Calcul d'assimilations, modalités et analyse d'images[1]

René Guitart

Dans le fil du thème « calcul et forme » nous proposons de situer le *calcul* comme ce qui fait lien entre la *forme* et le *dire*. Il s'agit de comprendre comment deux domaines, la géométrie et la logique, relèvent d'un seul et même calcul particulier, que nous dirons *calcul de variations dans les régimes d'assimilations*.

Nous voulons ici pointer le fait que ce calcul permet d'unifier et d'échanger les intuitions sur les formes figuratives et les intuitions sur les modalités discursives, et ceci jusqu'à un point où il n'y aurait plus lieu de distinguer entre le géomètre et le logicien, entre les calculs visant la détermination des formes et ceux garantissant la logique des démonstrations, plus de différence entre les courbures géométriques et les modalités logiques.

Assimilation, augmentation, diminution et variation.

Les objets X seront donc aussi bien, concrètement, des propositions d'un discours que des images dans un plan. Dans un cas le calcul des gradients $\nabla_\varepsilon X$ contrôlera les modalités discursives, et dans l'autre il permettra l'analyse des formes.

Pour commencer, si l'on considère deux ensembles E et F, une relation binaire quelconque $\varepsilon \subseteq E \times F$, et si $(x,y) \in \varepsilon$ est noté $y \to_\varepsilon x$ — ce que l'on lit « y est *assimilable* à x du point de vue ε » — alors, pour $X \subseteq E$ et $Y \subseteq F$, on définit les « *augmentation* de X par ε » et « *diminution* de Y par ε » :

$$X \nearrow \varepsilon = \{y \,;\, \varepsilon^{op}[y] \cap X \neq \emptyset\} = \{y \,;\, \exists\, x\, (y \to_\varepsilon x \;\&\; x \in X)\},$$

$$Y \searrow \varepsilon = \{x \,;\, \varepsilon[x] \subseteq Y\} = \{x \,;\, \forall y\, (y \to_\varepsilon x \Rightarrow y \in Y)\}.$$

On a $y \in X \nearrow \varepsilon$ si et seulement si y est assimilable à au moins un élément x de X, et on a $x \in Y \searrow \varepsilon$ si et seulement si tout y qui est assimilable à x est dans Y. Comme :

$$\forall y\, [\exists x \in X\, (y \to_\varepsilon x) \Rightarrow y \in Y)] \Leftrightarrow \forall x\, [x \in X \Rightarrow \forall y\, (y \to_\varepsilon x \Rightarrow y \in Y)],$$

on a donc la relation fondamentale d'adjonction :

[1] Chap. 5 du livre *Calculs & formes De l'activité mathématique*, ellipses, 2003, pp.75-89.

$$X{\nearrow}\varepsilon \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y{\searrow}\varepsilon.$$

D’où résulte notamment les inclusions :

$$(X{\searrow}\varepsilon){\nearrow}\varepsilon \subseteq X \subseteq (X{\nearrow}\varepsilon){\searrow}\varepsilon.$$

Soulignons bien que cela vaut pour une relation binaire ε absolument quelconque. Mais par contre, lorsque E = F, les formules $\forall X\,(X{\searrow}\varepsilon \subseteq X)$ ou $\forall X\,(X \subseteq X{\nearrow}\varepsilon)$ ne sont pas toujours valides : en fait elles sont équivalentes chacune au fait que ε soit réflexive. Réflexivité que nous ne supposons pas a priori.

Ensuite, dans le calcul en vue, les propositions sont des parties X d’un ensemble E, et les points de vue ou postures, qui opèrent sur les propositions et les altèrent par augmentation et diminution, sont des parties ε de l’ensemble E×E. On définit pour toute « proposition » X et tout point de vue ε, *deux* « modalisations » de X associées à ε, à savoir $X^{d\varepsilon}$ et $X^{b\varepsilon}$, données par :

$$X^{d\varepsilon} =_{\text{déf}} (X{\searrow}\varepsilon){\nearrow}\varepsilon \subseteq X \subseteq (X{\nearrow}\varepsilon){\searrow}\varepsilon \;{}_{\text{déf}}\!= X^{b\varepsilon}.$$

À quoi s’ajoute la définition des opérateurs de variations ou gradients ou encore *bords intérieurs* et *bords extérieurs* ∇^- et ∇^+ :

$$\nabla^-_\varepsilon X = X\backslash(X{\searrow}\varepsilon){\nearrow}\varepsilon = X\backslash X^{d\varepsilon}, \quad \nabla^+_\varepsilon X = ((X{\nearrow}\varepsilon){\searrow}\varepsilon)\backslash X = X^{b\varepsilon}\backslash X.$$

Le bord de X du point de vue ε est :

$$\nabla_\varepsilon X = \nabla^-_\varepsilon X \cup \nabla^+_\varepsilon X.$$

Le calcul des *variations dans les régimes d’assimilation* que nous avons ainsi en mains [6, 9, 10] est un calcul différentiel où s’introduisent des opérateurs comme ces gradients $\nabla^-_\varepsilon X$ et $\nabla^+_\varepsilon X$, pour chaque objet X relativement à des points de vues ε variés. Dans ce calcul la question basique est l’ « équation différentielle » :

$$\nabla_\varepsilon X = K.$$

2. Régimes, axiome de passage, et structures.

Ce qui nous importe d’emblée est, non pas une seule assimilation particulière relative à une seule relation ε, mais, au moins, une famille d’assimilations sur un ensemble E — ce que nous appellerons *un régime d’assimilation de hauteur 1* — soit la donnée de :

- un ensemble I de lettres i, j, k, etc., noms de positions d'assimilation ;
- un ensemble E d’éléments à « pointer » (dire ou à montrer), notés, x, y, etc. ;
- une fonction d’assimilation

$$a : I \to P(E^2)$$

c'est-à-dire des symboles

$$y \rightarrow_{a(i)} x,$$

que l'on lit :

« dans le régime a, et du point de vue i, y est assimilable à x ».

