et suivant les cinq fils, d'un trio : Calme-Effacement-Distraction. Ainsi, à la posture du sujet « face à la discipline », fait écho une posture « psychologique » du même sujet. Comprenons qu'en lui-même, dans sa « non-visée » vers l'objet, le sujet doit être dans la disposition : Calme = Effacement = Distraction.

Le sujet est donc ainsi divisé, strié en séries de postures partielles nécessaires pour entendre ou écrire son mouvement pulsatif, comme I-V-O-B-U, ou T-A-B, ou encore C-E-D.

Jean-Yves Degos[23], quant à lui, rapproche certaines indications de *La Pulsation Mathématique* avec des observations faites par Glenn Gould. Notamment Glenn Gould[24] dit : « Le mauvais tournant a été pris au dix-huitième siècle : compositeur, interprète et auditeur se sont trouvés séparés, isolés. J'aimerais les voir à nouveau réunis » : posture du musicien face à la musique.

Pour Degos cette philosophie : Compositeur = Interprète = Auditeur, est l'occasion d'un rapprochement avec ce qui est posé dans *La Pulsation Mathématique*[25], à savoir : Mathématicien = Professeur = Élève, que nous donnions comme l'une des branches indispensables de la bifurcation de l'acte mathématique :

acte mathématique → savoir-faire : instruction : P=M=E
acte mathématique → savoir institué : éducation : P, M et E distincts

---

[22] F. Nietzsche, *Sur l'avenir de nos établissements d'enseignement*, 1872.
[23] J.-Y. Degos, *Piano et Guitart*, courrier à Évelyne Barbin, février 2002.
[24] G. Gould, *Fragments d'un portrait, film de Bruno Monsaingeon, Soirée Théma, Arte,* 1992.
[25] *La Pulsation Mathématrique*, op. cit., p. 286 et p. 290.

Et il propose de concevoir les deux propositions comme cas particulier de celle-ci qu'il avance : Comprendre = Instruire = Apprendre.

Le rapprochement et l'extension conviennent, précisément parce que l'enjeu central est le même, celui d'une conception artisanale du travail de pensée.

Cependant, nous préfèrerons, ici où il va être question de la place du sujet dans la pulsation, substituer, dans le trio de Degos, « Concevoir » à « Comprendre »[26], et nous considérerons le trio : Concevoir = Instruire = Apprendre.

Ici nous retenons donc encore une striure du sujet, par la série C-I-A.

Ces observations de Monti et de Degos, ces séries, soulignent la question de la place du sujet-artisan-de-pensées dans la pulsation. Il s'agit alors d'examiner les emboîtements possibles les uns dans les autres de séries diverses comme celles indiqués, et d'identifications entre leurs termes cependant distincts. La pulsation tient à la vivacité du mouvement du sujet entre ces places.

7. PLACE DU SUJET DANS LA PULSATION. Il n'est de possibilité d'apprendre la mathématique que dans le plaisir, il n'est de plaisir avec les mathématiques que d'en faire, et il n'est de plaisir dans l'acte mathématique que du fait d'en traverser le champ à pied, déterminé et avec toutefois une légère hésitation, pour bien jouir du paysage que notre promenade invente. À la manière pulsative.

Citons à ce sujet Weil[27] : « vers 1820, les mathématiciens se laissaient, avec angoisse et délices, guider par l'analogie entre la division du cercle (problème de Gauss) et la division des fonctions elliptiques. Aujourd'hui […] nous avons la théorie des extensions abéliennes. Finie l'analogie : finies les deux théories, finis ces troubles et délicieux reflets de l'une à l'autre, ces caresses furtives, ces brouilles inexplicables ; nous n'avons plus, hélas, qu'une seule théorie, dont la beauté majestueuse ne saurait nous émouvoir […] Le plaisir vient de l'illusion et du trouble des sens ; partie l'illusion, obtenue la connaissance, on atteint l'indifférence

[26] D'ailleurs « compositeur » est plus proche de « concevoir » que de « comprendre ».

[27] A.Weil, lettre à sa sœur Simone Weil, du 26 mars 1940,

en même temps ; il y a du moins là-dessus, dans la Gîtâ, un tas de çlokas plus définitifs les uns que les autres ». Voilà le point que nous poserons maintenant : il ne sert à rien d'apprendre sans plaisir de faire, et, dans le cas des mathématiques, ce plaisir gît dans la pulsation, l'exacte illusion de la différence, du même, là où on agit ; et c'est cette illusion que l'on travaille.

Nous avons indiqué[28], nous n'y reviendrons pas ici, comment les points les plus élémentaires de l'activité mathématique relèvent de ce constat du geste pulsatif dans l'entendement du mathématicien, petit ou grand, quand il est au travail. Cela est détaillé notamment à propos de la question de l'utilisation des lettres, de l'acte de calcul, de la place de l'égalité et de l'équivalence, des introductions des notions de nombres et figures, de limites et d'approximations, à propos de l'inséparabilité de l'algèbre et de la géométrie, à propos du traitement mathématique des paradoxes.

Soit donc, d'abord, ce plaisir, petit et grand, de faire la mathématique, en prise directe sur la manière de la faire, pulsative donc. Soit aussi, autour de ce plaisir, ce que nous avons avancé jusqu'ici : il est question de savoir respirer, d'être disposé à un bougé nécessaire de soi-même, de douter de la présence de l'objet mathématique, ou du moins de sa saisie, de savoir effectivement l'impossible de tout écrire, et surtout le danger d'écrire trop, de constituer la variation de l'intuition, ou de penser l'intuition comme multiple, de croire à l'invention du vrai, de circuler dans diverses places que l'artisanat semble offrir, et en les tenant toutes ensembles. Ces traits dessinent un sujet-mathématicien pensif, introverti sur le monde mathématique (sic). Comprendre comment on peut faire des mathématiques passe par la compréhension de ce sujet-là ou d'un sujet avoisinant. Une telle compréhension, qui maîtriserait en pensée l'acte de la pulsation, est, rigoureusement parlant, impossible, et contradictoire. On peut seulement s'y essayer, décomposer quelque trait de l'acte pulsatif, dont la donation en s'y mettant est infiniment supérieure à toute analyse, irremplaçable. La compréhension ici, via des analyses faisant la part entre des postures de sujet et d'objet, pourrait même être dangereuse, si on finissait par y croire positivement. En l'affaire, comprendre analytiquement c'est comme comprendre

[28] R. Guitart, *La pulsation mathématique*, op. cit..

analytiquement le mouvement, ce n'est pas sans intérêt, mais, dans le fond, ce n'est qu'un protocole littéral pour reporter la question.