Et même, en réalité, ce qu'il nous faut précisément est, non seulement *un régime d'assimilation de hauteur 1* mais un *régime d'assimilation de hauteur 2* , où il y a non seulement des assimilations, mais aussi des assimilations entre les assimilations, soit précisément une donnée de trois ensembles E, F et G et de deux fonctions

$$b : G \to P(F^2) \ ; \ a : F \to P(E^2)$$

avec l'*axiome de passage* qui s'écrit :

$$\forall x, y \in E, \forall i \in F \Big([\, y \to_{a(i)} x \,] \Rightarrow \exists\, r \in G \,\{\, \forall\, j \in F\, [(j \to_{b(r)} i) \Rightarrow (y \to_{a(j)} x)] \,\}\Big).$$

On entendra bien ce que l'*axiome de passage* exprime, à savoir une *stabilité de l'observation* : si une assimilation de y à x a lieu d'un point de vue i, l'assimilation est stable, c'est-à-dire perdure quand le point de vue change en j tout en restant lui-même assimilable au premier i suivant une certaine raison r, qui dépend de l'assimilation initiale ; alors cette raison est un point de vue suivant lequel l'assimilation est nécessaire. En bref : l'assimilation n'est pas sans raisons possibles.

Pour les régimes de hauteur 1, des notions très semblables existent déjà, comme les gractes [22] ou les *systèmes de réécritures* ordinaires :

- Un *gracte* ou graphe d'actions est la donnée de : un ensemble A de lettres ε, ϕ, γ, ... qui sont des noms d'actions ; un ensemble E d'états, notés, x,y, etc. ; un ensemble P de possibilités d'actes, c'est-à-dire de symboles du types $y \to_{\varepsilon} x$, que l'on lit : « si l'on est dans l'état y, et si on fait l'action ε, on passe à l'état x ».

- Un *système de réécriture* est la donnée de : un ensemble $\underline{R}$ de lettres r, s, t, ... qui sont des noms de règles de ré-écriture ; un ensemble M de mots, notés, m, n, etc. ; un système P de possibilités de réécritures, c'est-à-dire de symboles $m \to_r n$, que l'on lit : « en vertu de la règle r le mot m peut être remplacé par le mot n ; le mot n est dit être une réécriture du mot m ».

On relève aussi la similitude avec les « *dynamic set algebra* » [21] ($B = P(E)$, $A = im(a) \subseteq P(E\times E)$, $\Diamond$), où $\Diamond\,(\varepsilon, X) = X \lhd \varepsilon$, dans le cas où im(a) est stable par les opérations booléennes, la composition des relations et la clôture transitive. Dans ce cadre on pense aux éléments X, Y, etc. comme à des états ou des propositions, et aux ε, η, etc. comme à des actions ou des programmes.

Avec ces interprétations en termes de gractes et/ou de systèmes de réécritures, ou en liaison avec la logique propositionnelle dynamique, on décrirait aisément de nombreux exemples.

Notons simplement, de plus, les cas très simples et importants suivants de régimes, dont nous donnons la partie de hauteur 1, mais qui sont en fait ajustable comme des régimes de hauteur 2, puisque l'ensemble I des points de vue y est en fait structuré comme un monoïde ou un ordre, notamment, faits qui s'expriment bien par un régime d'assimilations sur I :

- En algèbre : si l'on dispose sur un ensemble G d'une structure de groupe, donnée par une loi « . », alors on peut considérer le régime d'assimilation associé, pour lequel I = G, et où « $y \to_{a(i)} x$ » signifie « $y.i = x$ ». Cela s'étend évidemment à toute jeu *de lois de composition* *binaires*. Si P(x,y) est un polynôme, on peut considérer « y $\rightarrow_{v(P,\ z)}$ x » signifiant « P(x,y) = z.». etc.

- En géométrie : si l'on dispose d'un ensemble P où sont bien déterminées les lignes droites, alors on peut considérer le régime d'assimilation associé, pour lequel I = P, et où « y $\rightarrow_{a(i)}$ x » signifie « y, i et x sont alignés ». On parlera ainsi, en particulier du régime *d'alignement du plan*. On peut aussi déterminer un régime de la *cyclicité*, en disant que « y $\rightarrow_{c(i,j)}$ x » signifie « y, i, j et x sont cocycliques ». Si G est une courbe, on peut considérer « y $\rightarrow_{t(G)}$ x » signifiant « la droite passant par y et x est tangente à G». etc.

Les régimes géométriques et algébriques sont comparables, en tant que régimes, alors que les structures algébriques et géométriques sont hétérogènes, voire duales. Au niveau des régimes on peut donc combiner toutes les structures. On a le « problème inverse », étant donné un régime abstrait, de découvrir l' « esprit » (algébrique, ou géométrique ,etc.) qui lui donne un sens intuitif.

- On peut considérer encore le régime qui décrit l'observation des astres depuis la terre, où I est l'ensemble des points sur terre, E est l'ensemble des astres, et où l'assimilation y $\rightarrow_{a(i)}$ x signifie que, depuis la place i, y et x sont indiscernables, parce que leur distance angulaire est moindre que le seuil de séparation σ. On est alors dans un exemple d' *ensemble empirique* [2].

- Notons ensuite le cas d'un espace métrique abstrait (E,d), avec I = R est l'ensemble des réels positifs, avec a(i) donnée par :

« y $\rightarrow_{a(i)}$ x » si et seulement si « d(y,x) < i ».

En particulier on considèrera ainsi, pour le plan muni de sa distance euclidienne, ce que nous appellerons le *régime métrique du plan*, qui est important pour l'analyse d'image.

- Une *structure uniforme* [28], est la donnée sur un ensemble E d'un ensemble U de parties de E×E vérifiant certains axiomes qui sont satisfaits dans le cas des parties de la forme {(x,y) ; d(x,y) < i} d'un espace métrique. L'intuition est, si U ∈ U et si (x,y) ∈ U, de dire que x et y sont U-proches. Si l'on dit plutôt que x et y sont assimilables du point de vue U, on comprend qu'une structure uniforme est, directement, un régime.

À côté de ces régimes « visuels » ou « géométriques » associables à la géométrie du plan ou d'un espace, et de ces régimes « fonctionnels » associables aux opérateurs de systèmes algébriques, on notera encore expressément ce que l'on appellera les régimes « discursifs », décrit par exemple via des synonymies entres mots où proposition, via les modalités, comme quand on dit que « A est presque B », etc.

Notre souci est précisément de développer et comprendre suffisamment la machinerie du calcul des régimes pour pouvoir, via ce calcul, importer les intuitions depuis les régimes visuels vers les régimes discursifs, et réciproquement. Les régimes d'assimilations sont utilisés en sémantique discursive par Sassier [23, 24].