Notamment, il faudrait pouvoir rendre compte de la logique paradoxale du sujet-mathématicien au niveau de son comportement, rendre compte de la façon dont en lui, en acte et en pensée, s'accordent la logique du déterminé et l'acte ouvert. Nous avons commencé ailleurs[29] à décrire un petit peu de cette logique, en termes de l'*assimilation*. Question donc d'une logique du sujet pulsatif.

Nous avons examiné[30] aussi très en détail ce qui peut, éventuellement, être considéré comme une « explication » du fait de la pulsation. Il s'agit de concevoir que la bifurcation permanente dans la pensée qui sollicite la pulsation, la pulsion motrice de la pulsation, provient d'une sorte de faille et de croisement constitutif de la conscience entre l'évidence et l'étrangeté (das Unheimliche), où la vérité « en connaissance » et la vérité « en acte » se tiennent, dans un curieux chiasme. Le fond est bien de penser, par dessus la faille, le même et l'autre ensemble. Ou bien encore, le sujet qui pense vraiment ne peut qu'être divisé par cette faille, et ce qu'il pense d'abord toujours quand il pense est précisément cette faille. Le moteur de la pulsation spéculative serait la pulsation entre l'évidence et l'étrangeté.

L'hypothèse avancée est soutenue par deux faits.

Le premier fait, historique, est l'isomorphie entre ce que Descartes dit, paradoxalement, de l'évidence et ce que Freud dit, paradoxalement, de l'Unheimliche. Sans entrer dans le détail, soulignons que justement, pour Descartes, c'est une décision philosophique de faire de son non-doute le synonyme de vérité, c'est-à-dire de faire de l'évidence dans l'entendement le critère de vérité. L'acte mathématique tient sa solidité depuis cette garantie-là. En effet, c'est d'une coupure décidée d'avec l'étrangeté, que cela tient. Freud au contraire, s'interroge sur le « ça n'est pas ça encore» ou le « c'est toujours la même chose qui revient », sur la répétition donc, inutile à l'évidence, et c'est une

[29] R. Guitart, L'assimilation et l'excès de l'acte sur le logique, in *Forme & mesure. Cercle Polianov : pour Jacques Roubaud/mélanges*. Mesura 49, juin 2001, pp. 209-227.

[30] R. Guitart, *Évidence et étrangeté*, Mathématique, psychanalyse, Descartes et Freud, PUF, 2000.

décision philosophique encore, de faire de ce souci un autre synonyme de vérité. L'acte mathématique tient sa vivacité de pouvoir pivoter sur ce gond.

Le second fait est le souci de la littéralité, et la problématique du chiffrage et du déchiffrage : voilà un point commun entre mathématique et psychanalyse. En mathématique, on ne confondra pas cette question de la littéralité avec l'algèbre, qui est un usage de la littéralité comme pont entre le jeu des nombres et celui des figures, ou avec le symbolisme mathématique, qui libère la question de la littéralité de celle du sens. Algèbre et symbolisme sont donc plutôt deux conséquences de la littéralité, qui ne sont pas sans importance au point de la pulsation, là où l'on traverse les cadres et où on lâche un sens pour en reprendre un autre. Mais la question de base est beaucoup plus élémentaire et ancienne. Elle tient en général au fait de l'écriture, de l'inscription, du travail au tableau noir avec la craie, pour figurer, nommer par des marques, écrire et effacer. Il s'agit de la croyance sans laquelle l'acte mathématique n'aurait pas lieu, à savoir que quand nous tournons le dos un malin génie ne modifie pas ce que nous venons d'écrire ; l'écriture est stable, et, en appui sur cette stabilité, nous observons les modifications que nous lui faisons subir.

Pour nous, la pulsation est d'abord un fait, qu'il ne fallait que relever en examinant vraiment ce que l'on fait quand on fait des mathématiques, fait sur la réalité duquel nous avons rencontré l'accord de tous les mathématiciens. Instruire du savoir-faire avec cette pulsation est donc la priorité, si l'on veut instruire du savoir-faire mathématique et cela permet de sortir des faux enjeux du commerce des idées.

Cependant, le point de vue du sujet était privilégié implicitement dès nos premières études, puisque nous privilégiions l'acte et l'intervention naïve d'un sujet, sur la connaissance et la mise en réserve d'objets. Sans croire beaucoup au réel de l'objet. Puisque la liberté inventive et le plaisir du sujet nous importaient plus que la maintenance de la soi-disante réalité sociale, même si cette maintenance nous était proposée par la médiation des marchandises intellectuelles. Certes. Mais à la limite, dans la pulsation envisagée comme fait, cette préférence ne jouait que positivement, elle permettait d'entendre que l'instruction mathématique des sujets passe par le souci du rapport des sujets à la matière objet d'instruction, par leur entrée paradoxale dans les gestes d’un artisanat spécifique. Et cela vaut comme observation dans les deux cas, que l’on préfère l’individu ou que l’on préfère la société : sur ce point il n’est pas nécessaire de se fixer, tous y gagnent : l’individu et la société.

Si donc nous ajoutons maintenant cette dimension « psychanalytique », c’est autre chose, c’est bien pour répondre à une autre question, celle de la place du sujet-mathématicien dans la pulsation. Nous avons donc fourni ainsi une « explication » de la pulsation du point de vue de la question du sujet : le mathématicien au travail sait bouger et pulser, et il le doit, parce que le sujet est divisé[31], d’une faille constitutive entre les affects d’évidence et d’étrangeté. Cette faille rend compte de cette autre division observable dans le dispositif « Concevoir = Instruire = Apprendre », là où le sujet doit confondre en acte les postures distinctes en principe.