Nous soutenons alors la « thèse » que voici :

Les différentes structures que l'on dégagent en faisant des mathématiques *sont des façons contingentes* variées, ayant leurs colorations intuitives propres*, de déterminer des régimes* *d'assimilations*, *et*, de fait, dans l'usage de ces structures, *c'est seulement le jeu de ces assimilations* associées *qui intervient* en réalité.

Si l'on pense aux régimes de hauteur 1 comme à des cousins des graphes, ce que nous affirmons est à rapprocher du caractère basique de la catégorie des graphes, et de la pensée diagrammatique, voire catégorique.

Si un ensemble E est « quelconque », les seules assimilations que l'on y peut remarquer naturellement sont les quatre 0, ι, ν, 1, dont les graphes sont $\emptyset$, ΔE, $E\times E\backslash\Delta E$, $E \times E$. On considèrera donc souvent qu'un régime comporte au moins dans I quatre points de vue nommés 0, ι, ν, 1, constituant donc le « noyau ensembliste général ».

Ensuite, plus un ensemble sera structuré, plus on y disposera d'assimilations propres, et par suite, plus son calcul différentiel propre s'enrichira d'opérateurs subtils.

Si par exemple est privilégié un élément particulier a dans E, cela structure un peu E, ce qui s'indique par l'assimilation qui assimile tous les x à a.

Aussi, si un ensemble E est de la forme $E = X\times X$, alors E n'est plus quelconque, on y disposera par exemple de la symétrie σ, qui, décrite comme assimilation, assimile (x,x') à (x',x) ; mais aussi on aura les deux projections, soit les assimilations de (x,x') à (x,x), et de (x,x') à (x',x').

Si un ensemble E est de la forme E = P(X), alors on y dispose justement de deux assimilations cruciales, à savoir celle qui assimile B à A si $B \subseteq A$, et celle qui assimile B à A si $B \cap A \neq \emptyset$. En fait, *la description complète du système* I[P] *des assimilations naturellement réalisables sur tout ensemble de la forme* P(X) *est possible*, comme conséquence directe de la classification des transformations naturelles de P vers P^2 établie en [5]. La « théorie » I[P] comprend notamment le calcul booléen et le calcul des cardinaux.

D'une manière générale, si est fixé un foncteur $T : Ens \to Ens$, et si l'on considère le monoïde I[T] des transformations naturelles de T vers PT, alors tout ensemble de la forme T(X) est équipé d'un système d'assimilations a[T](X) paramétré par I[T], donné, pour u, u' $\in$ TX, et pour $t \in I[T]$ par $u' \to_{a[T](X)(t)} u$ si et seulement si $u' \in t(u)$.

Cela dit, si notre thèse sur les structures comme génératrices d'assimilation tient, on arrive nécessairement à l'idée suivante :

la structure intervient dans le travail mathématique comme mise en place d'un jeu d'assimilations a(i) induisant donc son calcul différentiel propre constitué d'opérateurs $\nabla_{a(i)}$.

3. Modalités : nécessité, possibilité.

Nous expliquons ici comment la valuation modale est un calcul d'augmentation et diminution dans un régime d'assimilation.

.Avec Chagrov & Zakharyaschev [4] nous prenons le calcul booléen sous la forme du système Cl que voici, appelé *calcul propositionnel classique* : on dispose de lettres comme variables propositionnelles, des signes $\perp$ (faux), $\wedge$ et $\Rightarrow$, des abréviations $\neg f =_{\text{déf}} (f \Rightarrow \perp)$, $(f \Leftrightarrow g) =_{\text{déf}} (f \Rightarrow g) \wedge (g \Rightarrow f)$, $T =_{\text{déf}} (\perp \Rightarrow \perp)$, et des dix axiomes :

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3. $(p \wedge q) \Rightarrow p$
4. $(p \wedge q) \Rightarrow q$
5. $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$
6. $p \Rightarrow (p \vee q)$
7. $q \Rightarrow (p \vee q)$
8. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r))$
9. $\perp \Rightarrow p$
10. $p \vee (p \Rightarrow \perp)$.

Et on dispose des deux règles d'inférences :

- Modus ponens (MP) : étant données les formules f et $f \Rightarrow g$, on infère g.

- Substitution (Subst) : étant donnée une formule f, on infère fs, où s est une « substitution », remplaçant chaque variable de f par une formule quelconque.

Les systèmes modaux à la manière de Lewis & Langford [15] s'obtiennent alors, si l'on veut bien les décrire dans cette manière moderne, en ajoutant d'abord que, pour toute formule f, alors $\Box f$ est une formule (lue : *nécessité* de f), en ajoutant aussi que l'on définit la *possibilité* comme $\Diamond f = \neg\Box\neg f$, et en ajoutant encore la règle de nécessitation :

- Nécessitation (RN) : étant donnée la formule f, on infère $\Box f$.

On distingue alors notamment les *calculs propositionnels modaux* suivants :

K	$\equiv$	Cl	+	$(\Box (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$	+	(RN)	
S4	$\equiv$	K	+	$\Box p \Rightarrow p$	+	$\Box p \Rightarrow \Box\Box p$	
S5	$\equiv$	K	+	$\Box p \Rightarrow p$	+	$\Box p \Rightarrow \Box\Box p$	+ $p \Rightarrow \Box\Diamond p$

Une formule f est une thèse de K s'il existe une dérivation de f dans K, c'est-à-dire une suite $f_1, f_2, ...f_n$ de formules telle que $f_n = f$ et que, pour chaque i, $1 \leq i \leq n$, f_i soit ou bien un axiome ou bien obtenu à partir des formules précédentes à l'aide de l'une des règles d'inférences. Ce que l'on écrit $\vdash_K f$ ou $f \in K$.

Suivant Kripke en 1963 [12, 13], voici la description de la *valuation modale* dans un système d'accession entre mondes possibles.

Soit E un ensemble non vide et R une relation binaire sur E quelconque. On appelle (E, R) un *cadre modal* ou « modal frame », ou, plus explicitement, « modal Kripke frame »). Si xRy, on dira que dans le cadre (E,R) y est visible ou accessible depuis x. Les éléments de E sont appelés des « mondes ».