Nous en venons donc à placer le sujet sur les six places de la matrice que voici :

Sujet-Mathématicien		Réception de	
		Évidence	étrangeté
Posture vers	Concevoir	EC	eC
	Instruire	EI	eI
	Apprendre	EA	eA

8. PULSATION DU POSSIBLE. La pensée spéculative s’exerce à l’ouverture et au changement en oscillant entre l’hypothèse et le possible. Nous voulons avancer ici que le « possible » est pulsatif, au moins entre deux grandes déterminations.

La première détermination du possible est le probable, c’est-à-dire ce qui est dans la dépendance d’aléas. Le calcul adéquat est alors le calcul des probabilités. La pratique de ce calcul est pulsatif, comme nous l’avons dit plus haut en suivant Mazliak.

[31] Et le calcul des *assimilations* peut rendre le service d’être une logique de ce sujet. Voir notamment R. Guitart, Modalités et images, Actes du SIC d’Amiens du 10 novembre 2001, pp. 9-10. Nous y indiquons comment, en particulier d’un point de vue historique, on peut concevoir que, à propos de la logique, les aspects discursif et visuel se tissent et se répondent, au point que l’on peut maintenant proposer un unique calcul pour ces deux aspects.

La deuxième détermination du possible est le plausible, c'est-à-dire ce qui est dans la dépendance de croyances. Le calcul adéquat n'est pas le calcul des probabilités, mais le calcul de la plausibilité[32].

En fait, lorsque l'on utilise les probabilités pour analyser des résultats d'enquêtes on commet une erreur de méthode considérable, qui revient à considérer que les effets des croyances sont comme les effets du hasard, ce qui est largement faux. On tient probablement là une confusion récurrente dans la difficulté à comprendre les probabilités.

Maintenant quand nous raisonnons de façon un peu flottante, et considérons telle proposition comme possible, nous pensons tantôt « probable » et tantôt « plausible », sans forcément marquer le distinguo. C'est cela que nous appelons la pulsation du possible, soit la pulsation du probable et du plausible. C'est un élément important de la pensée spéculative, et en particulier de l'invention mathématique. On peut la rapprocher de la pulsation entre évidence et étrangeté, l'évidence se rapportant à la croyance, et l'étrangeté au hasard. Le possible, l'objet possible, nous apparaît dans le mode du plausible ou du probable, i.e. de l'évident ou de l'étrange. Du moins dans la pensée déductive « à la grecque ». Par contre dans la version empirique du vrai, la situation est renversée, c'est le probable qui devient l'évident, le scientifique, tandis que le plausible, renvoyé à la croyance infondée, est mis du côté de l'étrange et du mythique. Le pragmatisme est encore autre chose. Nous voyons ainsi comment, entre la pulsation du possible et celle de l'évident et l'étrange, notre pensée du vrai vacille. Nous ne pouvons faire de mathématique sans laisser jouer cette vacillation.

9. RAISONS : ENTRE VOIR ET DIRE. Nous avons soutenu ailleurs comment la géométrie, voire la mathématique entière, tient au fait de maintenir un double enjeu d'interaction entre voir et dire[33]. Ce que nous ne reprendrons pas ici. Puis, d'un point de vue historique, dans l'examen des conceptions de la démonstration, y compris un examen de la

---

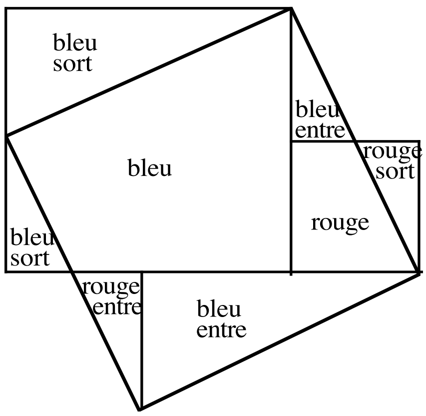
[32] Voir A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by multivalueds mapping, *Annals of Math. Stat.*, 1967, 325-339, et G. Shafer, *A mathematical theory of evidence*, Princeton Univ. Press, 1976.

[33] R. Guitart, Voir ce qu'on dit, dire ce qu'on voit, *Bulletin de l'APMEP*, n°431, nov-déc 2000, pp. 793-812. Consulter aussi dans *La Pulsation Mathématique* le n°57, pp. 160-167.

distinction entre mathématique chinoise et mathématique grecque, le rôle de la pulsation a été développé aussi dans ce sens d'une pulsation entre voir et dire, par Évelyne Barbin[34].

À propos du théorème dit Pythagore, Barbin explique les enjeux du côté du voir, du dire, et du mouvement, qui se différencient entre la preuve dite chinoise et la preuve grecque.

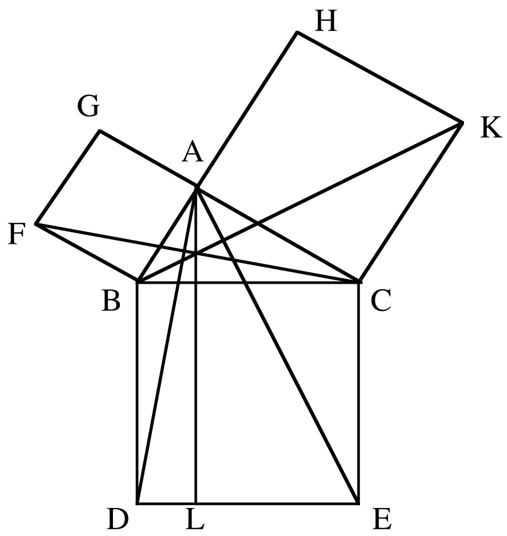
La preuve chinoise procède par un découpage et ré-assemblage des morceaux comme sur la figure de Liu Hui que voici, la seule explication étant : vois !.



La preuve grecque dans les *Éléments* d'Euclide qui consiste à discourir sur la figure ci-après, en des termes comme ceux-ci : Les triangles ABD et FBC sont égaux, puisqueAB égale FB, que BC égale BD, et que l'angle ABD égale l'angle ABC plus un droit , soit un droit plus l'angleABC, ce qui égale l'angle FBC. Mais alors la surface du carré BG vaut deux fois celle du triangle FBA, et donc aussi deux fois celle du triangle FBC, tandis que la surface du rectangle BL vaut deux fois celle du triangle BDL, et donc aussi deux fois celle du triangle BDA. On conclut que l'aire du carré BG vaut l'aire du rectangle BL.