On appelle *valuation modale* du calcul K dans (E, R) la donnée d'une fonction quelconque $V : \mathrm{Var}L \rightarrow P(E)$. Et on détermine alors la valuation modale ou valuation-K, notée $\mathrm{Val}_K(f)$ (induite par V) d'une formule f ainsi :

$\mathrm{Val}_K(\perp) = \emptyset$

$\mathrm{Val}_K(p) = V(p)$, si p est une variable

$\mathrm{Val}_K(f \wedge g) = \mathrm{Val}_K(f) \cap \mathrm{Val}_K(g)$

$\mathrm{Val}_K(f \vee g) = \mathrm{Val}_K(f) \cup \mathrm{Val}_K(g)$

$\mathrm{Val}_K(f \Rightarrow g) = \{x \,;\, x \in \mathrm{Val}_K(f) \Rightarrow x \in \mathrm{Val}_K(g))]\}$

$\mathrm{Val}_K(\Box f) = \{x \,;\, \forall y\, [xRy \Rightarrow (y \in \mathrm{Val}_K(f))\}$

$\mathrm{Val}_K(\Diamond f) = \{x \,;\, \exists y\, [xRy \wedge (y \in \mathrm{Val}_K(f))\}$.

Ainsi, concernant les modalités de nécessité $\Box$ et de possibilité $\Diamond$, on formulera :

La nécessité $\Box f$ de f est valide dans le « monde » x si et seulement si f est valide dans tous les « mondes » y accessibles depuis x, et la possibilité $\Diamond f$ de f est valide en x si et seulement si il existe un « monde » accessible depuis x ou f est valide.
On dit que f *est valide dans* (E,R) si, et seulement si, pour tout V, $Val_K(f) = E$; on écrit alors : $(E,R) \models f$.

On a les théorèmes suivants :

$(E,R) \models \Box p \Rightarrow p$ ssi R est réflexive
$(E,R) \models \Box p \Rightarrow \Box\Box p$ ssi R est transitive
$(E,R) \models p \Rightarrow \Box\Diamond p$ ssi R est symétrique

On a aussi :
$\vdash_K$ f si et seulement si pour tout (E,R) on a : $(E,R) \models f$.
$\vdash_K$ f si et seulement si pour tout (E,R) fini on a : $(E,R) \models f$.
$\vdash_K$ f si et seulement si pour tout (E,R) arbre intransitif fini on a : $(E,R) \models f$.

$\vdash_T$ f si et seulement si pour tout (E,R) réflexif : $(E,R) \models f$,
$\vdash_{K4}$ f si et seulement si pour tout (E,R) transitive : $(E,R) \models f$,
$\vdash_{S4}$ f si et seulement si pour tout (E,R) réflexif, transitif : $(E,R) \models f$.
$\vdash_{S5}$ f si et seulement si pour tout (E,R) réflexif, transitif et symétrique : $(E,R) \models f$.

On note également, en appelant « universel » un cadre (E, R) dans lequel xRy pour tout x et y, que l'on a :
$\vdash_{S5}$ f si et seulement si pour tout (E,R) universel fini : $(E,R) \models f$.

On voit aisément que, pour une relation fixée R = ε sur E, les parties $X\text{⬀}\varepsilon$ et $X\text{⬂}\varepsilon$ sont interprétables comme des possibilités et nécessités dans les cadres (E, R) = (E, ε) ; en relation avec l'interprétation modale ci-avant, on peut donc considérer que, en lisant $(x,y) \in R$ sous la forme : « dans le cadre R, y est accessible depuis x », ou bien « x voit y », plutôt que suivant « du point de vue ε, y est assimilable à x », on peut poser, en utilisant aussi la relation opposée à ε, notée ε^{op}, qui est définie par $(y,x) \in \varepsilon^{op}$ si et seulement si $(x,y) \in \varepsilon$:

$$\Box_\varepsilon X = nec_\varepsilon X = X\text{⬂}\varepsilon \;, \qquad \Diamond_\varepsilon X = pos_\varepsilon X = X\text{⬀}\varepsilon^{op} \,,$$

$$\Box_{\varepsilon op} X = nec_{\varepsilon op} X = X\text{⬂}\varepsilon^{op} \;, \qquad \Diamond_{\varepsilon op} X = pos_{\varepsilon op} X = X\text{⬀}\varepsilon.\%\iota\kappa,$$

On peut donc considérer un régime de hauteur 1 comme un système multimodal, où sont spécifiées des nécessités et possibilités suivants des points de vue divers. Et pour un régime de hauteur 2, l'axiome de passage peut s'écrire avec des nécessités $\Box_r$ et possibilités $\Diamond_r$ relatives aux raisons r, avec, pour tout $Z \subseteq F$,

$$\Box_r Z = Z\text{⬂}b(r), \text{ et } \Diamond_{rop} Z = Z\text{⬀}b(r).$$

L'axiome s'exprime en effet ainsi :

$$\forall x, y \in E\ [\ \cup_{r \in G} (\ [y \rightarrow x] \Rightarrow \Box_r\ [y \rightarrow x]\ ) = F\ ].$$

4. Images : parallèles, convexes, squelettes

Nous expliquons maintenant comment la morphologie mathématique est, elle aussi, un calcul d'augmentation et diminution dans un régime d'assimilation. On voit d'abord que grâce au parallélisme il est possible dans l'étude de la courbure de se « débarrasser » du calcul différentiel, et tout particulièrement naturellement dans le cas des formes convexes. Et on note que « parallélisme » et « convexité » ont un sens abstrait en tout régime. Puis on rappelle comment la morphologie mathématique utilise l'algèbre des convexes, et, on souligne que ce qu'elle fait ainsi, comme par exemple l'étude des symétries et squelettes, aurait un sens pour tout régime d'assimilation.

L'analyse des formes en terme de courbure à l'aide du calcul différentiel, se concentre autour d'une idée, qui est celle de *l'application de Gauss* associant à tout point X d'une surface S la normale unitaire N(X) en ce point, dirigée « vers l'intérieur » i.e. dans la concavité de la surface si celle-ci est convexe, de sorte que la courbure vienne exprimer la variation de cette application. Si l'on considère l'application en question, $N : S \to S^2$, sa différentielle $dN_X : T_XS \to T_{NX}S^2$ détermine, puisque les plans $T_{NX}S^2$ et T_XS sont parallèles, une application linéaire, encore notée abusivement $dN_X : T_XS \to T_XS$, et nommée aussi application de Weingarten. On considère $\text{dét}(dN_X) = K_S(X)$ et $\text{tr}(dN_X) = -2H_S(X)$, K et H sont nommées courbure gaussienne et courbure moyenne ; les valeurs propres de dN_X sont les courbures principales notées R_1^{-1} et R_2^{-1}, et on a

$$K = (R_1^{-1} R_2^{-1}) \text{ et } H = 2^{-1}(R_1^{-1}+ R_2^{-1}).$$

Mais si précisément on veut mettre entre parenthèse la ressource du calcul différentiel et cependant garder un moyen de « voir la courbure » c'est-à-dire la variation de N, on introduit l'idée de surface S(h) *parallèle extérieurement* à S à une distance $h > 0$: cette surface s'obtient comme ensemble des points X–hN(X), chacun porté sur la normale à S en un point X, à une distance h de X, ou encore comme l'enveloppe des sphères de rayon h centrée sur S, autrement dit comme la propagation dans un milieu optiquement homogène de la surface d'onde S, telle que décrite par la construction d'Huygens. *La parallèle intérieurement* est S(-h), et c'est l'union de S(h) et S(-h) qui est l'objet naturel complet parallèle à S à une distance h, que l'on notera S(±h).

Le fait de base est alors celui-ci : si une courbe plane S admet au point X un rayon de courbure $R_{S,X}$, alors la parallèle extérieure S(h) admet, au point X-hN(X) un rayon de courbure

$$R_{S(h),X-hN(X)} = R_{S,X} +h.$$

Le résultat s'étend aux surfaces pour leurs rayons de courbures principaux R_1 et R_2, et, par suite on a pour les courbures gaussienne et moyenne des relations simples entre leurs valeurs pour un point X de S et le point X' =X-hN(X) de S' = S(h) :

$$K'(1\text{-}2Hh +Kh^2) = K, \text{ et } H'(1\text{-}2Hh +Kh^2) = H\text{-}Kh.$$

C'est la simplicité de cette évolution de la courbure avec h qui nous fait dire que la vision des lignes parallèles successives S(h) nous « montre la courbure » de S. Ce que nous allons préciser.

La remarque suivante est cruciale : on peut définir les courbes parallèles S(±h) « à la Huygens », sans calcul de normales et donc sans différentiabilité, car en général il s'agit de l'enveloppe des sphères de rayons h centrées sur S. Du moins lorsque l'intérieur k de S est convexe strict, il n'y a pas de difficultés pour remplacer l'application de Gauss par sa « réciproque » qui est la *fonction support* du convexe C : c'est la fonction s_C qui à une direction n associe la distance $s_C(n)$ de l'origine au plan H(n) perpendiculaire à n le plus éloigné possible et qui rencontre C , soit

$$s_C(n) = \sup\{n.x \ ; \ x \in C\}.$$

En fait (voir [20]) la courbure de S est liée au laplacien sphérique de s(n), et le point de contact x(n) de H(n) et C est grad s(n). Dans ce cas, l'ensemble C(h) intérieur à S(h) a pour fonction support tout simplement

$$s_{C(h)}(n) = s_C(n) + h.$$

La théorie du parallélisme devient, dans cette représentation, complètement élémentaire. Et plus encore si l'on souligne que C(h) admet donc une description purement ensembliste, à savoir

$$C(h) = \cup_{x \in C} \ B(x,h).$$

Si l'on considère dans l'espace l'assimilation métrique δ(h) associée à h, définie par

$$y \to_{\delta(h)} x \text{ si et seulement si } d(y, x) < h,$$

la détermination des courbes parallèles revient donc à la construction des ensembles augmentés :

$$C(h) = C\,\text{⬀}\,\delta(h).$$

À ce point précis, on se trouve débarrassé, dans l'étude de la courbure, du calcul différentiel, et, en principe, tout est déterminable à l'aide du seul calcul des ⬀δ(h), c'est-à-dire dans le régime d'assimilations métriques de l'espace, ou du plan. Ce qui permettra d'importer l'idée de courbure depuis le champ du régime métrique du plan jusqu'à des régimes quelconques, et notamment des régimes discursifs. Il est vrai que les choses s'arrangent bien avec des formules comme K(h) = K⬀δ(h) pour tout h, précisément quand K est un *convexe* (du plan ou de l'espace) c'est-à-dire vérifie :

$\forall x \ \forall y \ (x,y \in K \Rightarrow [x,y] \subseteq K).$

Il s'agit alors de repenser toute la géométrie en termes de théorie des convexes.

Dans cet état d'esprit, notons, en 1838 et 1840, deux jolis articles de Steiner [27] qui soulignent que, dans le cas du plan, on a les deux formules suivantes, valables si K est convexe et K(h) parallèle à K à l'extérieur à une distance h :

$\text{Périm}(K(h)) = \text{Périm}(K) + 2\pi h$, et $\text{Aire}(K(h)) = \text{Aire}(K) + \text{Périm}(K)h + \pi h^2$.

Après les théorèmes de Steiner on a, tout particulièrement, relativement aux convexes, le résultat suivant, de Brunn et de Minkowski [17] :

Pour K et L convexes de R^2, l'ensemble

$$K+L = \{k+l \ ; \ k \in K, l \in L\}$$

est convexe, et, si $0 \leq \lambda \leq 1$, alors on a l'inégalité :

$$\text{Aire}((1-\lambda)K + \lambda L)^{1/2} \geq (1-\lambda)\text{Aire}(K)^{1/2} + \lambda\text{Aire}(L)^{1/2}.$$

En fait, un théorème fondamental, caractéristique, est prouvé indépendamment par Bunt [3] et par Motzkin [18, 19], seulement en 1934 et 1935 : un fermé F de R^2 est un convexe si et seulement si tout point x de R^2 admet un unique point $\mathrm{proj}_F(x)$ de F le plus proche.

Une première conséquence de ce dernier théorème est qu'il explique complètement pourquoi les convexes sont exactement les objets dont les parallèles extérieurs à des distances quelconques, c'est-à-dire les augmentations $C \nearrow \delta(h)$ par des $\delta(h)$ quelconques, sont sans singularités.