[34] E. Barbin, La démonstration : pulsation entre le discursif et le visuel, *in Produire et lire des textes de démonstration*, coll. coordonné par É. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde, Ellipses, 2001, chap. 2, pp. 31-61.

Comme de même l’aire du carré CH vaut celle du rectangle LC, on conclut enfin au théorème.



Barbin indique que, dans les deux cas, pour se mettre à faire de telles preuves, un insu relatif à la graphie ou au discours est nécessaire, comme une pulsation entre la pensée et la trace. Elle rappelle[35] ceci de Merleau-Ponty[36] : « La merveille du langage est qu'il se fait oublier : je suis des yeux les lignes sur le papier, à partir du moment où je suis pris par ce qu'elles signifient, je ne les vois plus. [...] L'expression s'efface devant l'exprimé, c'est pourquoi son rôle médiateur peut passer inaperçu ». Et elle conclut : « Dans le cas du texte mathématique, le langage discursif ou graphique peut se faire oublier par celui qui est pris par la signification de ce qui est écrit. En l'absence de cette signification, l'erreur est alors de croire que les mathématiques sont seulement un langage, et de prendre les mathématiques à la lettre. Erreur d'autant plus facile à commettre que la rigidité du texte mathématique peut laisser

[35] E. Barbin, *La démonstration : pulsation entre le discursif et le visuel*, op. cit., p. 60.

[36] M. Merleau-Ponty, *Phénoménologie de la perception* (1945), rééd. Gallimard, Paris, 1968, p. 459.

croire que cette rigidité est l'essence même du mathématique ». Ce à quoi nous souscrivons tout à fait.

Mais nous reprenons ici les choses un peu autrement. On peut commencer par tirer deux fils où le dire et le voir sont dans des rapports inversés, fils qui vont, dans l'histoire, se tisser.

Depuis la Chine, dont la langue prononce l'écriture[37], nous tenons cet enjeu[38] de bien poser, effectuer, et transcrire les calculs numériques, ce dont on dira la litanie, dans l'espérance aussi d'en voir les effets au fur et à mesure s'inscrire sur la table. Question de bien dire ce qu'il faut faire, pour que ce qu'il est dit de faire produise ce que l'on espère, pour que le compte soit *effectué juste*. La procédure et sa démonstration sont continûment liées.

Le boulier ne laisse pas trace des gestes qu'on y fait, au fur et à mesure, et la vérité du calcul est dans son futur, ne s'éprouve qu'après coup, quand enfin il tombe juste. *In fine* ne s'y inscrit que le résultat dernier. La racine de la confiance est dans la contemplation exacte des configurations, de ce qui apparaît sur le *boulier*, ou dans un tableau de calcul, apparitions par suite de touchers déplaçant et effaçant de façon réglée. Nous sommes dans le monde réel qui s'effectue, dont nous pensons rigoureusement des séries. Il s'agit, ces séries réelles observables, de les « bien dire », de façon adéquate. Le monde se constitue du plein de ces litanies qui font proverbes, et la pensée est celle de la variante, d'un glissé dans le tissu du déjà-là. Le monde est alors proverbial, et la vérité est question d'adéquation, dirigée vers l'avenir, emportée par les actes.

Depuis la Grèce, dont l'écriture inscrit la langue, nous avons cette question de tracer, mesurer et voir les lignes droites et circulaires, ce dont on dira la preuve constructive, assurant que ce que l'on montre et voit est vrai, et vrai d'avance, *assuré par principe*. Question de

---

[37] Cyrille J.-D. Javary, Un regard renouvelé sur le vieux Classique des Changements, introduction au *Yi Jing*, Albin Michel, 2002, p. 5 : « Le chinois n'est pas une langue, c'est une écriture ».

[38] K. Chemla, Relations entre procédure et démonstration : La mesure du cercle dans les *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* et dans leur commentaire par Liu Hui (IIIe siècle) in *L'océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes, Saint-Denis de La Réunion, 3-7 novembre 1997*, IUFM de La Réunion, décembre 1998, pp.295-327.

démontrer ce que l'on montre, de bien dire les raisons, qui repose sur les principes et sur l'origine garantie, de donner une vérité qui procède du passé. La figure et sa démonstration sont continûment liées.

Le compas et la règle brouillent la lisibilité de la figure où les traces s'accumulent de plus en plus au cours de la construction effective, et la vérité est toujours passée, procède d'un suivi depuis l'origine du chemin parcouru, suivi perpétuellement à refaire. La confiance fondamentale est dans la force de la parole précise, avec laquelle on contrôle l'indication des coups de *compas* et de règles à effectuer, contrôle garanti par la logique, soit un par bon usage de la langue. Là nous croyons à la grammaire qui assure, avec laquelle nous pourrions toucher juste le monde. Le monde est pensé comme ce qu'il s'agit de « bien dire », voire, perpétuellement, de bien re-dire, de façon cohérente. La parole correcte fonde, depuis le vide d'où elle construit une architecture logique. Et le monde est conceptuel, et la vérité est question de cohérence, appuyée sur le passé, supportée par les connaissances.

Nous qui voulons maintenant envisager la place de l'objet dans la pulsation mathématique, trouvons ici, à partir de cette alternative pour le sujet-mathématicien entre voir et dire, un premier point de distinction du côté de l'objet : objet « du voir », objet « du dire ». Ce qui n'est pas sans rapport, du côté du sujet, avec le « concevoir » et l' « instruire ».