Une deuxième conséquence est de fournir une nouvelle définition des convexes et de la projection orthogonale sur ceux-ci. C est convexe fermé si et seulement si pour tout $x \notin C$, il existe exactement une boule B(x,d) qui touche exactement C en un seul point, noté $\mathrm{proj}_F(x)$, et dit projection de x sur C, à une distance $d = d(x,C)$.

En fait, pour un convexe fermé, $x \in C \nearrow \delta(h)$ si et seulement si $B(x,h) \cap C \neq \emptyset$, et donc on a :

$$d(x,C) = \inf\{h \,;\, B(x,h) \cap C \neq \emptyset\} = \inf\{h \,;\, x \in C \nearrow \delta(h)\},$$

$$\mathrm{proj}_C(x) = C \cap \Big(\bigcap_{\{h \,:\, x \in C \nearrow \delta(h)\}} \{x\} \nearrow \delta(h)\Big).$$

On constate ainsi que la définition de l'ensemble $\mathrm{proj}_F(x)$ vaudrait dans un régime quelconque, si bien que l'on y pourrait définir les « convexes fermés », dans tout régime, comme les C tels que, pour tout x, l'ensemble $\mathrm{proj}_C(x)$ soit réduit à un point.

Ainsi le parallélisme, et partant la courbure, la convexité, la projection orthogonale, tout cela se décrit de façon abstraite dans le régime métrique du plan ou de l'espace. Et, dernier point mais non le moindre, il en est de même de la distance de Hausdorff d(A,B) entre parties d'un espace métrique, qui se décrit au mieux ici par :

$$d(A, B) = \inf\{h \,;\, A \subseteq B \nearrow \delta(h) \;\&\; B \subseteq A \nearrow \delta(h)\},$$

pour l'assimilation métrique $\delta(h)$ associée à chaque h, définie par $y \to_{\delta(h)} x$ si et seulement si $d(y, x) < h$. À l'usage près des notations, cela est bien connu. On voit ainsi que d(A, B) est définissable « abstraitement » par $d(A, B) = \inf D(A, B)$, en posant, pour tout régime :

$$D(A, B) = \{i \,;\, A \subseteq B \nearrow a(i) \;\&\; B \subseteq A \nearrow a(i)\}.$$

Ainsi on voit que le passage des points aux parties pour la distance dépend en fait uniquement d'un passage analogue, de points à parties, pour l'assimilation. C'est-à-dire que si l'on dispose d'assimilations $y \to_{a(i)} x$ sur un ensemble E, on peut l'étendre aux parties :

$$A \to_{a(i)} B \Leftrightarrow A \subseteq B \nearrow a(i).$$

À ce point donc, les opérations fondamentales de la géométrie apparaissent bien déjà comme déterminée depuis la seule donnée abstraite du régime métrique.

Alors continuons avec *l'analyse morphologique d'image* dans la suite de Hadwiger [11], à la manière de Matheron [16] et Serra [26]. On se reportera aussi aux livres d'Aubin [1], de Schmitt et Mattioli [25]. Cette analyse se laisse formulée au départ en termes d'opérations avec les addition et soustraction de Minkowski-Hadwiger des convexes.

On remarque d'abord que

$$C(h) = \cup_{x \in C} B(x,h) = C \nearrow \delta(h)$$

peut se décrire autrement, à savoir grâce à l’addition du convexe C au convexe B(0,h) :

$$C(h) = C+B(0,h) \,;$$

Aussi c’est plutôt dans de telles écritures que l’on rendra compte du parallélisme et de la courbure. Le fait est qu’en faisant ainsi on met aussi l’accent sur « le » prototype B(O,h) utilisé pour augmenter, autour de tout point x, que l’on pourra aisément utiliser l’invariance par translation que l’on supposera en effet souvent.

En morphologie mathématique en suppose ainsi fixé un convexe prototype K (qui pourra être un disque, un hexagone, un carré, un segment, etc.) et on considère que l’on peut, avec cet objet travailler une image $X \subseteq P$. Il s’agit de modifier X à l’aide de K, en faisant des *érosions* et des *dilatations* de X « par K ». On commence par poser :

$$X + K = \{x+k \,;\, x \in X, k \in K\} \quad \text{et} \quad X \mathbin{\text{—}} K = \{m \,;\, m+K \subseteq X\}.$$

La première opération est introduite par Minkowski [17], la seconde par Hadwiger [11]. On ne confondra surtout pas $X \mathbin{\text{—}} K$ avec

$$X - K = X + (-K) = \{x\text{-}k \,;\, x \in X, k \in K\}.$$

On a pour des parties quelconques non vides :

$$(A+B) \mathbin{\text{—}} B \supseteq A, \qquad (A \mathbin{\text{—}} B)+B \subseteq A,$$

$$A+B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \mathbin{\text{—}} B.$$

$$(K+L) \mathbin{\text{—}} L = K, \text{ si K et L sont convexes.}$$

On pense à X+K comme à une *dilatation* de X par K, et à $X \mathbin{\text{—}} K$ comme à une *érosion* de X par K, puis à $X_K := (X \mathbin{\text{—}} K)+K$ comme à une ouverture de X par K, et à $X^K := (X+K) \mathbin{\text{—}} K$ comme à une fermeture de X par K.

Alors une image X est analysée en la comparant à ses modifications significatives, et notamment à X_K et X^K. Par exemple le fait que X ne soit pas convexe sera assuré si, pour K convexe, on constate que $(X + K) \mathbin{\text{—}} K \supset X$. Où encore, l’écart entre X_K et X indique les pointes acérées de X, et l’écart entre X et X^K indique l’existence de fentes effilés dans X.

En réalité le lecteur reconnaîtra sans effort à l’œuvre ici des opérateurs de nécessité et de possibilité, autrement dit encore des augmentations et diminutions $\nearrow$<K> et $\searrow$<K>, en l’occurrence relative au régime <K> invariant par translation associée à K, définie par : $y \rightarrow_{<K>} x$ si et seulement si $y - x \in K$.

Ceci nous conduit à penser en général aux parties bords intérieur et extérieure $\nabla^{-}_{\varepsilon} X = X \backslash (X \searrow \varepsilon) \nearrow \varepsilon$ et $\nabla^{+}_{\varepsilon} X = ((X \nearrow \varepsilon) \searrow \varepsilon) \backslash X$ comme à des *déblais* et *remblais*, pour employer les mots de Dupin. La théorie des déblais et remblais nécessaire à la lecture d’image est donc identique au calcul de variations dans les régimes convenables, et ce que l’on exprime par cette méthode est analogue à une « équation différentielle » que satisfait l’image X.