10. PULSATION DE L'ALGEBRE LINEAIRE. Le terme « algèbre linéaire » est, et c'est très heureux, une contradiction dans les termes : ou bien il s'agit d'algèbre c'est-à-dire de calculs littéraux avec des connus et inconnus, ou bien il s'agit de lignes, c'est-à-dire de figures géométriques en configurations formées de droites. Ou bien on fait des écritures et on joue avec des petites lettres, ou bien on trace des lignes. C'est cette « contradiction » que nous voulons un peu expliquer. Nous allons retrouver la pulsation entre dire et voir. Donc connaître par ailleurs la nécessité de cette pulsation voir/dire éclairera la question de l'algèbre linéaire, qu'il s'agisse de sa construction ou de son caractère opérationnel, et de la concevoir, d'en instruire, ou de l'apprendre. Mais, inversement, pratiquer dans tous ses états l'algèbre linéaire nous donnera la capacité implicite d'exercer la pulsation voir/dire.

Nous comprenons la situation de l'*algèbre linéaire* comme un dispositif à trois places.

La première place sera celle de « *l'esprit du boulier* », c'est-à-dire du calcul tabulaire chinois. Il s'agit de ce que nous[39] nommerons le *plan chinois*, discret, une sorte de matrice vide indéfinie, lieu d'inscriptions discursives. Ce que nous mettons à cette place, c'est le calcul par tableau pratiqué en Chine au début de l'empire des Han, un siècle ou deux avant Jésus-Christ, et probablement bien avant. Pour des problèmes de comptabilité équivalents à des systèmes d' « équations linéaires », il s'agit de la méthode fang-cheng de mise en tableaux, rapporté ensuite par Liu Hui au IIIème siècle après Jésus-Christ, qui n'est autre que ce que plus tard on a appelé méthode du pivot. On y manipule des matrices, tableaux rectangulaires de nombres.

La seconde place sera celle de « *l'esprit du compas et de la règle* », c'est-à-dire de la construction géométrique dite à la règle et au compas, dans ce que nous nommerons le *plan grec* (voire le *plan euclidien*), continu, infini, lieu de traçages visuels. Ce que nous mettons à cette place, c'est le travail que l'on fait en Grèce trois cents ans avant Jésus-Christ, et plusieurs siècles auparavant, dans les *Éléments* d'Euclide. On y manipule la règle et le compas, et on argumente pour élaborer et justifier les constructions par des objets et figures de la géométrie.

On peut alors considérer l'algèbre linéaire comme le moment, pulsatif, où ces deux premières places se croisent et s'expliquent mutuellement. Concrètement, on peut enseigner deux branches initialement indépendantes. D'une part, la théorie et la manipulation des tableaux, pour le commerce, ce que l'on peut considérer comme étude des transformations du « plan chinois », qui est un plan d'écritures qui sont des schémas. D'autre part la théorie et manipulation de la règle et du compas, pour l'architecture, ce que l'on peut considérer comme étude des transformations du « plan grec », qui est un plan de figurations, lesquelles sont aussi des schémas[40]. Ensuite, il s'agit de croiser les deux

[39] On prendra garde que c'est bien nous qui introduisons ici ces « objets » nommés ici « plan chinois » et « plan grec ». D'un point de vue historique ces « espaces » ne sont pas introduits avant l'époque moderne, seuls existent les pratiques de calculs et les figures tracées, sans que soient institués, comme objets de pensée en droit, les « fonds » qui les supportent.

[40] On ne manquera pas d'apprécier la « pulsation du tableau noir », où, en acte, nous mêlons le « plan chinois » et le « plan grec ».

fils, des tableaux et des figures, au plan des activités mathématiques. Cela demande la troisième place, qui est celle, simple, de la « *structure d'espace vectoriel* »[41]. Elle peut être construite de deux façons : soit à partir des tableaux seuls, soit à partir des figures linéaires seules. On peut aussi, l'introduire « abstraitement », par les propriétés abstraites de l'extension, par les axiomes d'espaces vectoriels, comme l'a avancé Grassmann au XIXème siècle. Ce qui s'abrège dans l'idée d'espace vectoriel, c'est une très longue histoire, que l'on peut en effet commencer au boulier et au compas, aux tableaux et aux figures. La force majeure de cette idée d'espace vectoriel est qu'en son sein il est possible d'apprendre cette histoire, et d'en instruire, et d'en construire une compréhension, de tenir en mains la suite des problématiques que cette idée « résout ». Tout consiste alors, finalement, à saisir comment, en vertu de l'espace vectoriel, a lieu la coordination, entre la figure que l'on peut voir et son écriture calculable en tableau. À cet endroit il ne faut pas oublier alors de faire apparaître les « opérations algébriques » sur l'espace vectoriel : l'idée d'espace euclidien ou hilbertien, d'algèbre sur un corps suivant Peirce, les algèbres de Grassmann et Clifford.

Ce qui se relance depuis cette abréviation, c'est bien sûr la théorie des algèbres, et la manipulation générale des structures au XXème siècle. Le pas suivant étant la considération des catégories de K-espaces vectoriels, de A-modules, et enfin, nouvelle abréviation d'importance, la catégorie <u>Mod</u> des modules sur des anneaux variables, catégorie proposée par Grothendieck, où « s'explique » au mieux les opérations générales de l'algèbre linéaire, et notamment la dualité. Pour que tout cela amuse Zeus, c'est-à-dire ait du sens, il importe, quand on unifie ainsi le traitement des opérations générales de l'algèbre linéaire, que ne soient pas oubliées les origines problématiques de ces opérations, leurs raisons d'être, que l'on sache quelles contradictions et pulsations sont alors prises en charge.

[41] Ici nous simplifions, et il faudrait introduire aussi la problématique de l'espace affine dans l'espace projectif, comme lieu où pulse la mise en commun de deux intuitions, à savoir celle du calcul archimédien où il s'agit de donner à voir les équilibres des poids, et celle du calcul arguésien des perspectives, où il s'agit de donner à voir l'acte de voir. C'est, au XIXème siècle, un moment essentiel de la constitution de l'espace lui-même comme « objet mathématique », ou, pour mieux dire, comme problématique ou comme motif.

11. OBJETS : SUBSTANCE ET FONCTION. Penser l'objet mathématique dans le travers du pulsatif, cela consiste donc, si nous nous appuyons sur ce que nous venons d'analyser, à commencer par le diviser au regard et à l'écoute. Entre voir et dire.