Examinons enfin la question des squelettes. Soit X une partie ouverte du plan. Une première façon, intuitive, d'introduire le squelette Sq(X) consiste à imaginer que X soit une prairie, qu'en tout point du contour bord(X) de X on allume simultanément un feu qui se propage de manière isotrope dans X ; lorsque deux propagations indépendantes se rejoignent en un point s, le feu s'éteint en s, faute de combustible. Ce point s est dit « point d'extinction ». Le squelette Sq(X) est constitué de l'ensemble de ces points d'extinctions. Autrement dit, s est un point d'extinction ou point du squelette si la distance euclidienne de s à bord(X) est atteinte en au moins deux points distincts de bord(X). Pour être plus précis, pour X partie ouverte du plan, on appelle *squelette* de X l'ensemble Sq(X) des centre x des disques ouverts maximaux $\delta(r)[x] = \{y ; d(x, y) < r\}$ contenues dans X ; et, pour chaque x de Sq(X), on note ext(X)(x) le rayon du disque maximal centré en x. Cette fonction ext(X) s'appelle la fonction d'*extinction* de X, en relation avec l'interprétation avec le feu, mais on peut aussi l'appeler l'extension de X sur Sq(X).

Par exemple le squelette d'un disque est son centre, le squelette d'un carré plein est constitué de ses deux diagonales, le squelette d'un triangle plein des trois segments de bissectrices intérieures joignant leur point de rencontre aux sommets.

Du squelette, notion introduite par Motzkin en 1935 [19], nous disposons d'une présentation par Lantuejoul (1978) [14], que nous pouvons aisément ici traduire en termes d'augmentations et diminutions relativement au régimes des distances, soit le régime des δ(h). On considère dans le plan, $y \rightarrow_{\delta(h)} x$ si et seulement si $d(y,x) < h$, et puis $y \rightarrow_{\delta'(h)} x$ si et seulement si $d(y,x) \leq h$, soit $\forall\, q > h\ (y \rightarrow_{\delta(q)} x)$. Alors le squelette Sq(X) s'écrit, du moins dans notre hypothèse de X ouvert :

$$\mathrm{Sq}(X) = \bigcup_{r>0} \Big\{ \bigcap_{t>0} \big[(X \searrow \delta(r)) \setminus [[(X \searrow \delta(r)) \searrow \delta'(t)] \nearrow \delta'(t)] \big] \Big\},$$

et la fonction d'*extinction* $\mathrm{ext}(X) : \mathrm{Sq}(X) \rightarrow P(R_{\geq 0})$ est déterminée par :

$$\mathrm{ext}(X)(s) = \{t ; \{s\} \nearrow \delta(t) \subseteq X\} = \{t ; s \in X \searrow \delta(t)\},$$

de sorte que

$$X = \bigcup_{s \in \mathrm{Sq}(X)\ \&\ t \in \mathrm{ext}(X)(s)} \{s\} \nearrow \delta(t).$$

On constate donc la possibilité de déterminer par les « mêmes » formules ce que l'on appellera, plutôt que le squelette, l'axe ou l'*armature* Arm(X) et la fonction d'*extension* $\mathrm{ext}(X) : \mathrm{Arm}(X) \rightarrow P(I)$ d'une donnée $X \subseteq E$ dans un régime $a : I \rightarrow P(E^2)$ quelconque. On pense à Arm(X) comme à une sorte de socle logique nécessaire de X, et à ext(X) comme à la spécification de comment X se re-déploie depuis ce socle. En particulier si I est réduit à un élément i, et si $a(i) = \varepsilon$, alors $\mathrm{Arm}(X) = \nabla^{-}_{\varepsilon} (X \searrow \varepsilon)$. Ainsi Arm est analogue à une « dérivation ».

Réciproquement, si l'on suppose donnée une partie $U \subseteq E$ et une fonction $e : U \rightarrow P(I)$, on peut construire l' « intégrale » de e sur U comme

$$\int_U e = \bigcup_{u \in U\ \&\ i \in e(u)} \{u\} \nearrow a(i).$$

Cette construction est comme une « enveloppe », et ressemble aussi au produit semi-direct ou produit en couronne, voire à la construction des fibrations. On peut également la considérer comme une généralisation de l'augmentation, ou bien d'un point de vue logique, une généralisation de la modalité de possibilité. On retrouve l'augmentation de U par a(i), lorsque $e = \{i\}^\wedge$ (l'application constante sur {i}) ; alors on a évidemment :

$$\int_U \{i\}^\wedge = U \nearrow a(i).$$

Cette détermination générale de la décomposition $\mathrm{ext}(X) : \mathrm{Arm}(X) \rightarrow P(I)$ et de la recomposition $\int_U e$ canoniques des objets est un exemple d'importation d'une idée « visuelle » jusqu'au niveau général des régimes, et donc, par exemple, dans les régimes pouvant décrire des analyses de discours (par des jeux de synonymies, etc.) : on dispose alors de méthodes d'affinement du jeu des nécessités et des possibilités.

5. Conclusion : la pulsation entre visuel et discursif

La thèse que nous avons voulu avancer ici est dans son principe très « basique », et touche aux notions et problématiques initiales des deux champs du *voir* et du *dire*. Bien entendu un travail approfondi ultérieur devrait se soucier en détail des études actuelles et anciennes sur la perception visuelle et sur l'argumentation rhétorique.

Il ne va pas du tout de soi que ce que l'on fait passer comme sens par l'image et ce que l'on fait passer comme sens par un discours puissent être la même chose ou même seulement des sens traductibles les uns dans les autres. Pour ce qui serait ainsi transférable, on connaît mal les possibilités naturelles et les ressources systématiques ; et pour ce qui ne peut qu'être perdu quand on passe d'un registre à l'autre, il faudra en décrire la classification, aux deux titres d'ailleurs. L'invention d'une méthode ici serait bien venue. Ce à quoi nous commençons à participer ici.

Car ce qui nous est apparu cependant, en dépit d'hétérogénéités patentes, comme notamment l'opposition entre le caractère unidimensionnel du discours et le caractère bidimensionnel de l'image, c'est que quelque chose est « le même » dans les deux champs, qui relève d'un même calcul, d'un même matériau symbolique, et d'une même pratique avec ce matériau ; ce que donc nous avons pointé finalement comme le calcul des variations dans le jeu des assimilations suivant un régime déterminé.

Tout ce qui dans l'un des deux champs, du voir ou du dire, se laisse écrire dans l'espèce de calcul différentio-intégral structural ainsi proposé, en augmentations et diminutions à différents niveaux, est aussitôt significatif dans l'autre champ. Ce calcul a donc la fonction de passeur entre le champ du voir et le champ du dire, et l'utiliser c'est, sans y penser, implicitement, mettre en œuvre effectivement la pulsation entre l'intuition du voir et l'intuition du dire. C'est la mise en marche de cette *pulsation* [7, 8] par ce calcul que nous avons construite.

D'abord nous avons exposé les éléments du calcul en introduisant notamment le rôle des assimilations, des questions de bords, et des assimilations entre les assimilations. La philosophie de base est que les structures que l'on utilise souvent en mathématique interviennent en fait seulement via des assimilations, via des augmentations et diminutions associées.

Après, est expliqué le lien avec les modalités en termes de mondes possibles.

Puis le lien au calcul des courbes parallèles et aux opérations sur les convexes est convoqué. On voit notamment que les convexes sont exactement les parties du plan qui subissent sans problèmes les constructions de parallèles extérieures, c'est-à-dire le calcul d'augmentation dans le régime métrique du plan. On voit aussi que, via la théorie du parallélisme, la question de la courbure devient formulable en termes d'augmentations et diminutions, comme l'est aussi la question de la distance entre parties. De là, le lien aux analyses d'images en termes d'érosion et dilatation, soit ce que l'on appelle la morphologie mathématique, est aisé à pointer. On en tire profit pour, en retour, comprendre que l'idée de symétries et squelettes est importable en tout régime, et notamment dans les régimes discursifs.

Au sein du calcul des régimes, le voir et le dire se croisent et se fécondent. Parler de bord, de pic et de faille, de distance entre taches, de courbure, de symétrie ou de squelette, à propos de ce que l'on voit dans une image, tout cela, tombant dans le calcul proposé, se trouve effectivement analogue au jeu des modalités dans la langue et en situation discursive, où le même calcul vaut. Nous proposons donc à ceux qui analysent les images et à ceux qui analysent les discours de trouver là un lieu commun.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] AUBIN J.-P., *Mutational and Morphological Analysis*, Birkhäuser, 1999.

[2] BENABOU J., Théorie des ensembles empiriques (1) et (2), Séminaire 1987-88 et 1989-90, *Cahiers de Poétique Comparée, Deuxième série, Mezura* n° 17, 1988, 72 p., et n°21, 1990, 58 p.

[3] BUNT L.N.H., Bijdräge tot de theorie der convexe puntverzamelingen. Thesis, Univ. Groningen, Amsterdam, 1934.

[4] CHAGROV A. & ZAKHARYASCHEV M., *Modal Logic*, Oxford Logic Guides: 35, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[5] DAMPHOUSSE P. & GUITART R., Les représentations naturelles de PX dans PPX, *Actes des Journées Mathématiques Catégories, Algèbres, Esquisses, Néo-esquisses*, Pierre Ageron éd., Univ.Caen, 27-30 septembre 1994, 115-120.

[6] GUITART R., *Régimes d'assimilations et calcul des variations. À la poursuite du même. Notes préparatoires 1 à 42*, 1997-1999, multigraphié à Paris 7, 215 p.

[7] GUITART R., *La pulsation mathématique*, L'Harmattan, Paris, sept. 1999.

[8] GUITART R., Voir ce que l'on dit, dire ce que l'on voit, *APMEP* bull. 431, nov-déc. 2000, 793-812.

[9] GUITART R., L'assimilation et l'excès de l'acte sur le logique, *Mélanges Jacques Roubaud*, Mezura 49, Inalco, mai 2001, 209-227.

[10] GUITART R., Modalités et images, in *Actes du SIC d'Amiens du 10 nov. 2001*, 9-10.

[11] HADWIGER ?, Minkowskische Addition und Subtraktion neliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt, *Math. Z.* 53, 1950, 210-218.

[12] KRIPKE S., Semantical analysis of modal logic, Part I. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67-96, 1963.

[13] KRIPKE S., Semantical considerations on modal logic, *Acta Philosophica Fennica*, 16:83-94, 1963.

[14] LANTUEJOUL C., Thèse de Docteur Ingénieur, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1978.

[15] LEWIS C.I. & LANGFORD C.H., *Symbolic logic*, Dover, 1932.

[16] MATHERON G., *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, 1975.

[17] MINKOWSKI H., Volumen und Oberfläche, *Math. Ann.* 57, 1903, 447-495.

[18] MOTZKIN T.S., Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes, *Atti Real. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat., Natur.,* Serie VI, 21, 562-7, 1935.

[19] MOTZKIN T.S., Atti. Acad. Naz. Lincei, 1935, 21, 773.

[20] POGORELOV A.V., *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Trans. Math. Monographs vol. 35, 1973.

[21] PRATT V. R., *Dynamic algebras : Examples, Constructions, Applications*. Report MIT/LCS/TM-138, july 1979.

[22] RIGUET J., *Cartouche writing of Galois and adjunction pairs, and their application for geometrically depicting consequence relation in logic and in relational data basis*, repport 89, LITP, Paris 7, 4 janvier 1989, 57 p.

[23] SASSIER M., VOIR quelques ON chez Louis Althusser, *Langage et société* n°86, Paris, MSH, 1998, 95-123.

[24] SASSIER M., *Une approche de la prise en charge en sémantique discursive par les régimes d’assimilation ; essai d’étayage mathématique de la non-componentialité du sens*, thèse, Univ. Paris III, 6 mars 2002.

[25] SCHMITT M. & MATTIOLI M., *Morphologie Mathématique*, Coll. Logique Mathématiques Informatique, Masson, Paris Milan Barcelone, 1994.

[26] SERRA J., *Image analysis and mathematical morphology*, vol. I et II, AcademicPress, 1982 & 1988.

[27] STEINER J., Über parallele Flächen, *Monatsber. Preusss. Akad. Wiss. Berlin* 1840, 114-118.

[28] WEIL A., *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, A.Sc.I ., n°551, Hermann, 1937.