Mais ce n'est pas suffisant, parce qu'il est difficile de croire que ce que l'on voit et entend dans l'événement fasse vraiment signe d'un objet. Ainsi il est, dirons-nous, difficile de croire à l'objet dont jamais tout ne sera dit, qui est considéré comme « chose » inconnue, comme événement extérieur au sujet. Ici la pensée matérielle de l'objet[42] va tenir des deux bords de la cause et de l'effet.

Ou bien l'objet est l'architecture substantielle d'un mécanisme, constitué depuis des principes, depuis une origine dans un passé constitutif. Sa description, tournée vers l'assurance du passé, livre un fondement de l'objet, répond à la question : de quoi est-il fait ? On répond à la question du réel de la cause. L'objet est ainsi un corps étendu dont le secret est interne.

Ou bien l'objet est fonctionnel, et sa détermination est formée de son lien actif aux autres objets. Alors il se dirige, convenablement guidé, vers son destin. Sa spécification vise l'avenir, fournit un fonctionnement, et répond à la question : à quoi ça sert ? On répond à la question du réel de l'effet. L'objet est alors un nœud dans un réseau d'interventions en déploiement.

La pensée précise de l'objet pulse donc, tirée vers l'un ou l'autre bord de cette faille, puisque, d'un même objet, répondant d'un événement, on voudrait à la fois savoir le secret originel, et le mystère du destin. Par exemple l'objet Mod que nous avons rencontré plus haut a une histoire, un contenu problématique, quelque chose s'y abrège, et nous savons le décrire dans le cadre ensembliste standard comme une catégorie bien précise. Ceci est sa substance. Et puis, ce même objet, en oubliant maintenant largement sa substance, nous savons, aujourd'hui, sa fonction, la manière dont il intervient dans la K-théorie notamment.

[42] Et notamment, pour penser la question des objets musicaux et de l'interprétation musicale, on pourra se reporter au texte : R. Guitart, *Que peut-on écrire et calculer de ce qui s'entend ?*, à paraître à l'IRCAM dans le Séminaire « Entretemps » sur Mathématiques, Musique, Philosophie.

La vérité de l'objet est donc nécessairement ainsi à cheval sur l'instant, du côté de sa constitution avant et du côté de son intervention après. Insistons bien sur ce point-ci : la rigueur de la pensée oblige à tenir ensemble, distincts et inséparables, les deux pôles de l'objet, son corps substantiel et son âme fonctionnelle.

12. LES PLACES DE L'OBJET, ET DU SUJET ENCORE. Dans le prétendu « objet mathématique », c'est-à-dire dans *l'objet qui advient et vaut par ses propres raisons*, nous aurons donc à considérer la matrice :

Objet Mathématique		Raison	
		voir	dire
Objet	substance	VS	DS
	fonction	VF	DF

Et ainsi de l'objet mathématique il faut pour le moins envisager quatre modalités : il s'agit bien de *voir et de dire en rigueur la substance et la fonction*.

Toutefois ces quatre modalités laissent essentiellement deux traces dans le champ mathématique lui-même, puisque, d'une part le voir et la substance touchent à la question de l'*espace*, de la « situation préalable », interne à l'objet et à distance du sujet contemplateur, et que le dire et la fonction touchent à la question de la *machine*, du « producteur d'effets », externe à l'objet, au plus près du sujet actif. Encore que, secondairement, l'espace demande de dire des spécifications d'articulations de lieux, et que la machine demande de dessiner des plans.

Mais enfin on pourra admettre une sorte de privilège pour l'axe VS-DF, parce que, traditionnellement, la substance est peut-être d'abord pensée dans le mode du voir, la fonction dans celui du dire. Et de notre matrice une réalisation partielle :

Objet Mathématique		Raison	
		Écrire	Calculer
Objet	Architecture	Espace	
	Algorithme		Machine

On sait bien aussi l'opposition entre la géométrie et la logique, et entre la conception *ensembliste* et la conception *catégorique* des mathématiques. Cette fois, par ce distinguo, est privilégié plutôt l'axe DS-VF.

Et à ce titre, dans le champ mathématique aujourd'hui notre matrice pourrait donc se réaliser partiellement ainsi :

Objet Mathématique		Raison	
		Géométrie	Logique
Objet	Ensembles		Fondement
	Catégories	Fonctionnement	

Mais nous n'en voulons surtout pas discuter d'avantage, car notre but express était bien de souligner, en entrée, qu'il est un dispositif « naturel » d'origine dans lequel la pensée de l'objet mathématique en général pulse. C'est-à-dire que l'erreur serait, pensons-nous, de croire que la vraie rigueur mathématique serait plutôt du côté DS, ou bien du côté VF, etc., alors qu'elle consiste au contraire à maintenir la tension pulsative entre tous ces pôles. Tension dans laquelle justement l'objet reste problématique.

Ajoutons le dernier point, mais qui n'est pas le moindre. Ce que nous avons avancé jusqu'ici semble à peu près assuré ; mais ensuite, la moindre question risque de compliquer considérablement les données. Par exemple, si dans la mathématique il s'agit de *voir et de dire en rigueur la substance et la fonction* des objets mathématiques marquant les événements mathématiques, il semble rester la question de l'équivoque suivante : s'agit-il de le savoir ou de le savoir-faire ? Bien sûr tout ce que nous développons dans l'idée de pulsation insiste pour que savoir et savoir-faire, ou conception et habileté, soient distincts absolument inséparables dans l'acte. Mais ici, là où nous sommes en quêtes des places indiscernables mais distinctes de la pulsation, de ses modalités fondamentales inséparables, la question a un sens.

Or cette question, sur savoir ou savoir-faire, nous renvoie effectivement d'un côté aux postures du sujet. La réponse n'est pas difficile pour le professionnel, chez qui précisément les deux aspects s'épaulent. Mais pour le débutant et le professeur, la question de l'instruction devient ici : faut-il apprendre ce dont il s'agit, ou faut-il apprendre à faire ? Question donc, du côté sujet, du distinguo entre construire et instruire.

Et on observera aussi, côté objet, que la question est justement encore celle de l'objet soulevée tout à l'heure : de quoi est-ce fait, à quoi s'en servir ? Substance ou fonction. Autrement dit, la question de l'alternative entre savoir et savoir-faire est traitable avec les postures déjà construites, et ne semble pas en nécessiter de nouvelles.

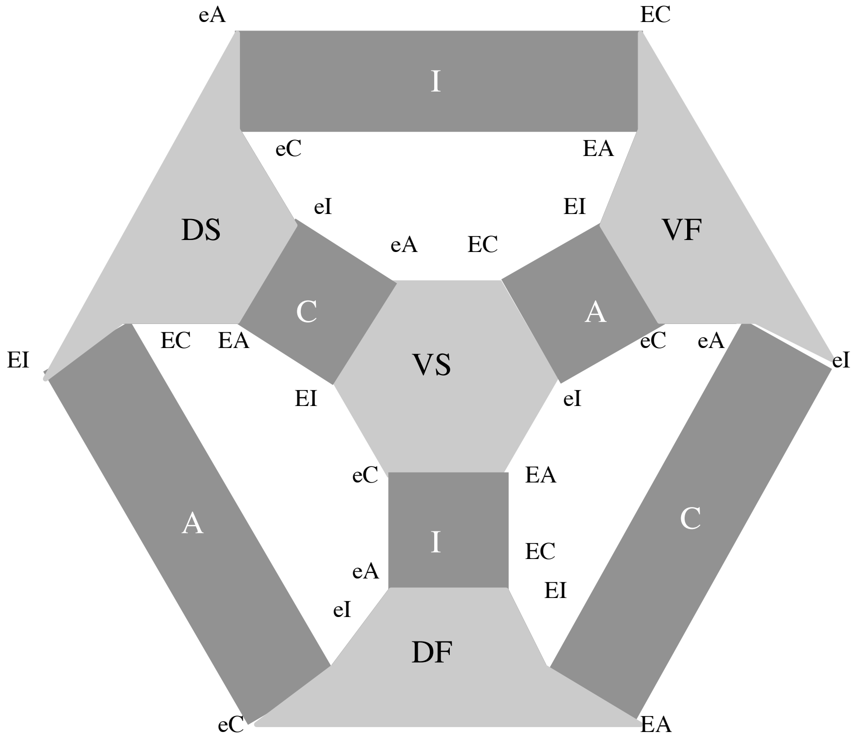
13. LES PLACES DE L'ACTE : LE SITE PULSATIF. Nous reprenons nos distinctions ainsi : six du côté sujet : EC, EI, EA, eC, eI, eA, et quatre du côté objet: VS, VF, DS, DF. D'où vingt-quatre possibilités de postures élémentaires d'actes mathématiques.

Par exemple la posture élémentaire d'acte notée « EC/VF » signifie la liaison d'un sujet en place de « conception évidente » à un objet en place de « voir la fonction ». C'est-à-dire que par un tel acte le sujet conceptualise comme évident le savoir-faire relatif à ce que l'objet donne à voir de sa fonction.

Alors un acte mathématique réel est une façon de tenir ensemble ces 24 postures :

EC/VS	EC/VF	EC/DS	EC/DF
EI/VS	EI/VF	EI/DS	EI/DF
EA/VS	EA/VF	EA/DS	EA/DF
eC/VS	eC/VF	eC/DS	eC/DF
eI/VS	eI/VF	eI/DS	eI/DF
eA/VS	eA/VF	eA/DS	eA/DF

On peut les disposer aux 24 sommets d'un *octaèdre régulier adouci*, c'est-à-dire dont les coins sont tronqués. Un tel polyèdre comporte bien 6×3 = 24 sommets, et puis 8 faces hexagonales et 6 faces carrées, soit 14 faces, et 12+ 6×4 = 36 arêtes. Si l'on regarde l' intérieur d'un tel polyèdre à travers l'une de ses faces hexagonales, on en obtient un diagramme de Schlegel de la forme ci-après, où l'hexagone à travers lequel on regarde « fait » le tour, où trois hexagones « intérieurs » sont laissés blancs, où les quatre autres hexagones sont gris clairs, et où les six carrés sont gris foncés. Sur ce schéma, par exemple, le cas « eA/VS » est représenté par le point noté eA qui figure à la périphérie de l'hexagone nommé VS. Les lettres C, I et A représentent les trois diagonales de l'octaèdre original. Nous nommerons ici ce diagramme *l'hexagramme pulsatif*.



Nous n'avons pas l'intention ici de développer cette petite algèbre — ou cette petite géométrie — déjà trop complexe, avant d'en avoir mieux éprouvé la solidité conceptuelle de base. Le but ici était seulement, de reprendre le fil des motifs de la pulsation mathématique, de faire comprendre cette pulsation mathématique comme une manière de tenir liées et distinctes les multiples composantes de l'acte mathématique, tant du côté sujet que du côté objet, tels que les donne à voir l'hexagramme pulsatif. À chaque acte mathématique est attachée une manière de regarder l'hexagramme, d'en accentuer tel ou tel aspect, d'en atténuer tel autre.

Notre but est donc seulement de décrire un peu, informellement encore, un possible *site*[43] *de la pulsation*, dont les objets seraient donc les 24 postures élémentaires d'actes ci-dessus, dont les morphismes seraient à découvrir, qui exprimeraient les passages naturels entre actes élémentaires, site sur lequel chaque acte mathématique réel serait comme un *faisceau*. Donc, dans un tel dispositif, via cette analyse-là, la « logique de la pulsation » serait une logique à 24 valeurs. Un excellent exercice est, pour chacune de ces valeurs élémentaires d'actes, de chercher une situation d'événement mathématique qui la mette particulièrement en relief. En fait, les liaisons à découvrir entre ces 24 points se trouveront par ce moyen. Par exemple si tout cas d'un certain type t « exhibant » telle valeur v « exhibe » aussi tel autre w, alors on devra marquer une flèche t de u à v.

Mais arrivé à ce point, une fois que le travail de cet article a produit son effet, à savoir de dégager l'idée que nous venons d'avancer de *site de la pulsation*, tout est bien entendu à reprendre soigneusement, à simplifier, etc.

Le point réellement acquis n'est pas vraiment la spécification particulière avancée ici dans un mode exploratoire. Mais c'est le fait qu'en effet, il est question maintenant de considérer les actes mathématiques comme des faisceaux sur un *site de la pulsation* idéal, mieux fait probablement que celui que nous venons de tenter, site ou Le sujet et L'objet, chacun divisé, se tiendraient liés idéalement par des Actes[44], qui serait nommé le *Site Pulsatif*. Les faisceaux sur ce site seront donc des données localement distribuées aux divers vrais aspects

---

[43] Nous prenons ici le terme en son sens technique précis de « Site de Grothendieck ».

[44] Observons que, mise à part bien sûr la théorisation faisceautique proprement dite, notre méthode de polarisation (en sujet/objet) et division en instances de chaque pôle, pour enfin tenir un modèle au point de l'articulation des instances, est semblable à celle de la *Morphologie du conte* publié en 1928 par Vladimir Propp. Cela est observé dans *L'étude structurale et typologique du conte* de Evguéni Mélétinski, qui souligne : « […] la divisibilité des motifs aussi bien que celle des sujets ; d'autre part, l'absence de frontières précises et de critères bien fondés pour délimiter le sujet […] » , tandis que « l'assemblage lui-même des motifs à l'intérieur du sujet, ou plus exactement leur groupement, leur distribution, dépend d'une structure constante de composition […] Les fonctions des personnages sont les éléments constants […] Ces fonctions sont au nombre total de trente et une […] ». Voir V. Propp, *Morphologie du conte*, Points/Seuil, Essais 12, 1970.

élémentaires de l'acte mathématique précisément. La logique de l'acte mathématique serait alors la logique du topos des faisceaux sur ce site, etc.

En fait ce site reste à découvrir réellement, soigneusement, et nous n'avons fait ici qu'en indiquer sérieusement l'hypothèse.

14. SITE PULSATIF VERSUS RESPIRATION : YANG ET YIN DE LA PU LSATION. Du point de vue de l'instruction en mathématique, l'hypothèse encore un peu « métaphysique » qu'un tel *Site Pulsatif* existe, signifie, en la déroulant dans l'autre sens, à peu près tout ce que nous avons enchaîné pour y arriver. En lisant donc notre texte ici à l'envers, on apprendra autre chose que par la lecture à l'endroit : si l'on commence en posant de manière assez indéterminée l'acte mathématique comme un faisceau, on est amené naturellement, pour expliquer le site auquel ce faisceau est attaché, à découvrir la pulsation sous la forme du fait de tenir associées et séparées des postures de sujet et d'objet. Dans ce cas, l'explication finale n'est plus, comme à l'aller, le Site Pulsatif, expliquant donc la respiration, mais au contraire c'est la respiration dans l'acte, expliquant le site.

On peut dire que le germe de notre analyse de l'acte mathématique est dans l'idée de la Respiration, et que la carte déployée de la même analyse est dans l'idée du Site Pulsatif.

En fait, de l'objet très yin nommé « pulsation mathématique », il y a deux abords. L'un est yin, qui introduit simplement à la forme de l'acte, à sa pensée comme Respiration, dans le seul but de savoir-faire cette pulsation. Et puis il y a une forme yang, par où, excessive, se manifeste une volonté de maîtrise sur la pulsation elle-même, dont on aurait analysé tous les ressorts, et qui se laisserait voir en l'espèce du *Site Pulsatif*. Il importe donc d'entrer dans une nouvelle paradoxalité ici, pour penser cette pulsation qui consiste à maintenir comme distinct et inséparable ces deux aspects. D'un côté, celui de la Respiration vitale, on peut cependant avancer analytiquement deux trois explications. Et de l'autre, celui du *Site Pulsatif*, on peut soutenir qu'il s'agit d'une visée, d'un horizon, qu'aucun site formel n'est le *Site Pulsatif* réel.

La didactique des mathématiques peut s'organiser précisément depuis ce point, quand il s'agit de découvrir progressivement et indéfiniment, et au titre de la pulsation, le *Site Pulsatif*, c'est-à-dire la manière dont la *Respiration* tient ensemble les diverses postures de sujet et d'objet mathématiques dans l'invention mathématique, les vingt-quatre formes élémentaires subséquentes d'actes mathématiques. La difficulté est que, avancer une « écriture » a toujours un effet de mesure, sinon de normalisation, et précisément il faut que[45] « la mesure n'empêche pas le mouvement de se poursuivre, mais le montre, donc ne le laisse pas entièrement se perdre ». Le risque, que nous devons assumer ici, c'est que, comme en poésie, « mieux on comprend comment cela devrait se faire, moins on y parvient. La virtuosité apparaît avec le vide ». Ici, il ne faut pas que la compréhension éventuelle qui s'écrirait petit à petit en l'espèce du site pulsatif, oblitère le passage à l'acte pulsatif lui-même, qui reste incontournable.

> « Établir un parallèle entre la démonstration mathématique et le Zen (quelque image que l'on s'en fasse) doit paraître de prime abord une intolérable dépréciation de ce dernier.
>
> Dût-on même admettre, dans le plus large esprit de compréhension, que l'on qualifie d'art la pratique de la démonstration, on se résoudra difficilement à chercher en cet art autre chose qu'une *performance* de caractère nettement sportif.
>
> Le lecteur s'attendra donc à entendre parler ici des étonnants exploits de maîtres mathématiciens jouissant du privilège de pouvoir s'appuyer sur une tradition vénérable et ininterrompue du maniement des concepts et calculs.
>
> Depuis quelques générations seulement, l'Occident a remplacé par des ordinateurs modernes ses anciens moyens de calcul et conceptualisation. Toutefois, la pratique de ces derniers n'en disparut pas pour autant, mais se perpétua et intéressa des cercles toujours plus larges. […] etc. »
>
> [Imitation de Herrigel][46].

[45] P. Jaccottet, *La semaison*, Gallimard, 1984, pp. 40 et .

[46] Notre lecteur aura plaisir à lire ainsi tout Herrigel en y remplaçant « tir à l'arc » par « mathématique » ou par « démonstration mathématique ». On obtient là, à peu de frais, un remarquable traité de didactique des mathématiques…